

## 薄壁加劲结构的有限元分析和优化设计

李云芝

(应用力学系)

**摘要** 本文用有限元素法对集中力作用下的薄壁加劲壳进行应力分析,推导出变轴力杆—受剪板模型的元素刚度矩阵,提出了横向构件和边界约束的处理方法。用满应力法对结构进行综合,在调优过程中,受压应力控制的元件采用“同步”迭代格式,并引入了必要的几何约束,优化结果,重量有明显降低。

## 符号表

$F$ —— 元素节点力向量	$u$ —— 元素节点位移向量
$A$ —— 杆横截面积	$L$ —— 杆长度
$E$ —— 材料弹性模量	$G$ —— 材料剪切模量
$q$ —— 板剪流	$\gamma$ —— 板的剪切变形
$t$ —— 板厚度	$\sigma_b$ —— 材料强度限
$r$ —— 材料比重	$\bar{x}$ —— 节点坐标
$R$ —— 壳体曲率半径	$\bar{y}$ —— 节点坐标
$\sigma_{d1}$ —— 大梁应力	$\sigma_{d2}$ —— 桁条应力
$\tau$ —— 蒙皮中剪应力	

## 一、前言

薄壁加劲壳在弹体结构中占有很大比重。目前,对于这类结构的应力分析,大多数仍采用工程梁理论或剪切滞后理论。虽然用力法或位移法从理论上说可以解决复杂结构的分析问题,但对于高次静不定结构,工作量之大是手工计算无法完成的,为了减少工作量而进行的大量工程简化又将导致分析质量的降低。

随着计算力学、计算数学的发展和电子计算机的广泛应用,对结构进行电算分析并

用优化方法进行结构综合的现代化设计方法已经提到日程上来。

本文用有限元素法分析了薄壁加劲结构集中力扩散的规律,用满应力法进行最小重量设计,这在设计方法的改革中无疑是一次有益的尝试。

## 二、元素刚度矩阵

薄壁加劲板的剪切滞后理论指出,在集中力扩散过程中,加劲件的 内力按线性变化,蒙皮承受的正应力很小,主要承受剪应力,因此,有限元分析时,采用变轴力杆—受剪板模型。

### 1. 结构坐标系下带剪流的变轴力杆元素刚度矩阵

令:结构坐标系为 $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ ,

局部坐标系为 $xyz$ 。

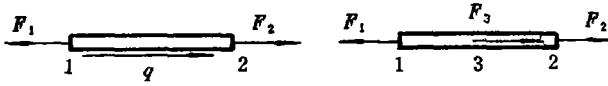


图 1(a)

图 1 示出了局部坐标系下带剪流的自由杆元素,按照直刚法的要求,将剪流的合力 $F_3$ 作用在节点 3 上,用三节点杆元素描述带剪流的杆元素。

$$F_3 = F_1 - F_2 \quad (1)$$

三节点杆元素的刚度方程<sup>[3]</sup>为

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$[K] = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$[K]$ ——变轴力杆元素刚度矩阵。

为了节省内存,简化运算,本文采用高斯消元法对三节点元素刚度矩阵进行静力缩聚,保留 1、2 两节点,消去节点 3,详见文献[1]。

三节点元素刚度方程(2)分块成保留部分和消去部分,分别用注脚 $r$ 和 $c$ 表示,写成如下形式:

$$\begin{Bmatrix} F_r \\ F_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rc} \\ K_{cr} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_c \end{Bmatrix} \quad (4)$$

缩聚后的刚度方程为

$$(K_{rr} - K_{rc}K_{cc}^{-1}K_{cr})u_r = F_r - K_{rc}K_{cc}^{-1}F_c \quad (5)$$

元素刚度矩阵 $[K]_e$ 和载荷列阵 $\{F\}_e$ 分别为:

$$\begin{aligned}
 [K]_e &= (K_{rr} - K_{rc}K_c^{-1}K_{cr}) \\
 &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 \{F\}_e &= F_r - K_{rc}K_c^{-1}F_c \\
 &= F_r + \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{Bmatrix} F_3
 \end{aligned} \tag{7}$$

结构坐标系下变轴力杆元素刚度矩阵  $[\bar{K}]_e$ :

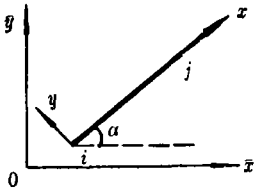


图 1(b)

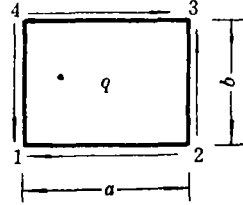


图 2

$$[\bar{K}]_e = [T]^T [K]_e [T] \tag{8}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{\bar{x}_j - \bar{x}_i}{L_{ij}} \quad \sin\alpha = \frac{\bar{y}_j - \bar{y}_i}{L_{ij}}$$

$$L_{ij} = \sqrt{(\bar{x}_j - \bar{x}_i)^2 + (\bar{y}_j - \bar{y}_i)^2}$$

2. 在结构坐标系下矩形受剪板元素的刚度矩阵 (结构坐标系与局部坐标系一致) 由结构力学知, 矩形受剪板的受力与变形可以用广义力  $q$  和广义位移  $\gamma$  来描述, 即

$$q = \frac{Gt}{ab} \gamma \tag{9}$$

按直刚法的要求, 将  $q$  和  $\gamma$  转化为相应的节点力和节点位移。本文采用近似方法将每边剪流的合力平均分配到该边节点上, 板元素的节点力和节点位移如图 3 所示。

其转换公式为

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -a \\ -b \\ -a \\ b \\ a \\ b \\ a \\ -b \end{Bmatrix} q = \frac{1}{2} [W] q \tag{10}$$

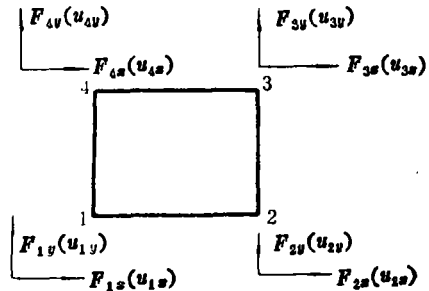


图 3

式中  $\{W\}^T = [-a \ -b \ -a \ b \ a \ b \ a \ -b]$

根据逆步变换原理<sup>[2]</sup>, 有

$$\gamma = \frac{1}{2} \{W\}^T \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ u_{4x} \\ u_{4y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \{W\}^T \{u\} \quad (11)$$

将式(11)、(9)代入式(10), 得

$$\{F\} = \frac{Gt}{4ab} \{W\} \{W\}^T \{u\}$$

受剪板元素刚度矩阵为

$$[K]_e = \frac{Gt}{4ab} \{W\} \{W\}^T \quad (12)$$

### 三、应力计算

#### 1. 杆元素内力计算

求解静力缩聚后的刚度方程(5), 得到缩聚后的杆端力 $\{F\}_e$ , 真正的杆端力 $\{F\}_r$ , 由式(7)求得, 即

$$\{F\}_r = \{F\}_e - \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{Bmatrix} F_3$$

式中,  $F_3 = (q_1 - q_2)L$  (见图4)。

#### 2. 板元素内力计算

将式(11)代入(9), 得板剪流

$$q = \frac{Gt}{2ab} \{W\}^T \{u\} \quad (13)$$

板内剪应力

$$\tau = \frac{q}{t}$$

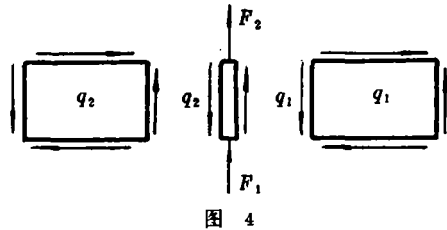


图 4

### 四、满应力法的再设计公式

对加劲壳进行结构综合时, 考虑到骨架中横向构件(框)的截面参数取决于另外的设计情况, 蒙皮的变厚度工艺上难于实现, 因此, 先选定框的截面参数及蒙皮厚度 $t$ , 只优选纵向构件, 调优过程中, 取其横截面积 $A$ 作为设计变量。

基于内力不变假设，再设计公式为：

1. 若杆件被拉应力控制

$$A^{(K+1)} = A^{(K)} \left( \frac{\sigma_{\max}^{+(K)}}{\sigma_b} \right) \quad (14)$$

式中， $A^{(K)}$ ， $A^{(K+1)}$ 分别为第 $K$ 次，第 $(K+1)$ 次杆的面积， $\sigma_{\max}^{+(K)}$ 为第 $K$ 次迭代时，杆在诸设计情况中最大拉应力。

2. 若杆件被压应力控制

采用“同步”迭代格式[3]

$$A^{(K+1)} = \frac{A^{(K)} \cdot \sigma_{\max}^{-(K)}}{\sigma_{KP}^{(K+1)}} \quad (15)$$

式中， $\sigma_{\max}^{-(K)}$ 为第 $K$ 次迭代时，杆在诸设计情况中的最大压应力； $\sigma_{KP}^{(K+1)}$ 是截面为 $A^{(K+1)}$ 的杆所对应的临界应力。

收敛准则为

$$A^{(K+1)} \sigma_{KP}^{(K+1)} - A^{(K)} \cdot \sigma_{\max}^{-(K)} \leq \varepsilon \quad (16)$$

$\varepsilon$  根据精度要求选取。

## 五、举 例

某导弹尾段壳体壁板如图 5 所示，原始数据列于表 1。

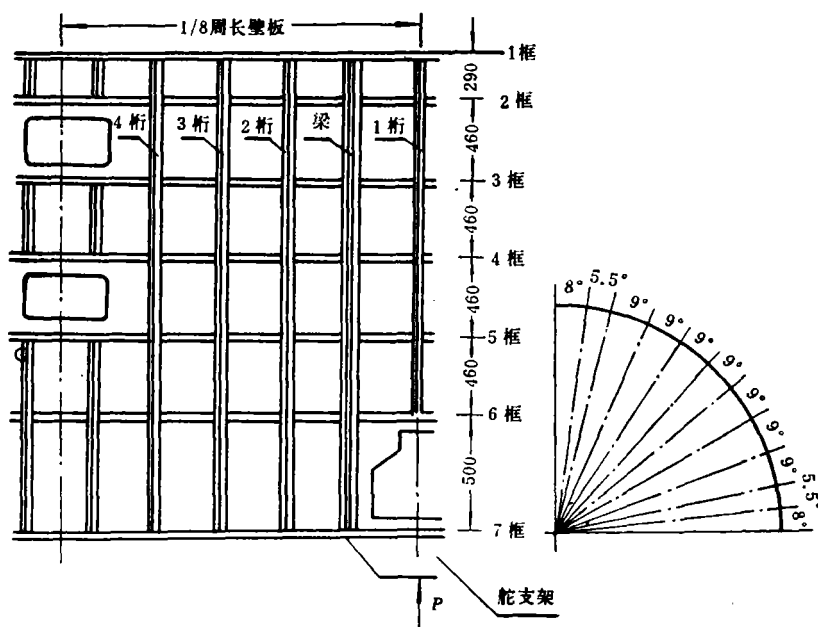


图 5

表 1

构件名称	型材规格	截面积或厚度	材 料	材料性能 kg/mm <sup>2</sup>
大 梁	I 型材	480mm <sup>2</sup>	LC <sub>4</sub>	$E=7200$ , $\sigma_b=56$ $\sigma_{02}=50$ , $G=2600$ $r=0.00274$
1~4 桁	XC141-12	106.1mm <sup>2</sup>	LY12	$E=7200$
1 框	XC115-11	446mm <sup>2</sup>	LY12	$\sigma_b=40$
2~8 框	Z 型 框	238mm <sup>2</sup>	LY12	$\sigma_{02}=30$
5~6 框	Z 型 框	268mm <sup>2</sup>	LY12	$G=2600$
7 框	I 型材	952mm <sup>2</sup>	AD7	$r=0.00274$
蒙皮		1.5mm	LY12	

### 模型简化

由于蒙皮厚度  $t$  大大小于壳体半径  $R$ ，忽略曲率影响将壳体展开成平板；认为框的横向拉伸刚度无限大，壁板两侧节点无水平位移，1 框与前舱段对接，框上节点无垂直位移，边界约束简化为铰座；框与蒙皮间为一种铆接形式，所有横向构件只取被铆钉固定的缘板部分计入模型。

通过上述简化，计算模型如图 6 示。

### 结果分析

对于该壁板模型，我们用有限元法计算了纵向构件（大梁和桁条）及蒙皮中的应力分布，并与剪切滞后理论的解析解进行了比较。

图 7、图 8 分别示出了大梁应力  $\sigma_{ai}$  和大梁附近蒙皮剪应力  $\tau$  的变化规律。

有限元解 I（模型中各构件参数按初始值），根部两跨以下， $\sigma_{ai}$  的分布规律与解析解相差较大。

有限元解 II（模型中 1~7 框的横截面积全部取为  $1\text{mm}^2$ ）， $\sigma_{ai}$  的分布规律与解析解基本吻合，但数值偏高。

当  $F_{1\text{框}}=100\text{mm}^2$ ， $F_{2\text{框}}\sim F_{6\text{框}}=40\sim 60\text{mm}^2$ ， $F_{7\text{框}}=100\text{mm}^2$  时，有限元解和解析解吻合最好。大量计算的统计结果表明，横向构件按被铆钉固定的局部截面计入模型为宜。

图 9 给出了  $\sigma_{h11}\sim\sigma_{h14}$  的分布曲线及解析解中代换单桁条的应力曲线。很明显，数

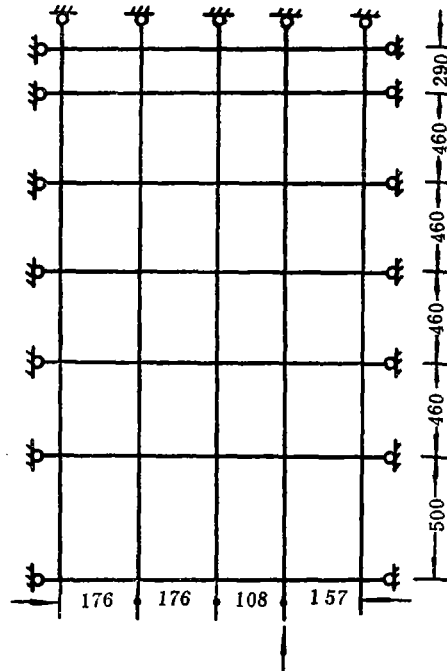


图 6

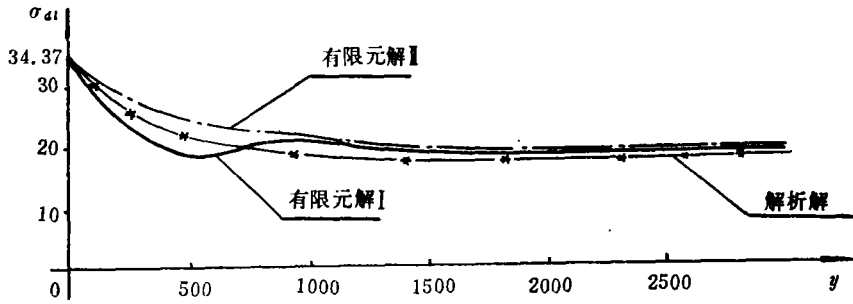


图 7

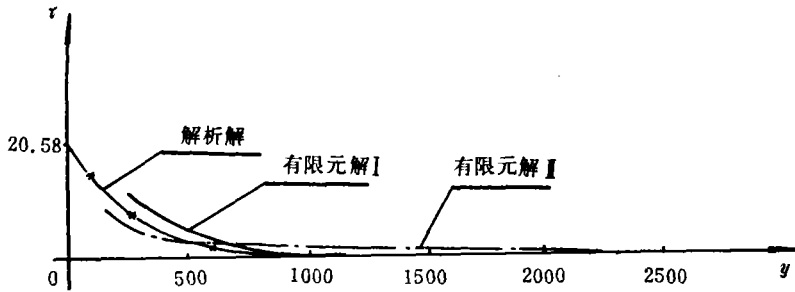


图 8

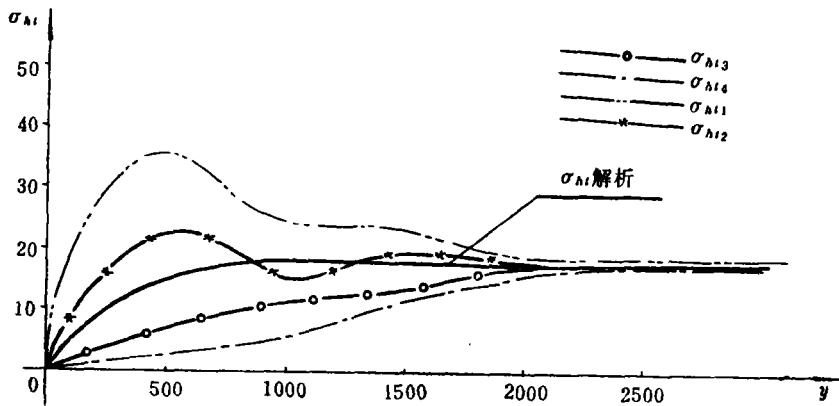


图 9

值上差异很大,这是因为代换单桁板的解析解虽然能够给出大梁及大梁附近蒙皮的真实应力,但对于桁条却只能给出各桁条应力的平均值。有限元解能给出每根桁条中应力的分布规律,这对于构件应力的理论分析及构件的优化设计是十分有利的。

#### 优化设计结果

在壁板有限元分析的基础上,用满应力法对构件进行最小重量设计,结果见表 2。

在工程实践中,只有大梁做成变截面的,桁条取等截面型材,因此,桁条截面积应取该根桁条各段截面的最大值,经过工程处理后的设计方案及各元件最大应力比 $\beta_{max}$ 列于表3。

原结构重量为17.317公斤,优化结构重量为15.36公斤,重量减轻了11.3%,如果型材规格能够较连续地给出,减重效果将会更好。

表 2

截面面积 (mm <sup>2</sup> ) 框距(mm)	构件名称				
	大梁	桁 1	桁 2	桁 3	桁 4
0~500	483	51.7	77.1	37.2	35.2
500~960	318	51.7	77.1	51.7	51.7
960~1420	318	29.2	63.4	51.7	63.4
1420~1880	246.2	29.2	63.4	63.4	63.4
1880~2340	246.2	29.2	51.7	63.4	51.7
2340~2630	316	29.2	51.7	51.7	51.7

表 3

截面面积 (mm <sup>2</sup> ) 框距(mm)	构件名称				
	大梁	1 桁	2 桁	3 桁	4 桁
0~500	483	51.7	77.1	63.4	63.4
500~960	318	51.7	77.1	63.4	63.4
960~1420	318	51.7	77.1	63.4	63.4
1420~1880	246.2	51.7	77.1	63.4	63.4
1880~2340	246.2	51.7	77.1	63.4	63.4
2340~2630	318	51.7	77.1	63.4	63.4
$B_{max}$	0.942	1.122	0.964	1.09	1.055

## 六、结 论

通过上述计算分析,可得如下结论:

1. 利用变轴力杆—受剪板模型对集中力作用下的薄壁加劲壳进行有限元分析是可行的, $\sigma_{di}$ 、 $\tau$ 的分布规律与解析解吻合,并能给出各桁条中的应力分布曲线。
2. 用满应力法调优结果,可使结构重量有明显降低。
3. 受压应力控制的构件,采用“同步”迭代格式进行再设计,可以保证收敛。



## 参 考 文 献

- [1] J.S.普齐米尼斯基, 矩阵结构分析理论, 国防工业出版社, 1975。  
[2] 谢贻权, 何福保, 弹性和塑性力学中的有限单元法, 机械工业出版社。  
[3] 国营长江机械厂科技情报室, 长江科技(设计专辑), 1978, 第一期。

## The Finite Element Analysis and Optimal Design for the Thin Wall Stiffening Shell

Li Yunzhi

### Abstract

In this paper, the thin wall stiffening shell is analysed by means of the finite element method, the element stiffness matrix of the bar with the variable axial force is derived, and the method dealing with cross-elements and boundary restraint is presented.

The structure is synthesized by means of the full stress method. The pattern of the "synchronized" iteration is used in process of optimization for the elements that are controlled by the pressure stress. At the same time, the necessary geometrical restraint is introduced. The conclusion indicates that the weight for optimized structure is obviously reduced.