国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八七年第二期　总第五十八期　No.2 1987 Sum. 58

强度理论的主应力形式及几何解释

杨光松　黄　炎

（应用力学系）

摘　要　本文从一般强度理论出发导出各向异性材料应力形式张量多项式强度理论，根据强度准则的外凸性得到应力二次形式强度准则的强度参数限制条件。该限制条件既可验证强度准则的可用性又有助于实验确定基本强度参数。主应力形式强度准则在应力空间给出一个椭圆型二次曲面如：椭球面、椭圆抛物面、回转抛物面、椭圆柱面或圆柱面等。

一、一般強度理论及限制条件

强度理论的研究对节省材料和降低成本将起着积极作用，特别是预测结构的破坏，保证结构安全有着重要意义。由文献[1]知，强度准则的极限面是外凸的。

为了推导简便、便于应用，考虑应力的二次形式强度准则：

$$f(\sigma)=F_{ij}\sigma_i\sigma_j+F_i\sigma_i-1 \tag{1}$$

F_{ij}是一个对称二阶张量，F_i，$F_{ij}(i,j=1,6)$共有27个独立强度参数，它们可通过试验用基本强度表出。

设　　$\sigma^*=\lambda\sigma'+(1-\lambda)\sigma''\qquad(0\leqslant\lambda\leqslant1)$

则　　$f(\sigma^*)\geqslant\lambda f(\sigma')+(1-\lambda)f(\sigma'')$

即　　$\lambda(1-\lambda)F_{ij}(\sigma_i'-\sigma_i'')(\sigma_j'-\sigma_j'')\geqslant0$

这里λ，σ_i'，$\sigma_i''(i,j=1,6)$为任意值。因此F_{ij}是一个半正定性张量，满足：

$$\begin{aligned}&F_{ii}\geqslant0\\&F_{ii}F_{jj}-F_{ij}^2\geqslant0\quad(i,j=1,6)\end{aligned} \tag{2}$$

现有的各种材料的强度参数均需满足该限制条件。

本文1986年4月收到

二、主应力强度理论

目前，各向异性强度理论如复合材料强度理论都是从材料主方向考虑，并不直接考虑主应力在强度理论中的影响。现在我们同时考虑材料的主方向和应力的主方向，它对已知主应力及其主方向时比较方便。

设新旧坐标系的转换矩阵为

$$[l]=\begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

应力张量转轴公式为

$$[\sigma']=[l][\sigma][l]^T \tag{4}$$

展开(4)式，按一定次序把应力张量排成应力矢量形式[2]：

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_z \\ \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} \\ \tau'_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2m_1n_1 & 2n_1l_1 & 2l_1m_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & 2m_2n_2 & 2n_2l_2 & 2l_2m_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & 2m_3n_3 & 2n_3l_3 & 2l_3m_3 \\ l_2l_3 & m_2m_3 & n_2n_3 & m_2n_3+m_3n_2 & n_2l_3+n_3l_2 & l_2m_3+l_3m_2 \\ l_3l_1 & m_3m_1 & n_3n_1 & m_3n_1+m_1n_3 & n_3l_1+l_3n_1 & l_3m_1+l_1m_3 \\ l_1l_2 & m_1m_2 & n_1n_2 & m_1n_2+m_2n_1 & n_1l_2+n_2l_1 & l_1m_2+l_2m_1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{5}$$

记成

$$\sigma'=T_\sigma\sigma \tag{6}$$

T_σ是一个 6 阶矩阵，直接求逆相当困难，而根据坐标系的转换求逆很方便。得

$$T_\sigma^{-1}=\begin{pmatrix} l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & 2l_2l_3 & 2l_3l_1 & 2l_1l_2 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 & 2m_2m_3 & 2m_3m_1 & 2m_1m_2 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 & 2n_2n_3 & 2n_3n_1 & 2n_1n_2 \\ m_1n_1 & m_2n_2 & m_3n_3 & m_2n_3+m_3n_2 & m_3n_1+m_1n_3 & m_1n_2+m_2n_1 \\ n_1l_1 & n_2l_2 & n_3l_3 & n_2l_3+n_3l_2 & n_3l_1+n_1l_3 & n_1l_2+n_2l_1 \\ l_1m_1 & l_2m_2 & l_3m_3 & l_2m_3+l_3m_2 & l_3m_1+l_1m_3 & l_1m_2+l_2m_1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

把(6)式代入(1)式得新坐标系下的强度准则：

$$f(\sigma)=F'_{ij}\sigma'_i\sigma'_j+F'_i\sigma'_i-1 \tag{8}$$

这里：

$$F'_{ij}=F_{mn}T^{-1}_{\sigma mi}T^{-1}_{\sigma nj},\quad F'_i=F_mT^{-1}_{\sigma mi} \tag{9}$$

新坐标系为主应力坐标系时，有

$$\sigma'=\{\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3, 0, 0, 0\}^T \tag{10}$$

$$\begin{aligned} f(\sigma)=&F'_{11}\sigma'^2_1+F'_{22}\sigma'^2_2+F_{33}\sigma'^2_3+2F'_{12}\sigma'_1\sigma'_2+2F'_{13}\sigma'_1\sigma'_3 \\ &+2F'_{23}\sigma'_2\sigma'_3+F'_1\sigma'_1+F'_2\sigma'_2+F'_3\sigma'_3-1 \end{aligned} \tag{11}$$

这里只有 9 个独立强度参数，可用主应力拉压及二向应力的基本强度确定。

由公式(9)，可用分块矩阵求逆的办法，利用两组偏轴强度参数确定材料主方向基本

强度。从而可避免作剪切，剪切与拉压偶合等复杂应力试验。

同时(9)式也可用于检验应力二次形式强度理论的适用性。若实验确定的某两组偏轴强度参数F'_{ij}，F''_{ij}不满足此转换关系，则说明该强度准则不适用，需寻求更复杂的强度准则如三次、四次应力形式强度准则等。

由(2)式知，F'_{ij}仍是半正定的，存在三个特征值$\lambda_i(i=1,3)\geqslant 0$，满足：

$$\lambda^3-F'_{ii}\lambda^2+\frac{1}{2}(F'_{ij}F'_{ij}-F'^2_{ii})\lambda-|F'_{ij}|=0 \tag{12}$$

(11)式成为

$$f(\sigma)=\lambda_1\sigma^2_{\mathrm{I}}+\lambda_2\sigma^2_{\mathrm{II}}+\lambda_3\sigma^2_{\mathrm{III}}+F_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{I}}+F_{\mathrm{II}}\sigma_{\mathrm{II}}+F_{\mathrm{III}}\sigma_{\mathrm{III}}-1 \tag{13}$$

这里σ_{I}，σ_{II}，σ_{III}是相应于λ_1，λ_2，λ_3的应力线性组合，它是一个椭圆型二次曲面。

现在来讨论(13)式的一些特殊情况：

1. 若强度准则在应力空间中有界，如复合材料[3]，则$\lambda_i(i=1,3)$为有限正值，(13)式表示一椭球面：

$$\frac{(\sigma_{\mathrm{I}}-C'_1)^2}{a_1^2}+\frac{(\sigma^2_{\mathrm{II}}-C'_2)^2}{a_2^2}+\frac{(\sigma^3_{\mathrm{III}}-C'_3)^2}{a_3^2}=1 \tag{14}$$

椭球半轴为 $a_i=\sqrt{\dfrac{d}{\lambda_i}}\quad(i=1,3)$

这里 $d=1+\dfrac{F^2_{\mathrm{I}}}{4\lambda_1}+\dfrac{F^2_{\mathrm{II}}}{4\lambda_2}+\dfrac{F^2_{\mathrm{III}}}{4\lambda_3}$

椭球中心为 $C'_i=-\dfrac{F_{\mathrm{I}}}{2\lambda_i}\qquad(i=1,3)$

显然，当$F'_i=0$时，椭球中心为坐标原点。

2. 若某一特征值为0，不妨设$\lambda_3=0$，则强度准则为无界曲面。

1) $F_{\mathrm{III}}\neq 0$，(13)式成为椭圆抛物面。当$\lambda_1=\lambda_2$时为回转抛物面，即巴兰金强度理论[4]。

2) $F_{\mathrm{III}}=0$，(13)式为椭圆柱面。$F_i=0$时为米赛斯屈服函数。

现以复合材料简单层板为例来考虑平面应力的二维强度问题。(1)式成为：

$$f(\sigma)=F_{11}\sigma_1^2+2F_{12}\sigma_1\sigma_2+F_{22}\sigma_2^2+F_{66}\sigma_6^2+F_1\sigma_1+F_2\sigma_2-1 \tag{15}$$

这里 $\sigma=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_6\}^T=\{\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}\}^T$

且有
$$F_{ii}>0\ (i=1,2,6)\qquad F_{11}F_{22}-F^2_{12}\geqslant 0 \tag{16}$$

(15)式的主应力形式为

$$f(\sigma)=F'_{11}\sigma'^2_1+2F'_{12}\sigma'_1\sigma'_2+F_{22}\sigma'^2_2+F'_1\sigma'_1+F_2\sigma'_2-1 \tag{17}$$

其中
$$\left.\begin{aligned}
F'_{11}&=F_{11}\cos^4\theta+(2F_{12}+F_{66})\cos^2\theta\sin^2\theta+F_{22}\sin^4\theta\\
F'_{12}&=F_{12}+(F_{11}+F_{22}-2F_{12}-F_{66})\cos^2\theta\sin^2\theta\\
F'_{22}&=F_{11}\sin^4\theta+(2F_{12}+F_{66})\cos^2\theta\sin^2\theta+F_{22}\cos^4\theta\\
F'_1&=F_1\cos^2\theta+F_2\sin^2\theta\\
F'_2&=F_1\sin^2\theta+F_2\cos^2\theta
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

θ 为主应力x'方向与 x 轴的夹角。

(17)式的椭圆标准形式为

$$\frac{(\sigma_1''-C_1'')^2}{a_1^2}+\frac{(\sigma_2''-C_2'')^2}{a_2^2}=1 \tag{19}$$

这里

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1''&=\sigma_1'\cos\alpha+\sigma_2'\sin\alpha\\ \sigma_2''&=-\sigma_1'\sin\alpha+\sigma_2'\cos\alpha\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

α 为椭圆主轴与x'轴的偏角。[5]且

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{ctg}2\alpha=\frac{F_{11}'-F_{22}'}{2F_{12}'}\\
&C_1'=\frac{F_{12}'F_2'-F_{22}'F_1'}{2(F_{11}'F_{22}'-F_{12}'^2)}\\
&C_2'=\frac{F_{12}'F_1'-F_{11}'F_2'}{2(F_{11}'F_{22}'-F_{12}'^2)}\\
&a_1=\sqrt{\frac{4(F_{11}'F_{22}'-F_{12}'^2)+F_1'^2F_{22}'-2F_1'F_2'F_{12}'+F_2'^2F_{11}'}{2(F_{11}'F_{22}'-F_{12}'^2)(F_{11}'+F_{22}'-\sqrt{(F_{11}'-F_{22}')^2+4F_{12}'^2})}}\\
&a_2=\sqrt{\frac{4(F_{11}'F_{22}'-F_{12}'^2)+F_1'^2F_{22}'-2F_1'F_2'F_{12}'+F_2'^2F_{11}'}{2(F_{11}'F_{22}'-F_{12}'^2)(F_{11}'+F_{22}'+\sqrt{(F_{11}'-F_{22}')^2+4F_{12}'^2})}}
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

取垂直于应力平面的坐标轴为 θ，则平面应力二维强度准则在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$内为一椭圆柱面。当拉压基本强度相等时，其中心轴为 θ 轴。

对于单向受力状态，(13)式为

$$f(\sigma)=F_{11}'\sigma_\theta^2+F_1'\sigma_\theta-1 \tag{22}$$

用材料主方向基本强度表达为

$$\left[\frac{\cos^4\theta}{XX'}+\frac{\sin^4\theta}{YY'}+\left(2F_{12}+\frac{1}{S^2}\right)\cos^2\theta\sin^2\theta\right]\sigma_\theta^2$$

$$+\left[\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{X'}\right)\cos^2\theta+\left(\frac{1}{Y}-\frac{1}{Y'}\right)\sin^2\theta\right]\sigma_\theta=1 \tag{23}$$

这里，X，X'为 x 方向拉压强度；Y，Y'为 y 方向的拉压强度，S 为剪切强度。

若取

$$F_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{XY'}+\frac{1}{X'Y}-\frac{1}{S^2}\right) \tag{24}$$

(23)式为

$$\left(\sigma_\theta-\frac{XY}{X\sin^2\theta+Y\cos^2\theta}\right)\left(\sigma_\theta+\frac{X'Y'}{X'\sin^2\theta+Y'\cos^2\theta}\right)=0 \tag{25}$$

这就是木材受拉压的Hankinson强度准则[6]。反之，(24)式为确定二向应力强度参数F_{12}的一种方法。

三、结　　论

1. 本文由一般强度理论的外凸性，得到应力二次形式强度准则的强度参数限制条

件。该限制条件对于实验测定基本强度参数和验证强度准则的适用性有重要意义。

2. 为了避免做剪切、剪切与拉压偶合等复杂试验，可用偏轴拉压基本强度来确定剪切、剪切与拉压偶合的强度参数。

3. 主应力形式强度准则可化成标准的二次曲面方程，从而给出强度准则在应力空间的几何解释、如椭球面、椭圆抛物面、回转抛物面、椭圆柱面、或圆柱面等。

4. 主应力形式强度准则实用较方便。若材料服从Hankinson强度准则，成为平面应力强度准则的特例，得到一种确定 F_{12} 的方法，它由拉压及剪切基本强度参数按(25)式给出。

5. 以上结论均是在应力空间中讨论的。在应变空间中也可得到相应的结论。

参 考 文 献

[1] Drucker, D.C., On the postulate of stability of material in the mechanics of continua, J.Mecanique 3. (1964) p235.

[2] 刘锡礼，王秉权，复合材料力学基础，北京，中国建筑工业出版社，1984，p36。

[3] Gol denblod I.I, and Kopnov V.A, Criteria of strength and plasticity of constructure materials (in Russion) Moscow 1968.

[4] 徐积善，强度理论及其应用，北京，水力电力出版社，1984，p85。

[5] 王兴业，谢仁华，确定张量多项式强度准则相互作用系数 F_{12} 的一个方法，国防科技大学学报，No.3，1984，p123。

[6] J.Y.Liu, Evaluation of the tensor polynomial strength theory for wood, J.Composite materials, Vol.18, No.3, 1984, p216.

The Strength Theory in a Principl Stress Form and Its Geometric Explanation

Yang Guangsong Huang Ye

Abstract

A set of inequality constraint conditions of the strength parameters is derived from the convexity of the strength criterion, which is expressed in a quadric form in terms of stress components. The constraint conditions can be used to identify the availability of the strength criterion and they are helpful to measure the basic strength parameters. A geometric explanation to the strength criterion is obtained when the strength criterion is expressed in a principl stress form, which is an ellipsoid, such as elliptic, paraboloid, revolutionary paraboloid, elliptic cylinder or cylinder etc.