

自由界面部件模态综合法的推究

周科健

(应用力学系)

摘要 本短文以清楚的力学概念,用简便的方法导出了改进的自由界面部件模态综合法的计算公式,并用固支梁算例检验了公式的正确性。

为了教学和科研上需要,对自由界面部件模态综合法进行改进,按照文献[1]和[2]的基本思想,导出了考虑附加模态(柔度)的自由界面法计算公式^[3,4]。以后看到文献[5]第十九章有相似的公式,而且计算结果也是一样的。由于本短文导出的计算公式具有推导简单,概念清楚,无需引入很多假设,因此写出来进行交流。部件的自由振动方程为

$$mu + ku = f_j \quad (1)$$

式中 f_j 为部件界面上所受的力。把物理坐标 u 变为模态坐标

$$u = \phi p = [\phi_k \quad \phi_a] \begin{Bmatrix} p_k \\ p_a \end{Bmatrix} \quad (2)$$

式中 ϕ_k 为保留(kept)主模态, ϕ_a 为附加(added)模态。此附加模态 ϕ_a 从静力平衡方程中得到,即

$$ku = f_j \quad (3)$$

也就是进行一阶近似,用静力的 u 和 f_j 替代动力的 u 和 f_j 。式(2)代入式(3),得

$$\phi^T k \phi p = \phi^T f_j \quad (4)$$

若 ϕ 已对 m 进行规范化,则

$$\phi^T k \phi = \Lambda \quad (5)$$

将式(4)分块写成

$$\begin{Bmatrix} p_k \\ p_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_k^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_a^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_k^T \\ \phi_a^T \end{Bmatrix} f_j$$

其中 $p_a = \Lambda_a^{-1} \phi_a^T f_j$ 代入式(2),得

$$u = [\phi_k \quad G] \begin{Bmatrix} p_k \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (6)$$

式中

$$G = \phi_a \Lambda_a^{-1} \phi_a^T \quad (7)$$

为弹性柔度矩阵, 为了导出 G 的具体计算公式将式(5)两边求逆得

$$\phi^{-1} k^{-1} \phi^{-T} = \Lambda^{-1}, \quad k^{-1} = \phi \Lambda^{-1} \phi^T$$

写成分块形式

$$k^{-1} = [\phi_k \quad \phi_a] \begin{bmatrix} \Lambda_k^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_a^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_k^T \\ \phi_a^T \end{Bmatrix} = \phi_k \Lambda_k^{-1} \phi_k^T + \phi_a \Lambda_a^{-1} \phi_a^T$$

从而得到弹性柔度矩阵的具体计算公式

$$G = k^{-1} - \phi_k \Lambda_k^{-1} \phi_k^T \quad (8)$$

从上式中取出界面的 j 列代入式(6), 即

$$\phi = [\phi_k \quad G_j]$$

应用界面位移连续和界面力相等相反的二个条件, 由式(6)和(9)可得(对两个部件)

$$[\phi]_k \quad [G]_j \begin{Bmatrix} p_k^1 \\ f_j^1 \end{Bmatrix} = [\phi]_k^2 \quad [G]_j^2 \begin{Bmatrix} p_k^2 \\ -f_j^2 \end{Bmatrix}$$

或

$$f_j^1 = -[G]_j^2 + [G]_j^1]^{-1} \phi]_k^2 p_k^1 + [G]_j^1 + [G]_j^2]^{-1} \phi]_k^1 p_k^2 \quad (9)$$

把两个部件的振动方程(1)机械组合起来, 得综合后的方程:

$$T^T \begin{bmatrix} k^1 & 0 \\ 0 & k^2 \end{bmatrix} T - \omega^2 T^T \begin{bmatrix} m^1 & 0 \\ 0 & m^2 \end{bmatrix} T = 0 \quad (10)$$

式中 ω^2 为总体结构的固有频率平方, 变换矩阵

$$T = \begin{bmatrix} \phi_k^1 - G_j^1 [G]_j^2 + [G]_j^1]^{-1} \phi_k^2 & G_j^1 [G]_j^2 + [G]_j^1]^{-1} \phi_k^2 \\ G_j^2 [G]_j^1 + [G]_j^2]^{-1} \phi_k^1 & \phi_k^2 - G_j^2 [G]_j^1 + [G]_j^2]^{-1} \phi_k^1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

容易证明式(10)右部是为零的。

如 k 阵奇异, 则采用移频技术^[2]。

以固支梁为算例*, 把梁分成相同的二个部件, 每个部件取五个单元, 保留主模态取部件总模态的一半, 即五个主模态。整体梁取十个单元, 模态综合法的前五阶固有频率计算结果与整体梁的计算结果是相同的。模态综合法的固有频率因子与精确解的相对百分误差见表 1。

表 1

模 态	1	2	3	4	5
精 确 解	4.73004	7.85320	10.99560	14.18716	17.27875
模态综合解	4.73005	7.85327	10.99598	14.18638	17.28242
% 误 差	0.000	0.001	0.003	0.009	0.021

由此可见, 改进的自由界面部件模态综合法的计算精度是相当高的。

* 此算例由邱静同志完成的

参 考 文 献

- [1] 王文亮等, 模态综合技术短评和一种新的改进, 航空学报, 3(1979)。
- [2] 朱礼文, 自由界面模态综合技术的改进, 强度与环境, 3(1980)。
- [3] 张仁述, 周科健, 结构振动学, 国防科技大学油印讲义, (1981)。
- [4] 周科健, 结构振动学(下册), 国防科技大学油印讲义, (1982)。
- [5] Craig, R.R.Jr., Structural Dynamics, 19, 1981。

An Examination of Component Mode Synthesis of Free-Interface

Zhou Kejian

Abstract

In this brief paper the computation formulas for the improved component mode synthesis of free-interface are derived with a clear conception of mechanics and by means of a simple and convenient procedure. Using an example for clamped beam, the validity of these formulas is tested.