

# 用筛选法重建多面体

王 文 仲

(应用数学系)

**摘 要** 本文给出由三视图重建多面体的一种方法, 避免求解大型方程组。在一般情况下, 不需要人工干预, 即可得到精确的三维数组与立体图形。在 IBM-PC 计算机上, 得到轴测投影图仅需一分钟左右的时间。

## 一、理 论 说 明

在一般情况下, 三视图已包含了立体图形生成的全部信息。由空间形体的顶点, 引三坐标面的垂线, 它与坐标面的垂足即为视图中的顶点; 反过来, 由三视图上各顶点的投影所确定的与视图垂直的三直线的交点即空间几何形体的顶点。

同样, 由立体图形中的每一条顶点间的连线, 可以得到三视图中的对应连线。只要从连线作三坐标面的垂面, 与坐标面之交线即是所求的对应视图中的连线。反过来, 只要过连线的投影引与坐标面垂直的平面, 其交线即为连线。

由此可见, 在不太特殊的情况下由三视图可以得到唯一的立体图形。

## 二、三视图的数据存贮

按照通常三视图的画法, 视图上点的齐次坐标  $(x^*, y^*, z^*, 1)$  满足:

正视图中的点

$$x^* = x, \quad y^* = 0, \quad z^* = z \quad (1)$$

俯视图中的点

$$x^* = x, \quad y^* = 0, \quad z^* = -(y+n) \quad (2)$$

右视图中的点

$$x^* = -(y+l), \quad y^* = 0, \quad z^* = z \quad (3)$$

其中  $x, y, z$  是立体图形的顶点所对应的空间直角坐标系的坐标,  $n, l$  为平移变换

量, 它可以由三视图所在的位置得到。

从(1)、(2)、(3)式不难求得立体图形顶点只作投影而不作平移也不作旋转时的坐标为

$$x=x^*, y=0, z=z^* \quad (1')$$

$$x=x^*, y=-n-z^*, z=0 \quad (2')$$

$$x=0, y=-l-x^*, z=z^* \quad (3')$$

由于 $x^*, y^*, z^*, n, l$ 为已知, 所以立体图形顶点投影坐标是容易得到的。以下我们约定, 对三视图的讨论改为讨论由(1')、(2')、(3')所定义的投影坐标及投影点, 不再另加声明。

### 1. 顶点信息的存貯

将正视图中顶点的坐标记为 $(x_i, 0, z_i, 1)$ , 将俯视图中顶点的坐标记为 $(x_i, y_i, 0, 1)$ , 将右视图中顶点的坐标记为 $(0, y_j, z_j, 1)$

### 2. 连线信息的存貯

由于三维空间直线的变换矩阵为

$$L = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \end{bmatrix}$$

该直线经过点 $\{a_1, a_2, a_3, 1\}$ 及点 $\{b_1, b_2, b_3, 1\}$ 。为了以后判别的方便, 我们对两个顶点间的连线, 相应存入矩阵

$$L = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \end{bmatrix}$$

则称 $L$ 为点 $\{a_1, a_2, a_3, 1\}$ 及点 $\{b_1, b_2, b_3, 1\}$ 的连线矩阵。

因此, 正视图、俯视图和右视图中连线矩阵的形式分别为 $L_1, L_2, L_3$ :

$$L_1 = \begin{bmatrix} x_{i_2} - x_{i_1} & 0 & z_{i_2} - z_{i_1} & 0 \\ x_{i_1} & 0 & z_{i_1} & 1 \\ x_{i_2} & 0 & z_{i_2} & 1 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} x_{i_2} - x_{i_1} & y_{i_2} - y_{i_1} & 0 & 0 \\ x_{i_1} & y_{i_1} & 0 & 1 \\ x_{i_2} & y_{i_2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & y_{j_2} - y_{j_1} & z_{j_2} - z_{j_1} & 0 \\ 0 & y_{j_1} & z_{j_1} & 1 \\ 0 & y_{j_2} & z_{j_2} & 1 \end{bmatrix}$$

## 三、用筛选法确定立体图形的角点

### 1. 形成“可能的顶点”

由正视图或右视图不难得到立体图形顶点 $z$ 坐标的集合 $R$ , 设 $R$ 中不相同元素的个数为 $U$ , 则 $z_u \in R, u=1, 2, 3 \dots U$ , 表 $R$ 中的元素。如从俯视图出发, 构造下述 $L \cdot U$ 个点:

$$\{x_l, y_l, z_u, 1\}, l=1, 2, \dots, L; u=1, 2, \dots, U$$

其中 $\{x_l, y_l, 0, 1\}; l=1, 2, \dots, L$ 是俯视图中的点集。很明显, 按视图形成原理立体图

形一切顶点都一定含于  $L \cdot U$  个点之中。我们称这样的点具有  $1/3$  的真度。

## 2. 对上述 $L \cdot U$ 个点, 判别点的真伪

对任意的  $l, u$ , 点  $\{x_l, y_l, z_u, 1\}$  在另外二个视图上的投影点的坐标为  $\{x_l, 0, z_u, 1\}$  及  $\{0, y_l, z_u, 1\}$ 。在正视图上有点坐标与  $\{x_l, 0, z_u, 1\}$  相等, 则称点  $\{x_l, y_l, z_u, 1\}$  具有  $2/3$  的真度, 否则点仍旧具有  $1/3$  的真度。当  $\{x_l, y_l, z_u, 1\}$  已具有  $2/3$  的真度时, 又  $\{0, y_l, z_u, 1\}$  与右视图上某点的坐标相等, 则点  $\{x_l, y_l, z_u, 1\}$  具有  $3/3$  的真度, 否则仍旧具有  $2/3$  的真度。我们称具有  $3/3$  真度的点叫真点, 真度小于  $3/3$  的点叫伪点, 在一般情况下, 不唯知道真点是立体图形的顶点, 而伪点则不是。

## 四、用筛选法确定立体图形的连线

### 1. 构造“可能的连线”

如果把所有的真点都互相连接, 再逐一加以判断, 则伪连线(不是立体图形的连线)过多, 工作量过大。

我们仍可从俯视图入手, 设俯视图中有连线矩阵

$$L = \begin{bmatrix} x_m - x_n & y_m - y_n & 0 & 0 \\ x_n & y_n & 0 & 1 \\ x_m & y_m & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

一切真点中以  $x_n, y_n$  为  $x, y$  坐标的点  $P_t, t=1, 2, \dots, T$ , 以  $x_m, y_m$  为  $x, y$  坐标的点  $Q_s, s=1, 2, \dots, S$ 。则对应于上述连线矩阵  $L$  构造可能的连线有  $ST$  条。若  $T=3, S=2$ , 则有 6 条可能的连线需加以判别(如图 1 所示)。

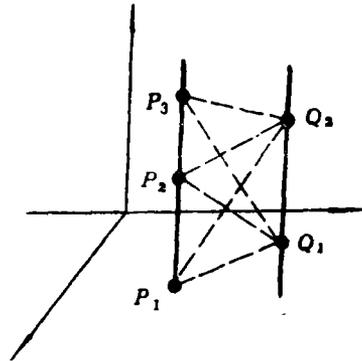


图 1

### 2. 判别连线的真伪

显然按上述构造的连线已至少具有  $1/3$  的真度。为了叙述方便, 以  $P_1, Q_1$  两点的连线为例说明判别连线真伪的过程。

$P_1, Q_1$  间的连线矩阵

$$L = \begin{bmatrix} x_m - x_n & y_m - y_n & z(P_1) - z(Q_1) & 0 \\ x_n & y_n & z(Q_1) & 1 \\ x_m & y_m & z(P_1) & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

在俯视图上的投影正是俯视图上的连线矩阵(4), 记为  $L[3,0]$  ( $L[3,0]$  即是  $L$  矩阵第 3 列元素换为 0)。因此连线矩阵  $L$  至少具有  $1/3$  的真度。 $L$  在正视图上的投影连线矩阵为  $L[1,0]$ ,  $L$  在右视图上的投影连线矩阵为  $L[2,0]$ 。注意到连线构造时起始点选择不同, 同一视图的连线有下述四种可能的矩阵形式:

$$e_j L[i,0] \quad i=1,2,3; j=1,2,3,4$$

$$\text{其中 } e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

如果连线矩阵  $e_j L[1,0]$  中有一个与右视图连线矩阵中的一个相等, 则称  $L$  有  $2/3$  的真度; 如果连线矩阵  $e_j L[2,0]$  中还有一个与正视图中连线矩阵相等, 则  $P_1, Q_1$  两点间的连线具有  $3/3$  的真度, 称为真连线。否则最多具有  $2/3$  的真度。

有一特殊情况值得注意, 当连线与坐标面垂直时, 它在相应投影面上的投影为一个真点。此时  $L[1,0]$  或  $L[2,0]$  中第一行元素中非零元素不多于一个。如果它们对应着一个真点, 该连线也增加  $1/3$  的真度。

判别真点与真连线之后, 我们即可得到三维空间中的复原物体, 由计算机可立即得到复原的图形, 与重建的物体所对应的顶点的三维数组及连线矩阵。

## 五、举 例

我们以立方体为例说明整个过程, 设给定的机械三视图如图 2 所示。

正视图顶点带 \* 坐标

$$\{0, 0, 0, 1\} \quad \{1.5, 0, 0, 1\}$$

$$\{1.5, 0, 1.5, 1\} \quad \{0, 0, 1.5, 1\}$$

俯视图顶点带 \* 坐标

$$\{0, 0, -1, 1\} \quad \{0, 0, -2.5, 1\}$$

$$\{1.5, 0, -2.5, 1\} \quad \{1.5, 0, -1, 1\}。$$

右视图顶点带 \* 坐标

$$\{-1, 0, 0, 1\} \quad \{-2.5, 0, 0, 1\}$$

$$\{-1, 0, 1.5, 1\} \quad \{-2.5, 0, 1.5, 1\}$$

注意到平移量  $n=1, L=1$  由变换方式

(1')(2')(3') 得三个投影图的不带 \* 坐标:

正视图:  $\{0, 0, 0, 1\} \quad \{1.5, 0, 0, 1\} \quad \{1.5, 0, 1.5, 1\} \quad \{0, 0, 1.5, 1\}$ 。

俯视图:  $\{0, 0, 0, 1\} \quad \{0, 1.5, 0, 1\} \quad \{1.5, 1.5, 0, 1\} \quad \{1.5, 0, 0, 1\}$

右视图:  $\{0, 0, 0, 1\} \quad \{0, 1.5, 0, 1\} \quad \{0, 0, 1.5, 1\} \quad \{0, 1.5, 1.5, 1\}$

注意到  $R=\{0, 1.5\}$ , 构造可能的顶点, 从俯视图出发有:  $\{0, 0, 0, 1\}, \{0, 0, 1.5, 1\}, \{0, 1.5, 0, 1\}, \{0, 1.5, 1.5, 1\}, \{1.5, 1.5, 0, 1\}, \{1.5, 1.5, 1.5, 1\}, \{1.5, 0, 0, 1\}, \{1.5, 1.5, 1.5, 1\}$ 。

点  $\{1.5, 1.5, 1.5, 1\}$  在三个视图上的坐标依次为  $\{1.5, 0, 1.5, 1\}, \{1.5, 1.5, 0, 1\}, \{0, 1.5, 1.5, 1\}$ 。这三个投影点的第一个点坐标与正视图中第 3 个点坐标相等, 第二个点坐标与俯视图中第 3 个点坐标相同, 第三个点坐标与右视图中第 4 个点坐标相同, 从而  $\{1.5, 1.5, 1.5, 1\}$  为真点。类似可以判别这八个点全为真点。

画出三个投影图在坐标 (不带 \*) 系中的三个图形, 如图 3 所示, 共有连线矩阵 12 个。正视图四个;

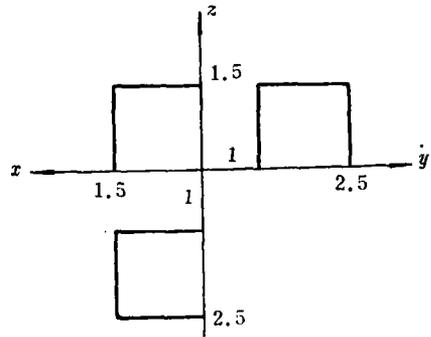


图 2

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.5 & 0 \\ 1.5 & 0 & 1.5 & 1 \\ 1.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 0 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

俯视图四个:

$$L_5 = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$L_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 1.5 & 0 & 0 & 1 \\ 1.5 & 1.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_7 = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1.5 & 0 & 1 \\ 0 & 1.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_8 = \begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

右视图四个

$$L_9 = \begin{bmatrix} 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 1 \\ 0 & 1.5 & 1.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1 \end{bmatrix}$$

今考察俯视图连线  $L_7$  及与  $L_7$  对应立体图形的连线。由于  $L_7$  的两个端点对应的立体图形的顶点中的真点为:  $\{1.5, 1.5, 0, 1\}$ ,  $\{1.5, 1.5, 1.5, 1\}$ ,  $\{0, 1.5, 0, 1\}$ ,  $\{0, 1.5, 1.5, 1\}$ , 所以构造出的“可能的连线矩阵”为:

$$L_{71} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 1 \\ 1.5 & 1.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_{72} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & -1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 & 1.5 & 1 \\ 1.5 & 1.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_{73} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 1.5 & 1 \\ 1.5 & 1.5 & 1.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_{74} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & -1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 1 \\ 1.5 & 1.5 & 1.5 & 1 \end{bmatrix}$$

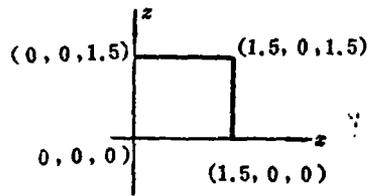


图 3

$L_{71}$  已具有  $1/3$  的真度, 它在正视图上的投影连线矩阵为

$$\begin{bmatrix} -1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

与给定的不带 \* 正视图中连线矩阵没有相同的, 但与  $\varepsilon_2 L_1$  相同。故  $L_{71}$  具有  $2/3$  的真度, 又  $L_{71}$  在右视图上的投影连线矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 1 \\ 0 & 1.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

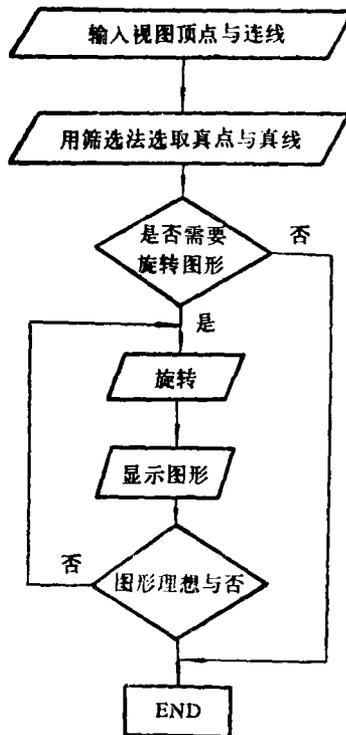
其第一行为零向量, 它们的投影为一个点, 而这个点只可能是  $\{0, 1.5, 0, 1\}$ , 该点是真点, 故连线  $L_{71}$  是真连线。  $L_{72}$  也具有  $1/3$  的真度, 但它在正视图上的投影连线矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 0 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1 \\ 1.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

它不等于任何一个  $\varepsilon_j L_i$ ,  $j=1, 2, 3, 4$ ;  $i=1, 2, 3, 4$ 。又它的两个端点连线并不平行于某一坐标轴 (即不垂直于坐标面), 所以该连线不会具有  $3/3$  的真度, 故为伪线。

同理, 可以判别其它的连线矩阵。判别完成在屏幕上画出真线即为所求立体图形。

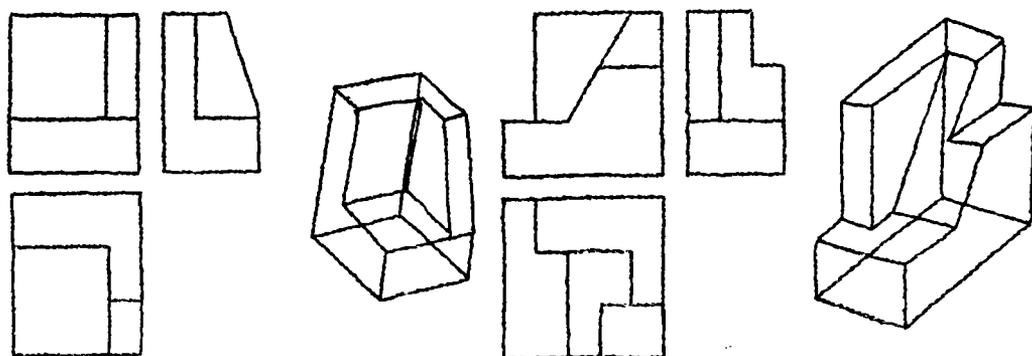
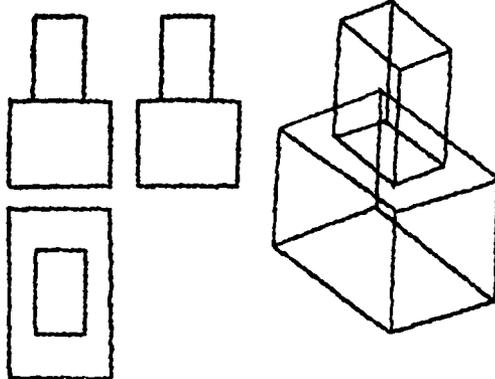
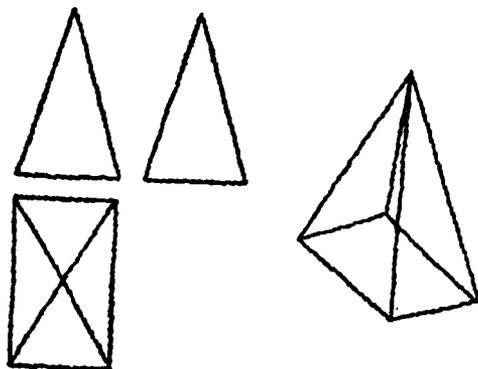
## 六、计算框图与实例



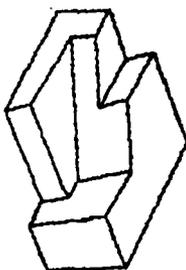
### 七、计算机复原三视图的例子

三视图

复原图形



消去隐藏线的图形, 如



按目前在 IBM 机上实现从三视图数据信息输入后到成图时间为分钟左右。

## 八、结 束 语

本方法中所使用的连线矩阵提供了存贮连线的新形式, 它给图形显示带来一定的方便。

另外不难看出, 不从俯视图出发, 从正视图出发来判别点, 线的真伪结果是相同的, 第七节给出的四个例子都是按正视图出发得到的结果。

由于没有乘除法运算, 计算只是矩阵的简单初等变换, 没有任何误差。本文提供的方法适用于一般情况。当三视图表示的多面体不唯一, 或空间形体的相应顶点不存在, 但它们相应的投影都存在, 则需要加入人工干预, 在此文中不再详细讨论。

本文得到国防科大八系欧义同副教授的指导和帮助, 程永昌、鲁南为本计算编制了通用程序, 特此表示感谢。

## 参 考 文 献

- [1] W. M. Newman and R. F. Sproll. 易晓东等译, 对话式计算机图形显示原理。
- [2] D. F. Rogers and J. A. Adams. 工程图学会译, 计算机图学的数学基础。
- [3] 伍正凡, 欧义同等编, 计算机绘图及图形显示, 湖南科技出版社。

## Reconstruction of Multifaced Body by Sifting Method

Wang Wenzong

### Abstract

In this paper a method of reconstructing multifaced body directly from the three-dimensional views without the solution of large equation group is discussed. It is possible to obtain an exact three-dimensional matrix and view without human interference using this method. It is necessary to take only about one minute to get projection view on IBM-PC computer.