国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八七年第三期　总第五十九期　No.3 1987 Sum. 59

连续凸对策的谈判集

黄 振 高

(应用数学系)

摘　要　在最近的一次国际对策论会议上，Shapley 教授提出了一种新的谈判集概念。这种谈判集避开了单个局中人之间的谈判，从而对于具有无限多局中人的对策也有意义。在这篇短文里，我们证明，对于连续凸对策，这种新的谈判集与核心重合。这就大大推广了文献[1]和[2]的主要结果。在证明过程中，我们也顺便得到测度论中Hahn分解定理的推广。

一、引　言

设Ω是一集合，$\mathscr{A}$是Ω的一些子集组成的σ代数，v是定义在$\mathscr{A}$上的非负实函数，满足$v(\phi)=0$，则我们称三元组$(\Omega,\mathscr{A},v)$为对策。其中Ω中的元素称为局中人，$\mathscr{A}$中的元素称为联盟，$v(S)$一般解释为S中各局中人联合在一起时所获得的总效益。

当Ω是有限或可列集时，我们通常取$\mathscr{A}$为Ω的全体子集所组成的σ代数，所得到的对策称为具有有限（或可列）个局中人的对策。传统的合作对策理论主要针对只有有限个局中人的合作对策而展开。如何把这些理论推广到一般的合作对策，这是一个颇为困难的问题，近年来已引起广泛的兴趣。

设$(\Omega,\mathscr{A},v)$为合作对策，定义分配集$I_m(\Omega,\mathscr{A},v)$为可测空间$(\Omega,\mathscr{A})$上满足

$$x(\Omega)=v(\Omega)$$

的非负测度x的全体，分配集中的元素称为分配。对策的核心$C(\Omega,\mathscr{A},v)$定义为满足

$$x(S)\geqslant v(S),\ \forall S\in\mathscr{A}$$

的分配之全体。直观地说，核心是不能被任何联盟所拒绝的分配之全体。

设x，y都是$(\Omega,\mathscr{A})$上的测度，$S\in\mathscr{A}$。我们用$\mathscr{A}\cap S$表示σ环$\{T: T\in\mathscr{A}, T\subset S\}$；用$x|_S$表示$x$在$\mathscr{A}\cap S$上的限制。再用$y\geqslant x$表示对于每一$S\in\mathscr{A}$，都有$y(S)\geqslant x(S)$；用$y>x$表示$y\geqslant x$而且当$y(S)>0$，$S\in\mathscr{A}$时，必有$y(S)>x(S)$。

设x是对策$(\Omega,\mathscr{A},v)$的一个分配，$S\in\mathscr{A}$，y是$(S,\mathscr{A}\cap S)$上的一个测度。如果

本文1987年1月收到

$y(S)=v(S)>0$，且$y\geqslant x|_S$，$y\neq x|_S$，则称二元偶(S,y)为对分配x的异议。

设(S,y)是对x的异议，称(T,z)为(S,y)的反异议，如果z是$(T,\mathscr{A}\cap T)$上的测度，且$z(T)=v(T)>0$，$z|_{T\cap S}>y|_{T\cap S}$，$z|_{T-S}>x|_{T-S}$。

谈判集$\mathscr{M}$定义为满足如下条件的分配的全体，对于这种分配，每个异议都有反异议。

这样定义的谈判集是Shapley在最近的一次国际对策论会议上提出的。它不同于Aumann和Maschler([1])提出的谈判集$\mathscr{M}_1^{(i)}$：前者不依赖于单个局中人之间的谈判，从而对于具有连续统势的局中人集合的对策也有定义，而后者却不然，它只对具有有限或可列个局中人的对策才有定义，但就这种对策来说，传统谈判集一定是新谈判集的子集，这从定义即可看出。

设u是定义在$\mathscr{A}$上的实函数，如果

$$S_n\uparrow S\text{或}S_n\downarrow S\Longrightarrow u(S_n)\longrightarrow u(S)$$

则称u在S连续。如果u在每一$S\in\mathscr{A}$都连续，则说u是连续的。如果$\forall A,B\in\mathscr{A}$

$$u(A)+u(B)\leqslant u(A\cup B)+u(A\cap B) \tag{1}$$

则称u为凸集函数。

对于合作对策$(\Omega,\mathscr{A},v)$，如果v是凸集函数，则称该对策为凸对策；如果v又是连续的，则称之为连续凸对策。

关于这种对策，已有大量的结论。文[2]证明，对于具有有限个局中人的凸对策（显然是连续的），传统的谈判集与核心重合。文[3]又把这一结果推广到具有可列个局中人的情形。这里我们还需要知道如下的重要事实：任何凸对策都具有非空的核心（见文[4]）。

本文的主要结果可陈述为如下的定理。

定理 连续凸对策的谈判集与核心重合，即$\mathscr{M}=C$。

对于具有有限个或可列个局中人的合作对策，由于$\mathscr{M}\supset\mathscr{M}_1^{(i)}\supset C$，故所述定理实质上是[2]，[3]的主要结果的加强和推广。

二、定理的证明

为证明主要定理，我们先引入几个有关连续凸集函数的结论。

命题 1 设$(\Omega,\mathscr{A})$为可测空间，u是$\mathscr{A}$上有上界的连续凸集函数，则必存在$P\in\mathscr{A}$使

$$u(P)=\sup_{S\in\mathscr{A}} u(S)$$

证明 设$\alpha=\sup\limits_{S\in\mathscr{A}} u(S)$，根据假定，$\alpha<+\infty$。于是对于每个自然数$n$，存在$S_n\in\mathscr{A}$使

$$u(S_n)>\alpha-2^{-n}$$

对于$p=n+1,n+2,\cdots$，由不等式(1)有

$$u\left(\bigcup_{K=n}^{p} S_K\right) \geqslant u(S_n) + u\left(\bigcup_{K=n+1}^{p} S_K\right) - u\left(S_n \cap \left(\bigcup_{K=n+1}^{p} S_K\right)\right)$$

$$\geqslant u(S_n) + u\left(\bigcup_{K=n+1}^{p} S_K\right) - \alpha$$

$$> u\left(\bigcup_{K=n+1}^{p} S_K\right) - 2^{-n}$$

类似地可得

$$u\left(\bigcup_{K=n}^{p} S_K\right) > u\left(\bigcup_{K=n+2}^{p} S_K\right) - 2^{-n} - 2^{-(n+1)}$$

$$> \cdots > u(S_p) - \sum_{K=n}^{p-1} 2^{-K}$$

$$> \alpha - \sum_{K=n}^{p} 2^{-K} > \alpha - 2^{-n+1}$$

因此由连续性我们有

$$u\left(\bigcup_{K=n}^{\infty} S_K\right) = \lim_{p\to\infty} u\left(\bigcup_{K=n}^{p} S_K\right) \geqslant \alpha - 2^{-n+1}$$

$$u\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{K=n}^{\infty} S_K\right) = \lim_{n\to\infty} u\left(\bigcup_{K=n}^{\infty} S_K\right) \geqslant \alpha$$

可见 $P = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{K=n}^{\infty} S_K$ 即为所求。

命题 2 若 u 为没有上界的连续凸集函数，那么对于任何正数 N，必存在 $N_1 > N$，及 $T \in \mathscr{A}$ 使得

$$\sup_{S \in \mathscr{A} \cap T} u(s) = +\infty, \quad u(T) \geqslant N_1 \tag{2}$$

证明 据假定存在 $S_n \in \mathscr{A}$ 使 $u(S_n) \geqslant n$，$n = 1, 2, \cdots$。取定 N，假如不存在那样的 N_1 及 T 满足(2)，则当 $n > N$ 时，$\sup\limits_{S \in \mathscr{A} \cap S_n} u(S) < +\infty$。由命题 1，存在 $S_n' \in \mathscr{A} \cap S_n$ 使

$$u(S_n') = \max_{S \in \mathscr{A} \cap S_n} u(S) \geqslant u(S_n) \geqslant n$$

于是对于每一 $p > N+1$ 有

$$u\left(\bigcup_{K=N+1}^{p} S_K'\right)$$

$$\geqslant u(S_{N+1}') + u\left(\bigcup_{K=N+2}^{p} S_K'\right) - u\left(S_{N+1}' \cap \left(\bigcup_{K=N+2}^{p} S_K'\right)\right)$$

$$\geqslant u\left(\bigcup_{K=N+2}^{p} S_K'\right)$$

类似地可得

$$u\left(\bigcup_{K=N+1}^{p} S_K\right) \geqslant u\left(\bigcup_{K=N+2}^{p} S_K'\right) \geqslant \cdots \geqslant u(S_p') \geqslant p$$

因此

$$u\left(\bigcup_{K=N+1}^{\infty} S_K'\right) = \lim_{n\to\infty} u\left(\bigcup_{K=N+1}^{n} S_K'\right) = +\infty。$$

这一矛盾就证明了命题的结论。

引理 设 u 是 $(\Omega, \mathscr{A})$ 上的连续凸集函数，则存在 $P \in \mathscr{A}$ 使 $u(P) = \sup\limits_{S \in \mathscr{A}} u(S)$。

证明 只要证明 u 有上界即可，因为根据命题 1，有上界的连续凸集函数一定可以达到上确界。

假设 u 无上界，由命题 2 知道存在 $n_1>1$ 以及 $S_1\in\mathscr{A}$ 使

$$\sup_{S\in\mathscr{A}\cap S_1} u(S)=+\infty,\quad u(S_1)\geqslant n_1$$

再把命题 2 应用到 $(S_1,\mathscr{A}\cap S_1)$ 上的无上界连续凸集函数 u，可得 n_2，$n_2>n_1+1$，以及 $S_2\in\mathscr{A}$，$S_2\subset S_1$ 使

$$\sup_{S\in S_2\cap\mathscr{A}} u(S)=+\infty,\quad u(S_2)\geqslant n_2$$

如此继续下去，可得渐缩序列 $\{S_n\}$ 使 $u(S_n)\to+\infty$，于是 $u\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n\right)=\lim_{n\to\infty}u(S_n)=+\infty$。这是矛盾，故引理得证。

注 如果 u 是有限的广义测度，那么从引理马上可以得到测度论中的 Hahn 分解定理，事实上，对于任何有限的广义测度 μ，根据引理存在 $P\in\mathscr{A}$ 使 $\mu(S)\leqslant\mu(P)$，$\forall S\in\mathscr{A}$。于是对于任何 $E\in\mathscr{A}$ 有

$$\mu(E\cap P)=\mu(P)-\mu(P-E)\geqslant 0$$
$$\mu(E\cap(\Omega-P))=\mu(E\cup P)-\mu(P)\leqslant 0$$

可见，P 和 $\Omega-P$ 是 μ 的正集和负集。

有了上述准备，即可着手证明本文的主要定理。

定理的证明 由于核心是谈判集的子集，所以只要证明对于谈判集中的每一元 x，都成立 $x\in C(\Omega,\mathscr{A},v)$ 即可。

假设 $x\overline{\in}C(\Omega,\mathscr{A},v)$，即有 $S_0\in\mathscr{A}$ 使 $v(S_0)>x(S_0)$，考虑连续凸集函数 e：

$$e(S)=v(S)-x(S) \tag{3}$$

则 $e(S_0)>0$，再根据引理，存在 $C\in\mathscr{A}$ 使

$$e(C)=\sup_{S\in\mathscr{A}} e(S)\geqslant e(S_0)>0$$

定义 $\mathscr{A}\cap C$ 上的函数 e'：

$$e'(S)=\max_{T\in\mathscr{A}\cap S} e(T)$$

那么 $\forall S\in\mathscr{A}\cap C$，$e'(S)\geqslant e(\phi)=0$，而且容易验证 $(C,\mathscr{A}\cap C,e')$ 是凸对策，从而具有非空的核心。任取其中一元 z，则

$$z(C)=e'(C)=e(C)>0 \tag{4}$$
$$z(S)\geqslant e'(S)\geqslant e(S),\quad \forall S\in\mathscr{A}\cap C \tag{5}$$

令 $y=z+x|_C$，由(3)、(4)得

$$y(C)=z(C)+x(C)=v(C)\geqslant z(C)>0$$

再由(4)，(5)知道 $y\geqslant x|_C$，$y\neq x|_C$。因此 (C,y) 是对 x 的一个异议。对于这个异议，可以断定没有反异议，这是因为 $\forall D\in\mathscr{A}$，

$$
\begin{aligned}
& x(D-C)+y(D\cap C) \\
= & x(D)+(y-x)(D\cap C) \\
= & x(D)+z(D\cap C) \\
\geqslant & x(D)+e(D\cap C) \\
\geqslant & x(D)+e(D)+e(C)-e(D\cup C) \\
\geqslant & x(D)+e(D)=v(D)
\end{aligned}
$$

换言之，任何联盟都没有能力提出反异议，因此 $x\in\mathscr{M}$，这与假设矛盾，定理得证。

参 考 文 献

[1] R.J.Aumann & M.Maschler, The Bargaining set for cooperative games. Advances in Game Theory, Annals of Math. Studies, No. 52, 1976, 443—476.

[2] M.Maschler,B.Peleg & L.S. Shapley, The Kernel ane the Bargaining set for convex games. Inter.J.Game Theory, 1, 1972, 73—93.

[3] 黄振高，具有可数个局中人的连续凸对策，国防科技大学学报，1987年第一期。

[4] F.Delbrean, Convex games and extreme points. J.Math. Anal. & Appl., 45, 1974, 210—233.

The Bargaining Set for Continuous Convex Games

Huang Zhengao

Abstract

In a recent international conference on Game Theory, Professor Shapley presented a new bargaining set concept, which avoid bargaining among players, and so can be generalized to the games with infinitely many players. In this paper, the new bargaining set for continuous convex games is proved to be coincided with the core, thus the main results of [1] and [2] may be generalized to a great extent. As a by-product of our proof, a new generalization of Hahn decomposition theorem in measure theory is obtained.