

湍流射流的数值计算

贾少波

(应用力学系)

摘要 本文用改进的 $K-\varepsilon$ 模型对轴对称湍流射流进行了研究。流场的平均量和脉动量均与实验数据进行了对比。计算结果表明该模型可用于一般工程计算。

一、引言

自由射流作为自由剪切流动的形式之一,受到广泛深入的研究。这不仅仅是因为它能使流动方程大大简化,成为认识复杂流动的起点,而且这种流动本身亦有实际工程意义。许多发生在工程设备中的流动,如喷气发动机,火箭发动机,工业炉,烟囱以及海底排污等都可以抽象成为自由射流问题来研究。本文用 PHOENICS^[1] 程序对流入静止环境的柱形湍流射流进行了计算,并与实验数据进行了对比。结果表明,本文介绍的湍流模型能够真实地预测轴对称射流问题,在一般工程计算中可取得满意的结果。

二、控制方程

流入静止环境的圆柱形射流可以看作二维轴对称不可压的稳定流动。根据边界层假设,忽略主流方向上的粘性扩散作用,且流场参数沿流动方向的变化与垂直该方向上的变化相比为小量。在高雷诺数*情况下,分子粘性项可以忽略。控制方程的最终形式如下:

• 连续方程

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} = 0 \quad (1)$$

• 动量方程

本文1986年2月20日收到

* 本文中雷诺数 $Re = 10^5$.

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u' v') \quad (2)$$

其中 x 为主流方向； r 为垂直与主流的方向； U 、 V 分别是这两个方向上的平均速度； u' 、 v' 分别是 U 、 V 的脉动分量。

三、湍流模型

为了使上述控制方程组封闭，需要建立含有雷诺应力 ($-\overline{\rho u' v'}$) 的补充关系式。Spalding 和 Launder^[2] 提出的 K - ε 两方程模型如下：

雷诺切应力

$$-\overline{u' v'} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial r} \quad (3)$$

湍流粘性系数

$$\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho} = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \quad (4)$$

湍流动能

$$U \frac{\partial K}{\partial x} + V \frac{\partial K}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \nu_t \frac{\partial K}{\partial r} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 - \varepsilon \quad (5)$$

湍流动能耗散率

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \nu_t \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + C_1 \nu_t \frac{\varepsilon}{K} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 - C_2 \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (6)$$

方程(4)–(6)中出现的实验系数取值如表 1。

表 1 K - ε 模型中的常数

C_μ	σ_k	σ_ε	C_1	C_2
0.09	1.0	1.314	1.44	1.92

以上模型与方程(1)、(2)构成封闭方程组已成功地应用于多种边界层流动。但是用表 1 给出的一组常数却不能正确计算轴对称射流问题。在 Rodi^[3] 的研究基础上，Launder 和 Spalding 提出了如下改进方案：

$$C_\mu = 0.09 - 0.04f \quad (7)$$

$$C_2 = 1.92 - 0.0667f \quad (8)$$

其中

$$f = \left| \frac{r_\infty}{2U_c} \left(\frac{\partial U_c}{\partial x} - \left| \frac{\partial U_c}{\partial x} \right| \right) \right|^{0.2} \quad (9)$$

r_∞ 是射流宽度， U_c 是位于射流中心的速度。在计算中发现把(7)式中的系数 0.04 改为 0.0355 可以得出更接近于实验数据的结果。

四、关于数值计算

以上给出的湍流模型用PHOENICS程序在Perkin-Elmer3220小型计算机上进行了数值求解。数值求解的步骤如下：

(1) 控制方程的标准化

将微分方程整理成标准形式，常可使问题变得简洁方便。设 ϕ 为待求的因变量，则对于本文所讨论的流动可写出如下形式的控制方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}(U\phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(Vr\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(\Gamma_\phi r \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) = S_\phi \quad (10)$$

方程左边表示 ϕ 的对流和扩散， Γ_ϕ 是 ϕ 的扩散系数， S_ϕ 表示除对流和扩散以外的其它各项，是方程的源。于是当 ϕ ， Γ_ϕ 和 S_ϕ 取不同组合时，就可得到上节给出的封闭方程组（见表2）。

表2 控制方程中的变量，扩散系数和源

方 程	变 量	ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
连续方程		1	0	0
动量方程		U	ν_t	0
K 方程		K	ν_t/σ_K	$\nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2 - \epsilon$
ϵ 方程		ϵ	ν_t/σ_ϵ	$C_1 \frac{\epsilon}{K} \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2 - C_2 \frac{\epsilon^2}{K}$

(2) 微分方程的离散

由于问题的轴对称特点，只需在 $r-x$ 平面内取射流的一半进行计算。网格的布置及射流出口的几何参数示于图1。图中围绕结点 P 的体积元在周向上具有单位厚度，它的四个相邻结点分别以 E 、 W 、 N 、 S 表示。在一定的分布假设下，将方程(10)在体积元上

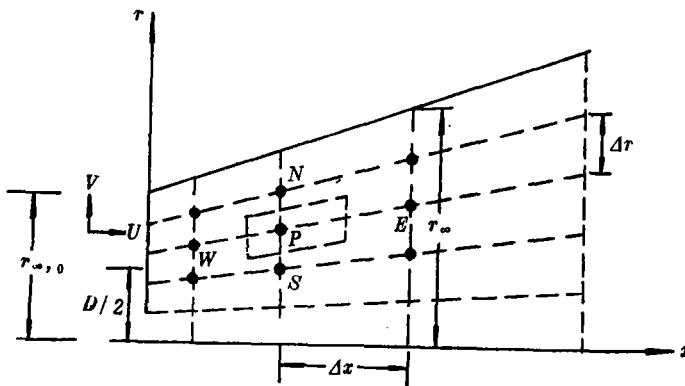


图1 计算域

进行积分, 就得到包含结点 P 及其所有相邻点处 ϕ 值的代数方程。这就是 PHOENICS 程序中建立和求解的离散方程, 它的最终形式为

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (11)$$

其中各相邻点值的系数 a_E, a_W, a_N, a_S , 反映各邻点 ϕ 值通过控制面, 对 P 点 ϕ 值的对流和扩散影响, 同时也与离散格式有关。 a_P 和 b 则分别由下式给出:

$$\begin{aligned} a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S - S_P \Delta \tau \\ b &= S_C \Delta \tau \end{aligned}$$

其中 $\Delta \tau$ 为体积元的体积, S_C 和 S_P 则是由于对源项 S_ϕ 作如下线性化处理得到的:

$$S_\phi = S_C + S_P \phi_P$$

显然, 离散方程(11)只是一个形状上的线性方程, 它在本质上是非线性的。

(3) 离散方程的求解

对计算域内所有结点建立离散方程, 就得到一组包含所有结点参数在内的代数方程组。直接求解这样一组非线性方程, 显然是复杂和不经济的。因此采用了逐线推进迭代的求解方案。由于流动的抛物型特点, 当前步上的流动只受上游参数的影响。只要从射流出口处开始, 逐步向下游推进, 则在每一步上各结点参数可由三对角矩阵法(TDMA)求出。当迭代计算沿流动方向扫过整个计算域时, 就得到了全场各参数的分布。

(4) 计算域和边界条件

本计算域采用了变宽度域和变步长网格布置。计算步长由下式给出:

$$\Delta x = 0.025 r_\infty \quad (12)$$

其中 r_∞ 为当前步对应的计算域宽度。该值由下式计算:

$$r_\infty = r_{\infty,0} + 0.25x \quad (13)$$

其中 $r_{\infty,0}$ 为入口处计算域宽度。边界条件如下:

$$\begin{aligned} x = x_0 \text{ 处} \quad U &= U_0 \\ V &= 0 \\ K &= K_0 = 1.5 \times 10^{-6} \times U_0^2 \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 = \frac{0.09^{3/4} K_0^{3/2}}{0.07 D} \end{aligned}$$

$$r = r_\infty \text{ 处} \quad U_\infty = V_\infty = K_\infty = \varepsilon_\infty = 0$$

其中 D 是射流的初始直径。所有计算结果均整理成无量纲的形式, 因而 U_0 和 D 的取值大小并不十分重要。

五、结果与讨论

自相似性是射流的重要特征之一。它是指用一个速度尺度和一个长度尺度就足以表征流场的性质。一般地, 把射流中心速度 U_c 和射流半宽度 $r_{0.5}$ 选为特征尺度。文献[4]表明, 自由射流的平均量从距射流出口 $20D$ 的下游起就已达到了自相似, 而其湍流脉动参数则从大约 $70D$ 的下游处起达到完全的自相似。据此, 本文的计算结果均在 $x > 70D$ 的下游选取, 以便与已知实验数据进行比较。

文献[4], [5]报告的实验数据, 包括射流扩张率, 中心速度沿 x 方向的变化, 截面上的速度分部, 湍流动能分布及剪应力分布, 均与本文的计算结果进行了比较。

图 2 给出了无量纲化的湍流动能沿中心线的变化。可以看出在 $x/D > 70$ 处, 流动达到了自相似。

图 3 对射流扩张率的计算值与实验值进行了比较。由图可见, $r_{0.5}/x = 0.086$ 的实验结果在计算中得到了正确的预测。

图 4 对比了中心速度 U_c 沿 x 方向的变化。文献[5]的实验结果与文献[4]的实验结果相比, 在 $x/D = 60$ 处出现了一个突跃。在进行新的测量之前, 还无法判断哪个实验数据更准确。从以上图中还可以看出, 反映自相似规律的线性分布已正确地由计算结果给出。

图 5 给出射流截面上的平均速度分布, 与实验数据吻合极好。

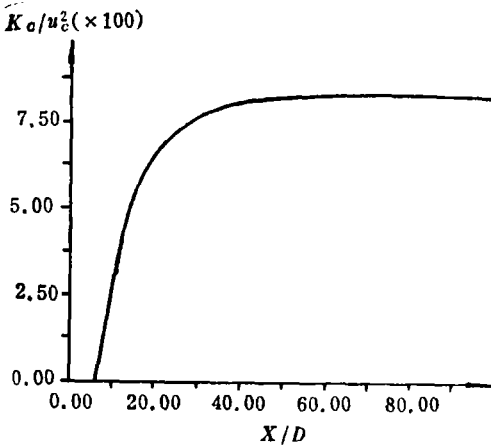


图 2 动能沿轴向的变化

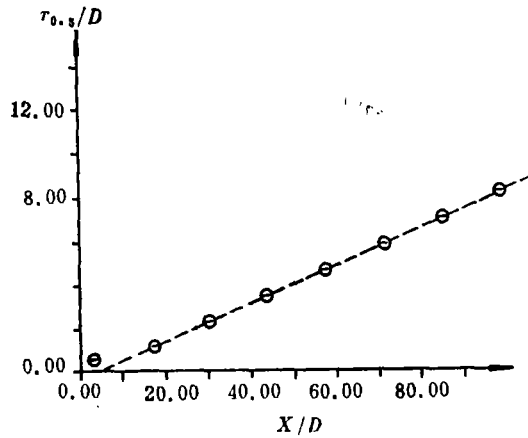


图 3 射流扩散率
 θ 计算结果 --- 文献[5]

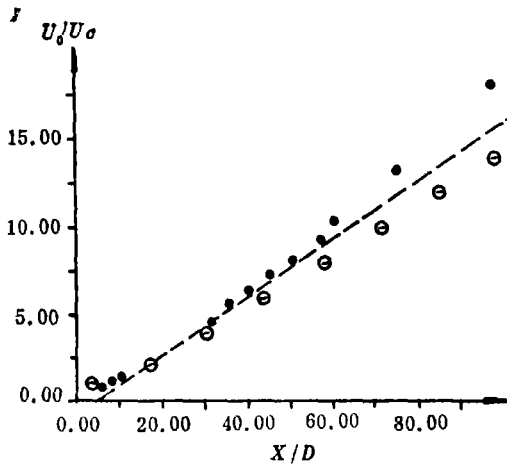


图 4 中心速度 U_c 沿 x 方向的变化
 θ 计算结果 --- 文献[5] ... 文献[4]

图6给出截面上湍动能的分布。据报告分析,文献[4]所用X型热线测量仪在测量脉动量时可引起25%的误差。而文献[5]采用了新的信号分析方法,所以数据更为可靠。本文的计算结果与[5]数据较接近,其吻合程度在工程上也是可取的。与平面射流不同的是,圆柱射流的湍动能在中心处没有显著减小的趋势。这说明平均速度场在中心区对湍动能有较大的影响。圆柱形流场表面积与容积之比通常较平面射流为大,因而其中心速度下降也较快。

图7给出截面上的湍流切应力分布。在 $r/r_{0.5} \approx 0.7$ 处平均速度具有较大的梯度,使切应力达到最大。计算结果正确地反映了这一特性。从图中还可以看出,在离中心区较远处,计算结果比实验数据偏低大约11%。这可能是由于在动量方程中略去湍流正应力项 $-\overline{u'u'}$, $-\overline{v'v'}$ 而造成的。

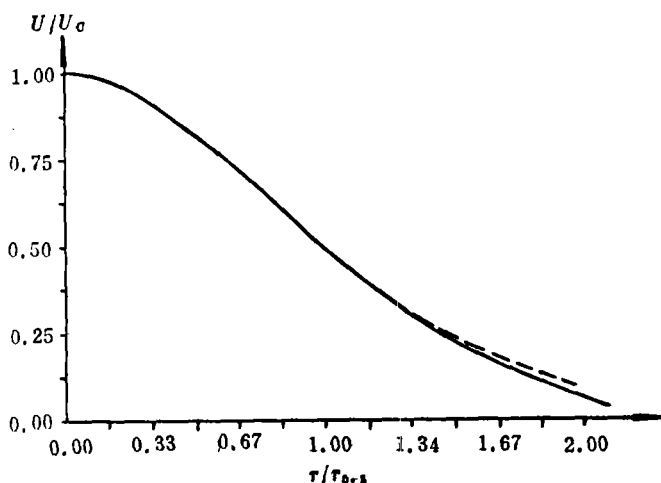


图5 截面上的平均速度分布($x/D > 70$)
—— 计算结果 --- 文献[4]

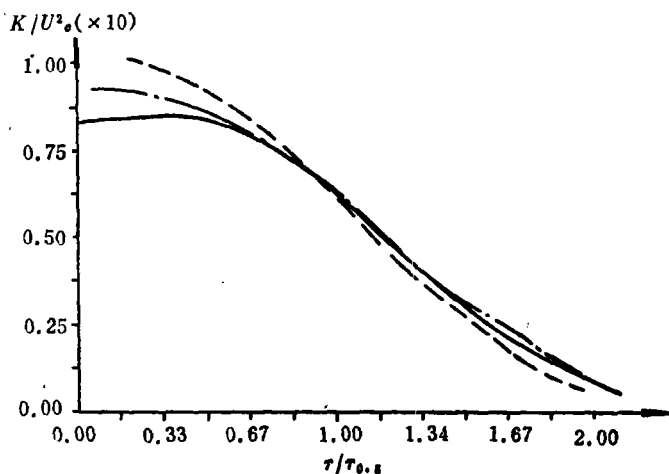


图6 截面上的湍动能分布($x/D > 70$)
—— 计算结果 --- 文献[4] -.- 文献[5]

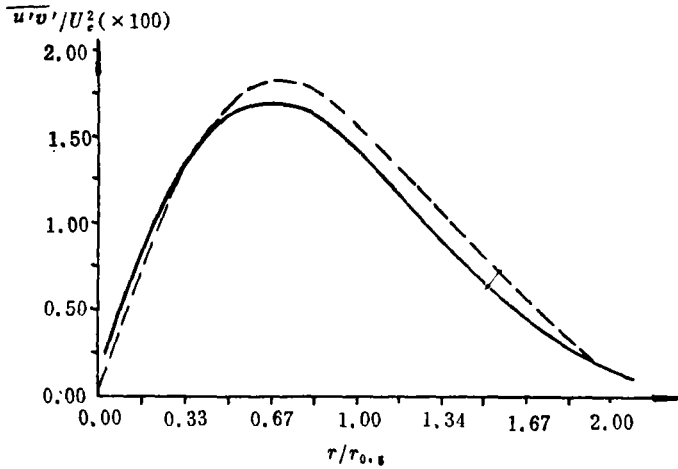


图7 截面上湍流切应力分布 $x/D > 70$
 —— 计算结果 --- 文献[5]

最后, 用表1给出的系数及以上模型在同一问题上也进行了计算, 并将计算结果列于表2。显然, 在对 C_μ , C_2 不加改进的情况下, 数值计算可能引起高达35%的误差。

表2 C_μ , C_2 对计算果结的影响

物 理 量	$K-\epsilon$ 模型	$K-\epsilon$ 模型	实验数据
	$C_\mu, C_2 = \text{常数}$	C_μ, C_2 改进	
$\partial r_{0.5} / \partial x$	0.117	0.086	0.086
Kc/U_c^2	0.102	0.083	0.092
$\overline{(u'v')} m_{ax} / U_c^2$	0.023	0.017	0.019
$\mu_t c / U_c r_{0.5}$	0.0356	0.0257	0.0256

六、结 语

对 $K-\epsilon$ 模型中的常系数进行适当改进, 可以将原模型的应用范围扩大到圆柱形射流的情况。本文介绍的改进模型在一般工程问题中可得到满意的结果。

对于非边界层型及低雷诺数的流动情况尚需进一步的研究与探讨。

参 考 文 献

- [1] D.B.Spalding & H.I.Kosten & D.G.Tatchell, PHOENICS An Instruction Manual, CHAM TR/75 January 1982.
- [2] B.E.Launder & D.B.Spalding (1974), The Numerical Computation of Turbulent Flows, Comp. Methods in Appl. Mech. & Eng. 3(1974)
- [3] W.Rodi (1972), The Prediction of Free Turbulent Boundary Layers by Use of a Two-Equation Model of Turbulence, London University, PhD Thesis.

- [4] I. Wygnanski & H. Fiedler (1969): Some Measurements in the Self-Preserving Jet, *J. Fluid*, 1969, v38, Part 3, pp577—612.
- [5] W Rodi (1975): A New Method of Analysing Hotwire Signale in Highly Turbulent Flow, And Its Evaluation in a Round Jet, DISA Information No.17, Feburary 1975.

Numerical Calculation of a Turbulent Axisymmetric Jet

Jia Shaobo

Abstract

A cylindrical turbulent axisymmetric jet is studied using a modified $K-\epsilon$ model. Both mean and turbulent quantities are presented in comparison with the experimental data. The theoretical values obtained show that such a model may be used for the common engineering calculation.