国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八七年第三期　总第五十九期　No. 3 1987 Sum. 59

一类抛物方程初边值问题解的渐近性与振荡性

王 正 明

(应用数学系)

摘　要　本文考虑一类二阶及四阶线性和半线性抛物方程初边值问题的解的渐近性与振荡性。

力学和物理中出现的许多微分方程，通常需要讨论其解的振荡性。对常微分方程这方面已有较深入的研究，见[9-11]；而对偏微分方程还只讨论了某些特殊方程，见[6-8]。抛物方程解的渐近性的讨论则是反应扩散方程的研究所需要的。本文将对二阶线性抛物方程解的渐近性及某些二阶和四阶半线性抛物方程解的振荡性作初步的讨论。本文涉及的椭圆算子 l 和L都是二阶自伴强椭圆算子，其系数适当光滑；区域 Ω 是$\boldsymbol{R}^n$中的有界域，边界 $\partial\Omega$ 适当光滑。设 $D=\Omega\times\boldsymbol{R}^+$，$\Gamma=\partial\Omega\times\boldsymbol{R}^+$，$B=\{(x,t)|\ t=0,\ x\in\bar{\Omega}\}$。

(1)　$lu=\sum\limits_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,t)u_i)_j+c(x,t)u$

(2)　$\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\geqslant\lambda_0\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\quad\lambda_0>0\quad\xi\in\boldsymbol{R}^n$

(3)　$Lu=\sum\limits_{i,j=1}^{n}(A_{ij}(x,t)u_i)_j+C(x,t)u$

(4)　$lu-u_t=f(x,t)$　　$(x,t)\in D$

(5)　$lu-u_t=s(u,x,t)+f(x,t)$　　$(x,t)\in D$

(6)　$Lu-u_t=S(u,x,t)+F(x,t)$　　$(x,t)\in D$

(7)　$lu=\lambda(t)u$　　$(x,t)\in D$

(8)　$Lu=\Lambda(t)u$　　$(x,t)\in D$

(9)　$u=\varphi(x)$　　$(x,t)\in B$

(10)　$u=0$　　$(x,t)\in\Gamma$

(11)　$\dfrac{\partial u}{\partial\gamma}+\beta(x,t)u=0$　　$(x,t)\in\Gamma$

本文1985年12月10日收到

(12)　$\frac{\partial u}{\partial \gamma}=0$　　　　$(x,t)\in \Gamma$

其中　$\frac{\partial u}{\partial \gamma}=\sum_{j,k=1}^{n} a_{jK}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_K}(x,t)m_j(x)$

$\beta(x,t)\geqslant \varepsilon_0>0$　　　　$\forall\ (x,t)\in \Gamma$

$m_j(x)$为单位外法向量的第j个分量。以下分别称$\{(4),(9),(10)\}$、$\{(4),(9),(11)\}$、$\{(4),(9),(12)\}$、$\{(5),(9),(10)\}$、$\{(6),(9),(10)\}$为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅴ、Ⅵ。称$\{(7),(10)\}$、$\{(8),(10)\}$为Ⅴ′、Ⅵ′。设$\psi_{11}(x,t)$，$-\lambda_{11}(t)$及$\Psi_{11}(x,t)$，$-\Lambda_{11}(t)$为Ⅴ′、Ⅵ′对应的正特征函数和相应的特征值。记

(13)　$a_1(t)=\sup_{x\in\Omega}\left|\frac{(\psi_{11})_t}{\psi_{11}}\right|,\ a_2(t)=\sup_{x\in\Omega}\left|\frac{(\psi_{11})_{tt}}{\psi_{11}}\right|$

$\beta_1(t)=\sup_{x\in\Omega}\left|\frac{(\Psi_{11})_t}{\Psi_{11}}\right|$

定义　$f^+(x,t)=\begin{cases} f(x,t) & f(x,t)>0 \\ 0 & f(x,t)\leqslant 0 \end{cases}$

$f^-(x,t)=f(x,t)-f^+(x,t)$

类似定义$\varphi^+(x)$，$\varphi^-(x)$。

定理 1　设$c(x,t)\leqslant 0$，$\lim_{t\to\infty}\int_\Omega |f(x,t)|^p dx=0$　$p>n/2$(当$n\geqslant 2$)或$p\geqslant 1$(当$n=1$)；则Ⅰ、Ⅱ的解当t趋于无穷时一致趋于零。若$c(x,t)\leqslant -\delta<0$，$\int_0^\infty\int_\Omega |f(x,t)|\,dxdt<+\infty$；则Ⅲ的解一致趋于零。

证明　设$\{(14),(9),(10)\}$为Ⅳ，u是Ⅰ的解，v是Ⅳ的解。

(14)　$\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,t)u_i)_j-u_t=f(x,t)$　　　　$(x,t)\in D$

用$\varphi^-(x,t)$、$f^+(x,t)$代Ⅰ、Ⅳ中$\varphi(x,t)$、$f(x,t)$解得Ⅰ、Ⅳ的非正解u_1、v_1，记$w=u_1-v_1$　则　$\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,t)w_i)_j-w_t=-c(x,t)u_1\leqslant 0$　　$(x,t)\in D$

$w=0$　　　　$(x,t)\in B\cup\Gamma$

由极值原理[2]知$w\geqslant 0$，从而$u_1\geqslant v_1$；再用$\varphi^+(x,t)$、$f^-(x,t)$代Ⅰ、Ⅳ中$\varphi(x,t)$、$f(x,t)$解得Ⅰ、Ⅳ的非负解u_2、v_2，同上可证$u_2\leqslant v_2$。由定理的假设及[1,Theorem 1]可知v_1、v_2一致趋于零，从而u_1、u_2亦然，但$u=u_1+u_2$，故得证。用[1,Theorem 2]和极值原理也可得Ⅱ的结论。若$c(x,t)\leqslant-\delta<0$，令$w=e^{\delta t}u$，用[1,Theorem 3]和极值原理可得Ⅲ的结论。

注 1　若把(4)的右端的$f(x,t)$改为$f(x,t)+g(x,t,u,\nabla u)$，且设g在t充分大时取非负（正）值，定理1的其他假设不变，u是Ⅰ、Ⅱ、或Ⅲ的解，则

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\sup_{x\in\Omega}u(x,t)\leqslant 0\quad\left(\underline{\lim_{t\to\infty}}\inf_{x\in\Omega}u(x,t)\geqslant 0\right)$$

定义　u：$\Omega\times R^+\to R^1$是振荡的，若对任何$T>0$ u在$\Omega\times(T,\infty)$中有零点。

用谱方法[3]讨论抛物方程解的振荡性主要基于引理1[4,Chapter11]。

引理 1 V′有唯一的归一化正特征函数 $\psi_{11}(x,t)$ 对应 V' 的最大特征值 $-\lambda_{11}(t)$ 且(15)成立。其中 $\|u\|^2=\int_\Omega |u(x,t)|^2dx$，若 $c(x,t)\leqslant 0$ 则 $\lambda_{11}(t)\geqslant\lambda_1>0$。

(15) $\lambda_{11}(t)=\min\limits_{u|_{\partial\Omega}=0,u\neq 0}\int_\Omega(a_{ij}(x,t)u_iu_j-c(x,t)u^2)dx/\|u\|^2$

定理 2 设 $f(t)$ 为连续函数，$g(t)$ 为正值单增连续可微函数，若对任何固定的 $t_0\in(0,+\infty)$ 有 $\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau$ 振荡，则 $G(t)=\int_{t_1}^{t}f(\tau)g(\tau)d\tau$ 振荡。若还设 $\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=+\infty$，则对任何常数 M，$G(t)\pm M$ 振荡，其中 t_1 是任何固定非负实数。

证明 若结论不真则有 $t_0\in(t_1,\infty)$ 使 $G(t_0)=0$ 且 $t\geqslant t_0$ 时 $G(t)\neq 0$，不妨设 $G(t)>0$；于是 $\forall t\geqslant t_0$

$$\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau=\frac{G(t)}{g(t)}+\int_{t_0}^{t}\frac{G(\tau)g'(\tau)}{g^2(\tau)}d\tau>0$$

与假设矛盾。用 $G(t)\pm M$ 代 $G(t)$ 可得后一结论。

定理 3 设 $g(t)=\int_\Omega f(x,t)\psi_{11}(x,t)dx$，若存在实常数 δ_1，使对任何固定 $t_0\in(0,\infty)$，$\int_{t_0}^{t}g(\tau)e^{\delta_1\tau}d\tau$ 振荡，且设 $s(u,x,t)=s_1(u)\ |f_1(x,t)|$，$s_1(0)=0$，$\frac{\partial s}{\partial u}(u,x,t)\geqslant l(t)$，$0<\varepsilon\leqslant\lambda_{11}(t)-a_1(t)+l(t)-\delta_1$，则V的解 u 振荡。

证明 记 $U(t)=\int_\Omega u\psi_{11}dx$ 由(13)得

$$|U'(t)-(u_t,\psi_{11})|\leqslant a_1(t)\ |U(t)|$$

于是存在连续函数 $H(t)$，$|H(t)|\leqslant a_1(t)$ 使得

$$U'(t)-(u_t,\ \psi_{11})=H(t)U(t)$$

若定理不真，则存在 t_0，$t\geqslant t_0$ 时 u 保号，从而

$$\int_\Omega S(u,x,t)\psi_{11}(x,t)dx=r(t)U(t)\qquad(t\geqslant t_0)$$

其中 $r(t)\geqslant l(t)$。由(5)可得当 $t\geqslant t_0$ 时

$$U'(t)=-[\lambda_{11}(t)-H(t)+r(t)]U(t)-g(t)$$

(16) $$U(t)=\exp\left\{-\int_{t_0}^{t}[\lambda_{11}(\tau)-H(\tau)+r(\tau)]d\tau\right\}\cdot\left\{U(t_0)-\int_{t_0}^{t}g(\tau)\exp\left[\int_{t_0}^{\tau}(\lambda_{11}-H+r)d\xi\right]d\tau\right\}$$

因 $\lambda_{11}(t)-H(t)+r(t)-\delta_1\geqslant\lambda_{11}(t)-a_1(t)+l(t)-\delta_1\geqslant\varepsilon$，故 $\lim\limits_{\tau\to\infty}\exp\left\{\int_{t_0}^{\tau}[\lambda_{11}(\xi)-H(\xi)+r(\xi)-\delta_1]d\xi\right\}=+\infty$；再由 $\int_{t_0}^{t}g(\tau)\ e^{\delta_1\tau}d\tau$ 振荡及定理2的后一结论知道 $U(t)$ 振荡，与 u 在 $t\geqslant t_0$ 保号矛盾。

定理 4 在定理3的假设下，再设：

(i)　$S(u,x,t)=S_1(u)\ |F_1(x,t)|$，$S(0,x,t)=0,\dfrac{\partial S}{\partial u}(u,x,t)\geqslant\dfrac{\partial s}{\partial u}(u,x,t)$

(ii)　对任何固定 $t_0\in(0,\infty)$ 及某些 $\delta<\lambda_{11}(t)-\alpha(t)+l(t)$ 由 $g_1(t,t_0,\delta)=\int_{t_0}^{t}e^{\delta\tau}$
$\int_\Omega f(x,\tau)\psi_{11}(x,\tau)dxd\tau$ 振荡可得 $g_2(t,t_0,\delta)=\int_{t_0}^{t}e^{\delta\tau}\int_\Omega F(x,\tau)\Psi_{11}(x,\tau)dxd\tau$ 振荡

(iii)　$0\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}[A_{ij}(x,t)-a_{ij}(x,t)]\xi_i\xi_j\qquad\forall\xi\in\boldsymbol{R}^n$

$\alpha_1(t)+\beta_1(t)-c(x,t)\leqslant-C(x,t)$

(iv)　$U(t)=\int_\Omega u\psi_{11}dx$ 振荡（u 为Ⅴ的解）则Ⅵ的解 v 振荡。

证明　记 $V(t)=\int_\Omega v\Psi_{11}dx$，则 $V(t)$ 亦可由类似(16)的公式给出，由引理1及定理2可证得 $V(t)$ 振荡，从而定理得证。

注 2　引理1及定理3、定理4中涉及的定解问题的边界条件都是(10)，换成(11)亦可。

下面考虑高阶方程。区域 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的有界区域，$\partial\Omega\in C^{2m+\delta_0}$，$(\delta_0>0)$，$D$、$B$、$\Gamma$ 意义同前；A 是 $2m$ 阶系数适当光滑的强椭圆算子，(22)表示对应于方程的适定的齐次边界条件，A^* 为 A 的伴算子。

(17)　$Au=(-1)^m\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}D^\alpha A_{\alpha\beta}(x)D^\beta u$

(18)　$u_t+Ae(u,x,t)+S(u,x,t)=f(x,t)\qquad(x,t)\in D$

(19)　$u_{tt}+Ae(u,x,t)+S(u,x,t)=0\qquad(x,t)\in D$

(20)　$u=\varphi(x)\qquad(x,t)\in B$

(21)　$u=\varphi_1(x)$，$u_t=\varphi_2(x)\qquad(x,t)\in B$

(22)　$Be(u,x,t)=0\qquad(x,t)\in\Gamma$

(23)　$A^*u=\lambda u\qquad(x,t)\in D$

(24)　$Bu=0\qquad(x,t)\in\Gamma$

分别称{(18)，(20)，(22)}、{(19)，(21)，(22)}、{(23)，(24)}为Ⅶ、Ⅷ、Ⅸ。

定理 5　若Ⅸ有一个正值特征函数 $\psi(x)$ 且它对应正的特征值 λ_1，$e(u,x,t)$、$s(u,x,t)$ 关于 u 连续可微，$e(0,x,t)=s(0,x,t)=0$；$e_u\geqslant0$，$s_u\geqslant0$，$e_u+s_u\geqslant r(t)$，$\int_0^\infty r(t)dt=+\infty$；则Ⅷ的一切连续的广义解均为振荡的。

证明　由(19)得：

$\int_\Omega\psi u_{tt}dx+\int_\Omega\psi Ae(u,x,t)\,dx+\int_\Omega\psi s(u,x,t)dx=0$ 由(24)有：

$\int_\Omega\psi u_{tt}dx+\int_\Omega e(u,x,t)\,A^*\psi\,dx+\int_\Omega\psi s(u,x,t)dx=0$ 若Ⅷ的某个解 $u(x,t)$ 不振荡，则存在 $t_0>0$ 使得当 $(x,t)\in\Omega\times(t_0,+\infty)$ 时 $u(x,t)\neq0$；由定理的假设可知存在非负连续函数 $b_1(t)$、$b_2(t)$，$b_1(t)+b_2(t)\geqslant r(t)$ 使得：

$$\int_{\Omega}\psi u_{tt}dx+\lambda_1 b_1(t)\int_{\Omega}u\psi\,dx+b_2(t)\int_{\Omega}u\psi dx=0 \qquad (t>t_0)$$

记 $U(t)=\int_{\Omega}u(x,t)\psi(x,t)dx$ 由上式有：

$$U''(t)+[\lambda_1 b_1(t)+b_2(t)]U(t)=0 \qquad (t>t_0)$$

而$\int_{t_0}^{\infty}[\lambda_1 b_1(t)+b_2(t)]dt=+\infty$，由 Sturm 定理[5]可证明$U(t)$是振荡的，而这与$u(x,t)$在$\Omega\times(t_0,\infty)$保号矛盾。

定理 6 若Ⅸ有一个正值特征函数$\psi(x)$且它对应正的特征值λ_1，$e(u,x,t)$、$s(u,x,t)$关于u连续可微，$e(0,x,t)=s(0,x,t)=0$，$e_u\geq 0$，$s_u\geq 0$，$e_u+s_u\geq r(t)$；记$g(t)=\int_{\Omega}f(x,t)\psi(x)dx$，若存在实常数$\delta_1$，使对任何固定$t_0\in(0,\infty)$有$\int_{t_0}^{t}g(\tau)e^{\delta_1\tau}d\tau$振荡，且，$\int_{t_0}^{+\infty}[\min(1,\lambda_1)r(t)-\delta_1]dt=+\infty$，则Ⅶ的所有连续广义解振荡。

证明 若定理不真，则有$t_0>0$，当$(x,t)\in\Omega\times(t_0,\infty)$时$u(x,t)\neq 0$，于是我们有：

$$(25)\qquad U(t)=\exp\left\{-\int_{t_0}^{t}[\lambda_1 b_1(\xi)+b_2(\xi)]\,d\xi\right\}\cdot\left\{U(t_0)+\int_{t_0}^{t}g(\xi)\exp\left[\int_{t_0}^{\xi}(\lambda_1 b_1+b_2)d\tau\right]d\xi\right\}$$

注意$\lim\limits_{t\to\infty}\exp\left\{\int_{t_0}^{t}[\lambda_1 b_1(\tau)+b_2(\tau)-\delta_1]d\tau\right\}=+\infty$，应用定理 2 的后一结论就知道$U(t)$振荡，这说明$u(x,t)$在$\Omega\times(t_0,\infty)$中不可能保号。

注 3 定理3～6 中s,S可以分别改为形如$u\cdot g(x,t,u,\nabla u)$，$u\cdot G(x,t,u,\nabla u)$的函数，只要g和G满足相应定理中关于$\frac{\partial s}{\partial u}$和$\frac{\partial S}{\partial u}$的假定。

本文承陈庆益教授指导，受到邓铿老师某些启示，谨表感谢。

参 考 文 献

[1] Charles S, Kahane, Nashville, Czechoslovak Math.J, 33(108) 1983 (262-285)

[2] A. Friedman, Partial Differential Equations of Parabolic Type, Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs.

[3] K.Kreith, Canad. Math. Bull. vol. 26(3), 1983(368-373)

[4] J.Smoller, Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, Springer-Verlag New York Heideberg Berlin.

[5] K.Kreith, Oscillation Theory, Springer Verlag Lecfare Notes in Mathemafics #324, Springer, New York, 1973.

[6] K.Kreith, Siam J.Math. Anal.vol15(3), 1984(570-578)

[7] N.Yoshida, Siam J.Math. Anal. vol.16(2), 1985(211-220)
[8] T.Kusano and N.Yoshida, Quarterly of Applied Math. vol XLIII, no 2, 1985 (167-177).
[9] H.Onose, Nonlinear Anal., vol.8, no.2, 1984(171-180)
[10] M.K.Kwong and H.G.Kaper, J.of Diff.Eq.56, 1985(195-205)
[11] R.S.Dahiya, J.Math. Anal.Appl., 109, 1985(325-332)

Asymptotic and Oscillatory Properties of Solutions of Initial Boundary Value Problems for a Class of Parabolic Equations

Wang Zhengming

Abstract

This paper describes the asymptotic and oscillatory properties of solutions of initial boundary value problems of linear and semilinear parabolic equations of second and fourth order.