国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八七年第三期　总第五十九期　No.3 1987 Sum. 59

一类椭圆型方程的多解问题

王　正　明

（应用数学系）

摘　要　本文用临界点定理及Hilbert空间方法，讨论了一类半线性椭圆型方程的多解问题。

许多作者讨论了

$$\begin{cases} \Delta u = g(u) \\ u\,|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的多解问题，见[5-6]。本文采用与他们不同的方法，在不同的条件下，讨论以下问题：

$$(0.1)\quad \begin{cases} Au = (-1)^M \sum\limits_{|\alpha|,|\beta|\leqslant M} D^\alpha[a_{\alpha\beta}(x)D^\beta u] = f(u) \\ Bu = D^\alpha u\,|_{\partial\Omega} = 0, \quad \forall\, \alpha, \quad |\alpha| < M \end{cases}$$

此处，$\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2\cdots,\alpha_n)$ 是正整数指数，而 $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$。

假设：

$H1$：$\lim\limits_{u\to\infty} f(u)/u = l$，$l\neq\lambda_j$，$\forall\, j\in N$；$M\geqslant n/2$；若$n/4<M<n/2$，则进一步假设：$|f'(u)|\leqslant c$，$c$是与$u$无关的常数；

$H'1$：$M>n/2$，$0\leqslant l/2\leqslant \varliminf\limits_{u\to\infty}\int_0^u f(s)\,ds/u^2$；

$H2$：$f(u)\in C^p(R;\ R)$，p是整数，$p>n/2$；$f(u)=-f(-u)$，$\forall\, u\in R$；Ω是R^n中边界适当光滑的有界区域；

$H3$：存在正整数 j_0，r，使得

$$\min(f'(0),l)\leqslant\lambda_{j_0}\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{j_0+r}\leqslant\max(f'(0),l)$$

$H4$：A是 $2M$ 阶自伴强椭圆算子，$a_{\alpha\beta}(x)\in C^{q+|\alpha|}(\bar{\Omega})$，（$q$ 为整数，$q>n/2$），且存在与 u 无关的正值常数 c_1、c_2，使得

$$\|u\|_{W_2^{(M)}}\leqslant c_1\int_\Omega uAu\,dx$$

$$\|u\|_{W_2^{(2M)}}\leqslant c_2\int_\Omega (Au)^2\,dx$$

其中$\{\lambda_j,\ j\in N\}$是以下问题的特征值集，

本文1986年12月25日收到

$$(0.2)\begin{cases}Au=\lambda u\\ Bu=0\end{cases}$$

本文主要得到以下结果。

定理 1 若$(H1)$—$(H4)$成立，则(0.1)有N_1个非平凡经典解，$N_1=[r/2]$。

定理 2 若$(H'1)$及$(H2)$—$(H4)$成立，则定理1亦真。

我们的讨论主要基于以下定理，见[2]。

定理 A 若I是以下形式的连续Fréchet可微泛函：

$$(0.3)\quad \mathrm{I}(u)=\frac{1}{2}(Lu,u)+\Psi(u)$$

这里：

(I1)：L是Hilbert空间E中的线性有界自伴算子，群S^1作用在E上；

(I2)：0是L的正则值或有限重特征值；

(I3)：$E=\bigoplus M_j$，M_j为L的特征子空间；

(I4)：Ψ是偶泛函；

(I5)：$\Psi(0)=0$，Ψ'是一个紧算子；

(I6)：对每个$c>0$及E中序列$\{u_n\}$，若$I(u_n)\to c$，$\|u_n\|\|I'(u_n)\|\to 0$，则$\{u_n\}$必有有界子序列；

(I7)：存在E的闭子空间V、W使得：

(i)：$\dim(V\cap W)$与$\mathrm{codim}(V+W)$均有限；

(ii)：存在常数$c_\infty>0$，使：$I(u)\leqslant c_\infty$，$\forall u\in W$；

(iii)：存在常数$c_0>0$，$r>0$，使：$I(u)\geqslant c_0$，$\forall u\in V$，$\|u\|=r$；则I至少有l_0条非平凡临界轨迹，其中：

$$(0.4)\quad l_0=[\dim(V\cap W)-\mathrm{codim}(V+W)]/2$$

设$\{\psi_j\}$为(0.2)的特征函数集，由[3]知它是$L^2(\Omega)$中的完备正交系，设$\{u_j\}$为u按$\{\psi_j\}$展开的付氏系数，记：

$$C_E^\infty=\{v|\ v\in c^\infty(\bar{\Omega}),\ Bv=0\}$$

$$H=\{u\ |u\in L^2(\Omega),\ \sum(1+|\lambda_j|)\ |u_j|^2<+\infty\}$$

在H上定义以下的内积与范数后，则H成为一个Hilbert空间：

$$((u,v))=\sum(1+|\lambda_j|)u_jv_j\quad \forall u,v\in H \tag{1}$$

$$\|u\|^2=\sum(1+|\lambda_j|)\ |u_j|^2\qquad \forall u\in H \tag{2}$$

定义 称u为(0.1)的弱解，若$u\in H$，

$$\int_\Omega uAvdx=\int_\Omega vg(u)dx\qquad \forall v\in c_E^\infty \tag{3}$$

在H上考虑群S^1的作用，S^1由下式给出：

$$u(x)\to u(x+te),\ t\in R,\ e=(1,1,\cdots 1) \tag{4}$$

定义H到H的线性算子L及H上的泛函I如下：

$$((Lu,v))=\sum\lambda_ju_jv_j\qquad \forall u,v\in H \tag{5}$$

$$I(u)=\frac{1}{2}((Lu,u))-\int_\Omega F(u)dx\qquad F(u)=\int_0^u f(s)ds \tag{6}$$

$I(u)$是 Fréchet 连续可微的，而且

$$I'(u)=Lu-\tilde{f}(u)$$

其中$\tilde{f}(u)\in H$，由$((\tilde{f}(u),\ v))=\int_{\Omega}vf(u)dx\quad\forall v\in H$定义。显然$I$的任何临界点均为(0.1)的弱解，(6)决定的泛函显然满足定理A的条件$(I1)$—$(I4)$。为得到(0.1)的弱解的存在性，还要验证定理A的其他条件。

引理 1 Ψ'是一个紧算子。

证明 事实上是要证Ψ'：$H\to H$，$\Psi'(u)=\tilde{f}(u)$是一个紧算子，考虑H中的有界序列$\{u^{(j)}\}$，$\|u^{(j)}\|\leqslant M_1$，M_1为与j无关的常数，设$\{f_k^{(j)}\}$为$f(u^{(j)})$按$\{\psi_K\}$展开的付氏系数，由$(H1)$知存在仅与f及M_1有关的常数M_2，使得：

$$\sum_{K=1}^{\infty}|f_k^{(j)}|\leqslant M_2\qquad\forall j\in\boldsymbol{N}$$

注意到$\lim\limits_{j\to\infty}\lambda_j=+\infty$，于是$l^2$中的序列：

$$\{f_1^{(j)}/\sqrt{1+|\lambda_1|},\ f_2^{(j)}/\sqrt{1+|\lambda_2|},\ \cdots,\ f_K^{(j)}/\sqrt{1+|\lambda_K|},\ \cdots\}$$

有收敛子列；又由于

$$(\tilde{f}(u),v)=\sum(1+|\lambda_K|)\frac{f_K}{1+|\lambda_K|}v_K\quad\forall u,v\in H\tag{7}$$

于是：$\{\tilde{f}(u^{(j)})\}$在H中有收敛子列，从而Ψ'是一个紧算子。

为方便起见，定义H到H的有界线性算子L_0、L_∞如下：

$$((L_0u,v))=((Lu,v))-f'(0)\int_{\Omega}uv\quad\forall u,v\in H\tag{8}$$

$$((L_\infty u,v))=((Lu,v))-l\int_{\Omega}uv\quad\forall u,v\in H\tag{9}$$

构造H的闭子空间V、W如下：

$$u\in V\Longleftrightarrow u_k=0,\ 若\lambda_K\leqslant\min(f'(0),l)\tag{10}$$

$$u\in W\Longleftrightarrow u_K=0,\ 若\lambda_K\geqslant\max(f'(0),l)\tag{11}$$

显然 $\operatorname{codim}(V+W)=0$，$\dim(V\cap W)\geqslant 2N_1$

引理 2 序列$\{u^{(j)}\}$若满足条件$\|u^{(j)}\|\|I'(u^{(j)})\|\to 0$，则$\{u^{(j)}\}$必有有界子序列。

证明 由$(H1)$与$(H2)$，类似[2, Lemma 3.1]可证得。

引理 3 若$f'(0)<l$，则存在常数M_3，使得：$I(u)\leqslant M_3\quad\forall u\in W$。

证明 由$(H1)$知，$\lim\limits_{u\to\infty}F(u)/u^2=l/2$，于是

$$I(u)=\frac{1}{2}((Lu,u))-\int_{\Omega}F(u)dx$$

$$\leqslant\frac{1}{2}((Lu,u))-\frac{l}{2}\int_{\Omega}u^2dx+\varepsilon\|u\|^2+C$$

$$\leqslant(\delta_{-1}/2+\varepsilon)\|u\|^2+C\tag{12}$$

这里δ_{-1}是L_∞的最大负特征值，C只与ε及f有关，取$\varepsilon<-\delta_{-1}/4$即得结论。

引理 4 若$f'(0)<l$，则$\lim\limits_{u\to 0}\ \inf\limits_{u\in V}I(u)/\|u\|^2>0$。

证明 由$(H1)-(H2)$及Sobolev定理[4]知$I(u)$二次Fréchet可微：

$$I''(u)(v_1,v_2)=((Lv_1,v_2))-\int_\Omega f'(u)v_1v_2dx \qquad \forall u,v_1v_2\in H$$

于是：

$$I(u)=I(0)+((I'(0),u))+\frac{1}{2}I''(0)(u,u)+o(\|u\|^2)$$

$$\geqslant\frac{1}{2}((L_0u,u))+o(\|u\|^2)$$

$$\geqslant(\mu_{+1}/2)\|u\|^2+o(\|u\|^2) \tag{13}$$

其中μ_{+1}为L_0的最小正特征值。

注 当$l<f'(0)$时，用$-I(u)$代$I(u)$后以上引理亦真。

综合上述，由定理A可得到(0.1)的弱解的存在性及解的个数的下界估计，以下我们讨论解的正则性。

引理 5 $\psi_j(x)\in C^{(2M+1)}(\Omega)\cap C^{(M)}(\bar{\Omega})$，$\forall j\in\boldsymbol{N}$

证明 由[1，Theorem46.2，Theorem46.3]即知。

引理 6 若$u\in H$，则$u\in W_2^{(M)}(\Omega)$；若还有$\sum\lambda_k^2|u_k|^2<+\infty$，则$u\in W_2^{(2M)}(\Omega)$。

证明 若$u\in H$，则由[3]知：

$$u=\sum u_k\psi_k \qquad a\cdot e \tag{14}$$

由(H_4)知：

$$\|u\|^2_{W_2^{(M)}(\Omega)}\leqslant c_1\int_\Omega uAudx=c_1\sum\lambda_k|u_k|^2\leqslant c_1\|u\|^2 \tag{15}$$

$$\|u\|^2_{W_2^{(2M)}(\Omega)}\leqslant c_2\int_\Omega(Au)^2dx=c_2\sum\lambda_k^2|u_k|^2<+\infty \tag{16}$$

由以上两式即知结论成立。

下证(0.1)的弱解必为经典解。

若u是(0.1)的弱解，则：

$$u\in H,\ u=\sum u_k\psi_k \qquad a\cdot e \tag{17}$$

$$f(u)\in L^2(\Omega),f(u)=\sum f_k\psi_k \qquad a\cdot e \tag{18}$$

由弱解的定义有：

$$\sum\lambda_ku_k\bar{v}_k=\sum f_k\bar{v}_k \qquad \forall v=\sum v_k\psi_k\in c_E^\infty \tag{19}$$

于是

$$\lambda_ku_k=f_k \qquad \forall k\in\boldsymbol{N} \tag{20}$$

综合(18)和(20)两式得：

$$\sum|\lambda_ku_k|^2<+\infty \tag{21}$$

由引理5及引理6知：

$$u\in W_2^{(2M)}(\Omega)\cap\mathring{W}_2^{(M)}(\bar{\Omega})$$

由于$2M>n/2$，由Sobolev定理知u几乎处处等于某一连续函数，经计算可以验证：

$$f(u)\in W_2^{(q)}(\Omega),\ q\in\boldsymbol{N},\ n/2<q\leqslant\min(p,2M,1+n/2)$$

由[1,Theorem46.3]知u是(0.1)的经典解。

本文承陈庆益教授指导，谨表感谢。

参 考 文 献

[1] K.Rektorys, Variationat Methods in Mathematics, Science and Engineering, D.Reidel Publishing Company, 1977.

[2] N.Basile & M. Minini, Multiple Periodic Solutions for a Semilinear Wave Equation with Nonmonotone Nonlinearity,Nonlinear Anat.,vot.9,no.8,837-848(1985)

[3] R.E.Showalter, Hilbert Space Methods for Partial Differentiat Equations, Fearon-Pitman Publishers Inc. 1977.

[4] J.L.Lions, 李大潜译，偏微分方程的边值问题，上海科技出版社。

[5] 李树杰，王志强，一个抽象临界值定理及应用，数学学报，vol.29, no.5, 585-589(1986).

[6] M.J.Esteban, Multiple Solutions of Semilinear Elliptic Problems in a Ball, J.Diff.Eq. 57, 112-137(1985).

Multiple Solutions of a Class of Elliptic Equations

Wang Zhengming

Abstract

In this paper the multiple solutions of a class of semilinear elliptic equations are discussed with critical point theorem and Hilbert space method.