

用多点随机激励进行结构模态试验分析

黄映云 刘瑞岩

(应用力学系)

摘 要 本文利用通用仪器设备和微型机采用多点随机激励法对某导弹进行了试验模态分析,并与单点随机激励和稳态正弦调模的结果进行了比较。同时对Bendat公式进行了新的解释和推导。

一、引 言

结构试验模态分析是结构振动试验分析技术的重要研究领域之一。试验模态分析目前主要分为两种方法:一是单点宽频带激励、频率响应函数法,另一是多点正弦主模态调谐法。前一种方法具有试验周期短、简便、经济等特点,对简单典型结构可得到良好的结果。但是对大型复杂结构,由于激励能量的耗散,使得单点激励能量的分布显著不均匀,因而振动的大小各处差异较大,特别对大阻尼结构更是如此。这样激振力难以达到要求,激振力太小不易激出各阶模态;太大又会引起局部严重的非线性。另外,如果激振点与某阶振型节点相重或接近,就不可能激出该阶模态,因而就会漏掉某些模态,这在复杂结构上尤为突出。因此,在航空、航天技术中大多采用多输入正弦主模态调谐法,它是一种传统的模态试验方法,具有概念清晰、结果直观、置信度高等优点。然而,这种方法的最大缺点是费时费事,试验设备复杂昂贵,且与试验人员的经验和技艺有关。

为寻找一种综合上述优点的方法,有人曾进行了一些探讨^{[1][2]}。本文的目的是研究在一般的试验设备和分析条件下进行多点宽频带激励、频率响应函数法在大型复杂结构模态试验中的适用性。为此,对某一战术导弹进行了横向弯曲模态试验。实践证明,这种方法较好地综合了单点宽频带激励和多点稳态正弦调谐法的各自优点,试验操作简单迅速,信噪比高,可靠性强,对激振系统要求低,成本廉。另外,它还为以后的模态参数识别提供了有用的重复信息,便于处理和分析。这一方法特别适用于大型复杂结构的

模态试验。本文试验所用的仪器设备都是简单通用的，而频响函数的分析和参数识别是在TRS—80微型机上实现的。

二、多输入频率响应函数计算

假定结构为定常线性系统，有 q 个平稳随机信号 X_1, X_2, \dots, X_q 作用于系统，因而该系统的输出也是平稳随机过程。取其中一代表性输出为 Y ，如图 1 所示。

考虑到输出噪声 N 的影响时，其输出

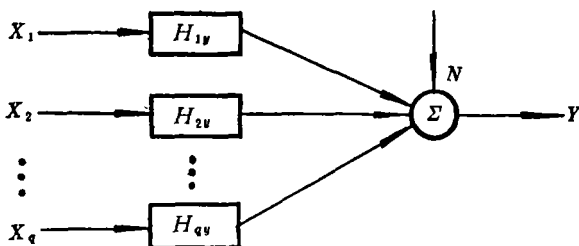


图 1 原始多输入单输出系统理论模型

$$Y = \sum_{i=1}^q X_i H_{iy} + N \quad (1)$$

在上式两端前乘以第 j 个输入 X_j 的复共轭 X_j^* ，并取其数学期望，根据功率谱定义得到

$$S_{jy} = \sum_{i=1}^q H_{iy} S_{ji} \quad j=1, 2, \dots, q \quad (2)$$

上式推导中假定了输入与噪声 N 互不相关。(2) 式的矩阵形式为

$$\begin{Bmatrix} S_{1y} \\ S_{2y} \\ \vdots \\ S_{qy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1q} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{q1} & S_{q2} & \dots & S_{qq} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} H_{1y} \\ H_{2y} \\ \vdots \\ H_{qy} \end{Bmatrix}$$

或 $\{S_{jy}\} = [S_{ji}] \{H_{iy}\} \quad (3)$

因而 $\{H_{iy}\} = [S_{ji}]^{-1} \{S_{jy}\} \quad (4)$

(4) 式说明，当输入为平稳随机信号时，频响函数可通过通常的功率谱计算和矩阵求逆得到。

Bendat 在文献 [3] 中推荐了一个避免复杂的矩阵运算而采用递推公式计算频响函数及重相干函数等的比较有效的算法，其步骤是：

1) 用一组有序的条件输入记录代替原始的已知记录，这样就得到替代图 1 的另一模型，如图 2 所示。图中所示次序的条件输入的 Fourier 变换记为 $\{X_{i, (i-1)!}\}$ ($i=1, 2, \dots, q$)，它表示用最小二乘法从 X_i 中去掉了 X_1 到 X_{i-1} 的线性影响后在前面 X_1, X_2, \dots, X_{i-1} 条件下的 X_i 。因此这些有序条件输入记录将是两两互不相关的。图中的 $\{L_{iy}\}$ 代表一组频响函数，对任何 i ，项 L_{iy} 表示由 $X_{i, (i-1)!}$ 预测

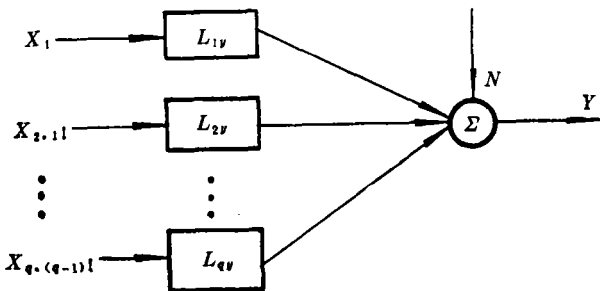


图 2 条件多输入单输出系统理论模型

Y 的最优线性系统。

2) 建立条件输入中 $X_{i,(i-1)!}$ 与原始输入中 X_i 之间的关系, 将原始多输入模型转化为条件多输入模型。

3) 在条件输入模型下计算 $\{L_{iy}\}$ 。

4) 推导 $\{L_{iy}\}$ 系统与 $\{H_{iy}\}$ 系统之间的关系, 由 $\{L_{iy}\}$ 求解 $\{H_{iy}\}$ 。

按照上述步骤, 将文献[3]中的一些主要公式简列如下:

计算有序条件输入记录 Fourier 变换的迭代算式为

$$X_{j,r+1} = X_{j,r,(r-1)!} - L_{rj} \cdot X_{r,(r-1)!} \quad (5)$$

式中

$$L_{ij} = \frac{S_{ij,(i-1)!}}{S_{ii,(i-1)!}} \quad i, j = 1, 2, \dots, q, q+1; j \geq i \quad (6)$$

其中条件功率谱密度函数是

$$S_{ij,r+1} = S_{ij,r,(r-1)!} - L_{rj} S_{ir,(r-1)!} \quad (7)$$

(6) 式与 (7) 式构成了由原始功率谱密度函数计算条件输入模型中 L_{ij} 的循环递推公式。

由 $\{L_{iy}\}$ 确定 $\{H_{iy}\}$ 的递推算式是

$$\left. \begin{aligned} H_{qy} &= L_{qy} \\ H_{iy} &= L_{iy} - \sum_{j=i+1}^q L_{ij} H_{jy} \quad i = q-1, q-2, \dots, 1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

以上各步物理意义明确, 避免了繁琐的复数矩阵求逆。

本文从另一角度, 利用列主元 Gauss 消去法推导了所需计算公式。为方便计, 不妨取 $i=1, 2, 3$ 的三个输入和输出为 y 的线性定常系统进行推演。根据 (2) 式写出

$$S_{1y} = H_{1y} S_{11} + H_{2y} S_{12} + H_{3y} S_{13} \quad (9)$$

$$S_{2y} = H_{1y} S_{21} + H_{2y} S_{22} + H_{3y} S_{23} \quad (10)$$

$$S_{3y} = H_{1y} S_{31} + H_{2y} S_{32} + H_{3y} S_{33} \quad (11)$$

在试验中, 由于输入之间不相干或相干较小, 因而从数值上说 S_{11}, S_{22}, S_{33} 等自谱一般要比 S_{12}, S_{13}, S_{23} 等互谱大得多, 并且, 对于如纯随机这样的信号在所研究的频率上自谱都比较平坦, 不会出现特别小的值。因此, 列主元总是在 $[S_{ij}]$ 的对角元素上, 于是记:

$$L_{1y} = \frac{S_{1y}}{S_{11}}, \quad L_{12} = \frac{S_{12}}{S_{11}}, \quad L_{13} = \frac{S_{13}}{S_{11}}$$

(9) 式两端除以 S_{11} 得

$$L_{1y} = H_{1y} + L_{12} H_{2y} + L_{13} H_{3y} \quad (12)$$

由上式消去 (10) 和 (11) 式中的未知元 H_{1y} 得

$$S_{2y} - S_{21} L_{1y} = H_{2y} (S_{22} - S_{21} L_{12}) + H_{3y} (S_{23} - S_{21} L_{13})$$

$$S_{3y} - S_{31} L_{1y} = H_{2y} (S_{32} - S_{31} L_{12}) + H_{3y} (S_{33} - S_{31} L_{13})$$

记 $S_{i,j-1} = S_{ij} - S_{i1} \cdot L_{1j} \quad (i=2, 3, j=2, 3, y)$

于是上两式简记为

$$S_{2y,1!} = H_{2y} S_{22,1!} + H_{3y} S_{23,1!} \quad (13)$$

$$S_{3y \cdot 1!} = H_{2y} S_{32 \cdot 1!} + H_{3y} S_{33 \cdot 1!} \quad (14)$$

依次, 同样可消去(13)和(14)式中的未知元 H_{2y} , 则得

$$L_{2y} = H_{2y} + H_{3y} L_{23} \quad (15)$$

和

$$S_{3y \cdot 1!} - L_{2y} S_{32 \cdot 1!} = H_{3y} (S_{33 \cdot 1!} - L_{23} S_{32 \cdot 1!})$$

式中 $L_{2y} = \frac{S_{2y \cdot 1!}}{S_{22 \cdot 1!}}$, $L_{23} = \frac{S_{23 \cdot 1!}}{S_{22 \cdot 1!}}$ 。记 $S_{ij \cdot 2!} = S_{ij \cdot 1!} - L_{2j} S_{i2 \cdot 1!}$ ($i=3, j=3, y$), 上式可写成

$$S_{3y \cdot 2!} = H_{3y} \cdot S_{33 \cdot 2!}$$

令 $L_{3y} = \frac{S_{3y \cdot 2!}}{S_{33 \cdot 2!}}$, 于是有

$$H_{3y} = L_{3y} \quad (16)$$

由(12)、(15)和(16)式可直接逆代得

$$\left. \begin{aligned} H_{3y} &= L_{3y} \\ H_{2y} &= L_{2y} - L_{23} H_{3y} \\ H_{1y} &= L_{1y} - L_{12} H_{2y} - L_{13} H_{3y} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

由此可见, Bendat所推荐的算法在一定条件下实质上就是通常的 Gauss 列主元消去法。

为提供所有已知输入与输出之间的线性相关特性, 估计噪声对输出的影响, 衡量试验质量和结果的可靠性, 可用重相干函数 $r_{y;x}^2$ 来代替常相干函数, 其计算公式为^[3]

$$r_{y;x}^2 = 1 - \prod_{i=1}^q (1 - r_{i \cdot (i-1)!}^2) \quad (18)$$

其中, 偏相干函数的计算公式为

$$r_{i \cdot (i-1)!}^2 = \frac{|S_{iy \cdot (i-1)!}|^2}{S_{i \cdot (i-1)!} S_{yy \cdot (i-1)!}} \quad (19)$$

三、试验测试与频响分析

为了从试验上探讨多输入随机激励模态识别方法, 本文对某战术导弹进行了三点随机信号激励(2、3、5点)的横向振动模态试验, 如图3所示。加速度响应测点共5个(1、2、3、4、5点)。

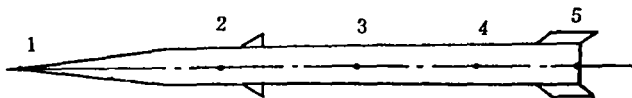


图3 激励点和响应点布置简图

为模拟导弹的自由飞行状态, 应使悬吊系统的固有频率远小于导弹的一阶固有频率。

激振力大小的控制依各测点的响应比较均匀为准则, 且应做相干性检查。只要使它们之间的常相干系数不接近于1即可, 图4示出2点与5点激振力的常相干函数。

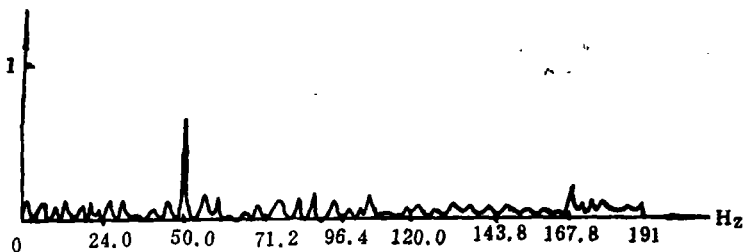


图 4 2 与 5 点激振力的常相干函数

为提高利用通用仪器设备进行激励和响应信号的采集、处理和分析的能力和质
量，在试验中充分利用了磁带机的功能，详见文献[4]。

为进行比较，我们在导弹第 3 点上用单点随机激励进行了试验分析，结果表明结构的
响应很不均匀。以 3 和 4 两相邻点为例，各自响应的自功率谱值相差很大，特别是在
高频部分有的相差 2~3 个数量级(见图 5)。这一方面是由于非线性和测量噪声所致；
另一方面可以看到，激振点 2 正处于该导弹第 2 阶振型的节点附近(第 2 阶固有频率为
66Hz)，因而很难激励出该阶模态，也易于漏掉若干个模态。

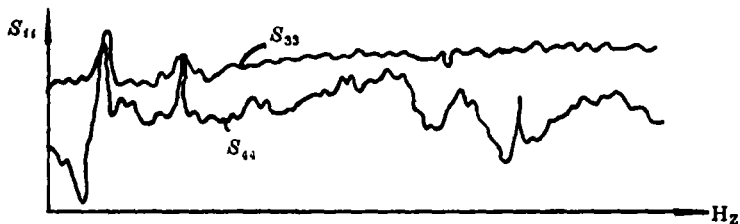
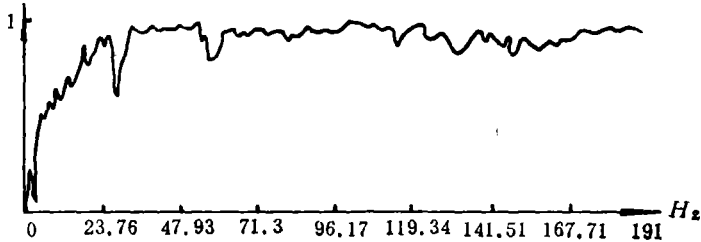


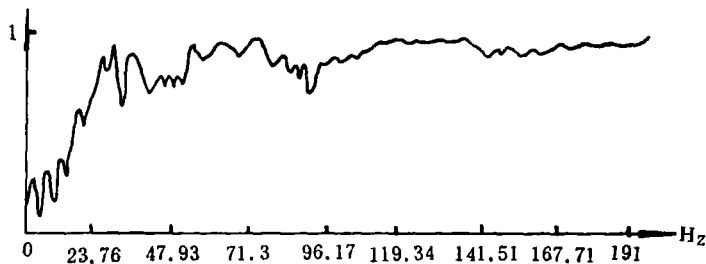
图 5 单点激励时，8 点和 4 点的响应自谱

由于多输入随机激
励法使整个结构响应趋
于均匀，因而使信噪比
大大提高，图 6 示出导
弹中部(第 4 点)和头
部(第 1 点)的重相干
函数，结果表明，各点
的试验质量是较好的，
与单输入时相比，信噪
比得到了很大的改善。
如果进一步提高频率分
辨率，低频部分的相干
值还可以增大。

图 7 利用双对数座
标描绘了用 Bendat 递推
公式计算出来的两幅试
验频响函数幅频特性曲



(a) 第 4 点



(b) 第 1 点

图 6 响应点的重相干函数

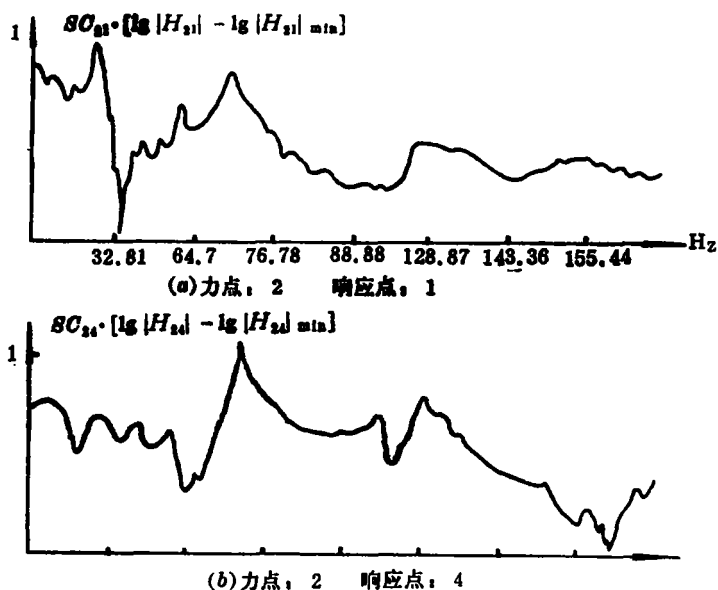


图 7 试验频响应函数幅频特性

线，图中纵坐标用归 1 对数坐标，其中

$$SC_{ij} = \frac{1}{[10\lg(|H_{ij}|)_{\max} - \lg(|H_{ij}|)_{\min}]}$$

采用多点激励会产生比单点激励较多的重复信息，可弥补单一信息可能存在的某些欠缺，并能将同一参数的不同估计用优化方法处理成该参数的最佳估计，提高识别精度。

获得了频响应函数后，可采用各种频域模态参数识别方法进一步识别出结构的模态参数。本文应用作者所提出的组合频率响应函数法^[5]识别出该导弹的前三阶模态参数。表 1 列出了该识别结果与多点稳态正弦激励法所得的结果，两种试验方法所得结果基本一致。阻尼值由于后者分散性较大，表中未列出。

表 1 导弹结构模态试验识别结果

试验方法	第一阶		第二阶		第三阶	
	频率	阻尼比	频率	阻尼比	频率	阻尼比
三点随机	29.00	0.018	67.02	0.021	117.68	0.048
稳态正弦	28.1	/	65.1	/	112	/

振型的识别采用的是文献^[6]所推荐的所谓模态标量因子 (MSF) 方法，识别结果列于表 2 中。与多点稳态正弦激励所测振型一致。

表 2 导弹结构振型识别结果

测 点	1	2	3	4	5
第一阶模态	1	-0.142	-0.630	-0.502	0.481
第二阶模态	1	-0.600	0.024	0.194	-0.175
第三阶模态	1	-0.255	0.629	0.186	-0.044

四、结 论

多输入宽频带随机模态试验技术在大、中型复杂结构的模态试验中具有以下几个特点:

- (1) 试验操作简便, 试验周期短, 费用较少。
 - (2) 对于大型复杂组合结构, 特别是对于振动能量耗损较大的结构, 多输入会使结构的响应趋于均匀, 从而提高信噪比, 改善试验质量。
 - (3) 多输入激振减小了“漏”模态的可能性。
 - (4) 能方便地为以后的模态参数识别提供有用的重复信息。
 - (5) 对激振系统的性能无严格要求, 但相应增加了对数据处理分析系统的要求。
- 我们认为, 这一试验技术可以在工程实际中推广应用。

参 考 文 献

- [1] Richardson, M. & Kniskern, J., Identifying Modes of Large Structures from Multiple Input and Response Measurements, SAE Paper, 760875.
- [2] Allemang, R.J., Rost, R.W. and Brown, D.L., Dual Input Estimation of Frequency Response Function for Automotive Structures, SAE Paper, 820193.
- [3] 贝达特, J.S., 皮尔索, A.G., 相关分析和谱分析的工程应用, 凌福根译, 国防工业出版社, 1983.5.
- [4] 黄映云, 振动试验中磁带机的应用几例, 1985.1.
- [5] 刘瑞岩, 黄映云, 解析分离模态的新方法——组合频率响应函数法, 国防科技大学学报, 第4期, 1986.
- [6] Allemang, R.J. and Brown, D.L., A Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis. Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference, Nov. 8-10, 1982.

The Experimental Analysis of a Structure Model by Multipoint Random Excitation Method

Huang Yingyun Liu Ruiyan

Abstract

The experimental analysis of a missile is made with the multipoint random excitation method by using general instrument and microcomputer in this paper. The results are compared with that of single-point random excitation method and stable input sine dwell method. A new explanation and a new derivation of Bendat's formula is given.