国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八七年第三期　总第五十九期　No.3 1987 Sum. 59

估计相干源数目的一种改进算法

赵　滨　生

（电子技术系）

摘　要　本文在W.Wax和T.Kailath提出的估计非相干源数目的信息论判阶法基础上，提出了一种改进算法：空间平滑——信息论判阶法。与WK's方法相比，这种改进的算法可以估计相干源的数目，而且能提高信号源强相关、小分离角及低信噪比情况时估计源数目的准确程度。为了进一步提高估计精度，我们还提出了乘幂的空间平滑——信息论判阶法。计算机仿真结果验证了改进算法的有效性。

一、引　　言

近年来，由于迫切需要解决多路径干扰、低仰角跟踪、高分辨雷达成像等问题，相干/非相干源的超角分辨技术越来越引起人们的关注。EVM与MUSIC法是分辨不完全相关源的有效方法，然而它们首先遇到的问题是：如何准确地估计出观测空域中信号源的数目。

信号源非相干时，这一问题已得到了较好的解决，如可用直接计算空间相关矩阵最小重特征值数目的方法，或信息论判阶法[1]等。然而，信号源相干时，却没有有效的估计方法。“矩阵分解法”[2][3]虽可估计相干源数目，但它的计算量大，估计源数目的可靠性也不高。

在本文中，我们提出一种改进算法：空间平滑——信息论判阶法。这种改进算法可以较有效地估计相干源的数目，估计精度高，计算量也不大。

二、信息论判阶法

W.Wax和T.Kailath的方法是把估计信号源数目的问题转为用信息论准则对模型判阶的问题。

本文1987年2月22日收到

设 p 个相同的全向天线等间距放置，q 个窄带平面波，入射角分别为 $\theta_1,\cdots,\theta_q$。假设信号源与噪声统计独立，噪声是空间白噪声。

设第1个阵元为参考阵元，则 p 个阵元上接收的信号可用矢量 $\vec{r}(t)$ 来表示

$$\vec{r}(t)=A\vec{s}(t)+\vec{n}(t) \tag{1a}$$

其中：

$$\vec{r}(t)=[r_1(t)\ \ r_2(t)\cdots r_p(t)]^T \tag{1b}$$

$$\vec{s}(t)=[s_1(t)\ \ s_2(t)\cdots s_q(t)]^T \tag{1c}$$

$$\vec{n}(t)=[n_1(t)\ \ n_2(t)\cdots n_p(t)]^T$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ e^{j\omega_0\tau_1} & & e^{j\omega_0\tau_q} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{j\omega_0(p-1)\tau_1} & \cdots & e^{j\omega_0(p-1)\tau_q} \end{bmatrix} \tag{1d}$$

$$A\triangleq[\vec{a}(\theta_1)\cdots\vec{a}(\theta_q)] \tag{2}$$

上式中：$\vec{a}(\theta_i)=[1\ \ e^{j\omega_0\tau_i}\cdots e^{j\omega_0(p-1)\tau_i}]^T$ 为第 i 个信号源的方向矢量，$\tau_i=\frac{d}{c}\sin\theta_i$，

$i=1,2,\cdots,q$，T 为转置符号。

阵列接收信号的空间相关矩阵定义为：

$$R=E[\vec{r}(t)\vec{r}^H(t)] \tag{3}$$

H 为共轭转置符号。

把(1a)代入(3)得：

$$R=AR_sA^H+\sigma_n^2I \tag{4}$$

$R_s=E[\vec{s}(t)\vec{s}^H(t)]$ 为信号源的相关矩阵。信号源非相干时，R_s 为非奇异阵；信号源相干时，R_s 为奇异阵。σ_n^2 为噪声功率。

记
$$\psi=AR_sA^H \tag{5}$$
则
$$R=\psi+\sigma_n^2I \tag{6}$$

考虑 $\vec{a}(\theta_i)$ 与 $\vec{a}(\theta_j)$ $(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,q)$ 线性独立，由(5)式知，信号源非相干时，ψ 的秩为 q，信号源相干时，ψ 的秩小于 q。

信号源非相干时，可以通过估计 ψ 的秩来得到信号源的数目，此时，R 的 $p-q$ 个最小特征值为 $\lambda_{q+1}=\lambda_{q+2}=\cdots=\lambda_p=\sigma_n^2$。于是估计信号源数目的问题可以转成对下面模型的判阶问题

$$R^{(k)}=\psi^{(k)}+\sigma_n^2I \tag{7}$$

这里 $\psi^{(k)}$ 为秩为 k 的半正定矩阵，$k\in\{0,1,\cdots,p-1\}$ 在所有可能的源数目范围之内。

根据线性代数知识，(7)式可改写成：

$$R^{(k)}=\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i-\sigma_n^2)\vec{V}_i\vec{V}_i^H+\sigma_n^2I \tag{8}$$

式中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 和 $\vec{V}_1,\cdots,\vec{V}_k$ 分别是 $R^{(k)}$ 的特征值和对应的特征矢量。令

$$\vec{\Theta}^{(k)T}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_k,\sigma_n^2,\vec{V}_1^T,\cdots,\vec{V}_K^T) \tag{9}$$

则 $\vec{\Theta}^{(k)}$ 为模型的参数矢量。

相关矩阵R按下式估计：

$$\hat{R}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\vec{r}(t_i)\vec{r}^H(t_i) \tag{10}$$

$\vec{r}(t_i)$为t_i时刻阵列接收信号的列矢量，N为快拍数。

假设各次观测的阵列接收信号矢量是统计独立的复高斯随机矢量，且均值为零。根据信息论理论，$\psi^{(k)}$的秩k，即信号源数目q可用下面两个式子中的任一个来判断[1]：

$$AIC(k)=-2\log\left(\frac{\prod_{i=k+1}^{p}l_i^{1/(p-k)}}{\frac{1}{p-k}\sum_{i=k+1}^{p}l_i}\right)^{(p-k)N}+2k(2p-k) \tag{11}$$

$$MDL(k)=-\log\left(\frac{\prod_{i=k+1}^{p}l_i^{1/(p-k)}}{\frac{1}{p-k}\sum_{i=k+1}^{p}l_i}\right)^{(p-k)N}+\frac{1}{2}k(2p-k)\log N \tag{12}$$

式中$l_i=\hat{\lambda}_i,i=1,\cdots,k$，为$\hat{R}$的特征值的估值，且有$l_1>l_2>l_p$。

使(11)或(12)式为最小的k值即为信号源数目的估值。前面已经指出，用这种方法是不能准确估计出相干源的数目。我们在第4部分的模拟结果中还将看到，当信号源强相关、小分离角及低信噪比时，用这种方法也容易产生错误判断。

三、一种改进算法

上节的信息论判阶法不能准确地估计相干源的数目，是因为相干源时ψ的秩小于q，若仍按(8)式进行分解，由AIC或MDL判断出的相干源数目将少于实际源的数目。当信号源强相关、小分离角及低信噪比时，ψ的秩易估错，采用该法也易发生误判。

在这篇文章里，我们提出了一种改进算法：空间平滑——信息论判阶法。这种方法首先要计算一个参数r，然后选子孔径尺寸$p=r+1$进行空间平滑。当满足一定条件时，空间平滑后得到的等效信号源相关矩阵将满秩，这时，再运用信息论判阶准则，可以较有效地估计相干源的数目，提高估计精度。

在给出改进算法之前，先回顾一下空间平滑预处理过程[4]，图1是它的示意图。

将l个等间距放置的阵元分成若干个子阵列，每个子阵列包含p个阵元。第k个子阵列由阵元$\{k,k+1,\cdots,k+p-1\}$组成。$k=1,2,\cdots,l-p+1$。$\vec{r}_k(\cdot)$表示第k个子阵列接收的信号列矢量，则

$$\vec{r}_k(t)=AD^{(k-1)}\vec{s}(t)+\vec{n}_k(t) \tag{13a}$$

式中

$$\vec{r}_k(t)=[r_k(t)\ \ r_{k+1}(t)\cdots r_{k+p-1}(t)]^T \tag{13b}$$

$$\vec{n}_k(t)=[n_k(t)\ \ n_{k+1}(t)\cdots n_{k+p-1}(t)]^T \tag{13c}$$

$D^{(k)}$为$q\times q$对角阵D的k次幂，

$$D=\mathrm{diag}\{e^{j\omega_0\tau_1}\cdots e^{j\omega_0\tau_q}\} \tag{13d}$$

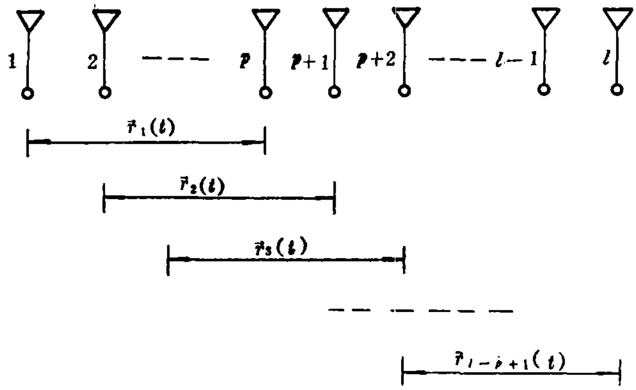

图 1　空间平滑过程示意图

第 k 个子阵列接收信号的空间相关矩阵为：

$$R_k=E[\vec{r}_k(t)\vec{r}_k^H(t)]$$
$$=AD^{(k-1)}R_sD^{H(k-1)}A^H+\sigma_n^2I \tag{14}$$

空间平滑相关矩阵定义为：

$$\bar{R}=\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}R_k \tag{15}$$

将(14)式代入(15)式得：

$$\bar{R}=A\bar{R}_sA^H+\sigma_n^2I\triangleq\bar{\psi}+\sigma_n^2I \tag{16a}$$

其中

$$\bar{R}_s=\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}D^{(k-1)}R_sD^{H(k-1)} \tag{16b}$$

为空间平滑后等效的信号源相关矩阵，M 为参加空间平滑的子阵列数目，$1\leqslant M\leqslant l-p+1$。

文献[4]中证明了，即便有完全相关（即相干）的信号源存在，只要 $M\geqslant q$，$\bar{R}_s$ 就是满秩的（非奇异的），即 $\bar{R}_s$ 等效于由 q 个非相干源构成。此时，$\bar{\psi}=A\bar{R}_sA^H$ 的秩为 q，在此基础上运用信息论准则，可有效地估计出相干源的数目。

采用空间平滑——信息论判阶法的一个重要条件是：空间平滑子孔径的尺寸必须满足 $p\geqslant q+1$。选子孔径尺寸 $p=[(l+r)/2]+1$（[ ]为取整符号，l 为阵元数，$r=\mathrm{rank}(\psi)$）时，可以满足此条件，这可用唯一性定理来证明。

唯一性定理[5]：秩为 r 的 $L\times L$ 非负定矩阵 ψ，分解成如下形式：

$$\psi=AR_sA^H \tag{17}$$

式中 R_s 是一个无零行矢量的 $q\times q$ 非负定阵，A 是 $l\times q$ 范德蒙矩阵。如果 $q\leqslant(l+r)/2$，则分解式(17)唯一，即存在唯一满足(17)式的 q，R_s 和 A。

考虑线性阵列情况，阵列接收信号的空间相关矩阵为：

$$R=AR_sA^H+\sigma_n^2I \tag{18}$$

记

$$\psi = AR_sA^H \tag{19}$$

于是 $R=\psi+\sigma_n^2 I$。若 σ_n^2 已经知道，则分解式(18)和(19)是等价的，我们只考虑(19)式即可。

当阵列尺寸为 l，空中存在 q 个平面波点源时，(17)式与线性阵列模型完全吻合。由唯一性定理我们知道，若要想根据 R 所携带的信息估计信号源数目，必须满足 $q\leqslant(l+r)/2$。所以选子孔径尺寸 $p=[(l+r)/2]+1$，必有 $p\geqslant q+1$。

为了保证空间平滑后的 $\bar{R}_s$ 满秩，估计出的信号源数目 $\hat{q}$ 必须满足条件：

$$\hat{q}\leqslant l-\left[\frac{(l+r)}{2}\right] \tag{20}$$

到现在为止，我们可以给出改进算法：空间平滑——信息论判阶法估计信号源数目的流程图了，见图 2 。

估计空间相关矩阵 $\hat{R}_{l\times l}$（按(10)式）

↓

$\hat{\psi}=\hat{R}_{l\times l}-\sigma_n^2 I$

计算 $\hat{\psi}$ 的秩 $\mathrm{rank}(\hat{\psi})=r$

↓

选空间子孔径尺寸　$p=[(l+r)/2]+1$，进行空间平滑

↓

求空间平滑后相关矩阵的全部特征值 $\hat{\lambda}_1\geqslant\hat{\lambda}_2\geqslant\cdots\geqslant\hat{\lambda}_p$

↓

计算AIC(k)或MDL(k)值，$k=0,1,\cdots,p-1$（按(11)式或(12)式）

↓

判断源数目。信号源数目等于使AIC(k)或MDL(k)为最小的 k 值

↓

检验 q 是否满足(20)式，若满足，估计有效，否则无效

图 2　用空间平滑—信息论判阶法估计源数目流程图

四、仿真结果

这一节，我们举两个例子来说明空间平滑——信息论判阶法的有效性。

例 1　八阵元线天线阵，两等功率辐射源的入射角分别为 10°,20°,信噪比 SNR= 5dB，两源不相关($\rho=0$)及两源相干($\rho=1$，ρ 为信号源的相关系数)时，在150快拍下，用信息论判阶法及空间平滑——信息论判阶法求得的相关矩阵的特征值及 AIC、MDL 值见表 1 和表 2 。我们看到，用信息论判阶法没能准确地估计出相干源的数目，而用本文提出的改进算法可以准确估计出相干源的数目。

表 1　采用信息论判阶法

表 1-1　两源不相关（$\rho=0$）

k	0	1	2	3	4	5	6	7
λ_{k+1}	40.66	16.61	1.46	1.11	0.93	0.89	0.81	0.72
AIC(k)	1336.72	791.60	133.38	162.64	194.40	221.37	240.42	252.00
MDL(k)	668.36	382.12	41.15	45.75	53.43	60.53	65.49	68.55

判断$\hat{q}=2=q$，结果正确。

表 1-2　两源相干（$\rho=1$）

k	0	1	2	3	4	5	6	7
λ_{k+1}	48.81	1.47	1.21	1.05	0.93	0.88	0.79	0.71
AIC(k)	1539.41	85.17	123.80	161.68	194.62	221.39	240.38	252.00
MDL(k)	769.71	28.91	36.37	45.27	53.54	60.54	65.47	68.55

判断$\hat{q}=1\neq q$，结果不正确

表 2　采用改进算法：空间平滑——信息论判阶法

表 2-1　两源不相关（$\rho=0$），计算得，$r=2$

k	0	1	2	3	4	5
λ_{k+1}	35.51	8.27	1.18	1.07	0.99	0.88
AIC(k)	872.09	348.11	82.84	109.15	128.41	140.00
MDL(k)	436.05	164.02	23.18	29.95	35.02	38.08

判断$\hat{q}=2=q$，结果正确。

表 2-2 两源相干（$\rho=1$），计算得 $r=1$

k	0	1	2	3	4
λ_{k+1}	27.51	2.38	1.14	1.01	0.94
AIC(k)	674.54	75.96	65.30	84.20	96.00
MDL(k)	337.27	29.77	18.06	22.95	26.11

判断 $\hat{q}=2=q$，结果正确。

例 2 条件与例 1 基本相同，只是信噪比降低了，$SNR=0.92$dB。所得结果见表 3、表 4。

表 3 采用信息论判阶法

表 3-1 两源强相关（$\rho=0.9$）

k	0	1	2	3	4	5	6	7
λ_{k+1}	19.20	1.88	1.38	1.15	0.99	0.89	0.85	0.73
AIC(k)	822.50	103.27	129.14	163.52	195.12	221.28	240.67	252.00
MDL(k)	411.25	37.96	39.03	46.19	53.79	60.48	65.62	68.55

判断 $\hat{q}=1\neq q$，结果不正确

表 3-2 两源相干（$\rho=1$）

k	0	1	2	3	4	5	6	7
λ_{k+1}	19.92	1.47	1.20	1.05	0.93	0.88	0.79	0.71
AIC(k)	897.88	84.92	123.51	161.73	194.64	221.41	240.37	252.00
MDL(k)	448.94	28.78	36.22	45.30	53.55	60.55	65.47	68.55

判断 $\hat{q}=1\neq q$，结果不正确。

表 4 采用改进算法：空间平滑——信息论判阶法

表 4-1 两源强相关（$\rho=0.9$），计算得 $r=1$

k	0	1	2	3	4
λ_{k+1}	11.48	1.76	1.13	1.00	0.94
AIC(k)	370.92	52.66	65.25	84.16	96.00
MDL(k)	185.46	18.12	18.03	22.93	26.11

用AIC 判断 $\hat{q}=1\neq q$，不正确；用MDL 判断 $\hat{q}=2=q$，正确。

表 4-2 两源相干（$\rho=1$），计算得 $r=1$

k	0	1	2	3	4
λ_{k+1}	11.51	1.53	1.14	1.01	0.93
AIC(k)	380.47	45.80	65.30	84.17	96.00
MDL(k)	190.23	14.69	18.06	22.94	26.11

判断 $\hat{q}=1\neq q$，结果不正确。

本例说明,改进算法：空间平滑——信息论判阶法在过低SNR情况时会出现误判。误判的原因是因为此时平滑后的$\bar{R}_s$仍近似为奇异阵，$\bar{R}$的特征值中对应于最小信号的特征值与最小特征值σ_n^2很接近。当信号源强相关、小分离角时，也会出现这种情况。

五、乘幂的空间平滑——信息论判阶法

为了进一步提高低信噪比、强相关及小分离角情况的信号源数目的估计精度，我们将空间平滑后的相关矩阵的特征值进行乘幂处理后，再利用信息论准则计算AIC、MDL的值。通过特征值乘幂处理，最小信号对应的特征值的平方与$(\sigma_n^2)^2$的距离拉大了，从而提高了估计源数目的准确度。

仍考虑例2的情况，用乘幂的空间平滑——信息论判阶法得到的结果见表5。我们看到，这时的判断结果是正确的。

表 5 乘幂的空间平滑——信息论判阶法

表 5-1 两源强相关 ($\rho=0.9$)，计算得$r=1$

k	0	1	2	3	4
λ_{k+1}^2	131.82	3.081	1.285	1.01	0.87
AIC(k)	1363.25	105.76	69.03	84.65	96.00
MDL(k)	681.62	44.67	19.93	23.17	26.11

判断$\hat{q}=2=q$，结果正确

表 5-2 两源相干($\rho=1$)，计算得 $r=1$

k	0	1	2	3	4
λ_{k+1}^2	132.58	2.35	1.29	1.01	0.87
AIC(k)	1397.51	76.42	69.21	84.69	96.00
MDL(k)	698.75	30.00	20.02	23.19	26.11

判断$\hat{q}=2=q$，结果正确。

六、总　　结

本文提出的估计相干源数目的算法：空间平滑——信息论判阶法，是先对阵列接收信号进行空间平滑预处理，使预处理后的等效信号源相关矩阵具有满秩特性，这样，估计相干源数目的问题就转成了估计非相干源数目问题。在此基础上，再运用适合于估计非相干源数目的信息论准则，可以较有效地估计出相干源的数目。为了进一步提高信号源强相关、低信噪比、小分离角情况时的源数目估计精度，本文又提出了乘幂的空间平滑——信息论判阶法。计算机仿真结果表明，文中所提出的改进算法能有效地估计相干源的数目，估计精度高，计算量也不大。

感谢陆仲良导师在论文中给予的帮助。

参 考 文 献

[1] M.Wax and T.Kailath, Detection of Signals by Information Theoretic Criteria, IEEE Trans., ASSP—33, No.2, pp387—392, April, 1985.

[2] A.Z.Di and L.S.Tain, Matrix Decomposition and Multiple Sources Location, in

Proc. IEEE ICASSP'84, San Diego, CA, pp33.4.1—33.4.4.

[3] A.Z.Di, Multiple Source Location—A Matrix Decomposition Approach, IEEE Trans., ASSP—33, No.4, pp1086—1091, Oct., 1985.

[4] T.J.Shan, M.Wax and T.Kailath, On Spatial Smoothing for Direction-of-Arrival Estimation of Coherent Signals, IEEE Trans., ASSP-33, No.4, pp806-811, Aug., 1985.

[5] 狄昂照，多声源定位的存在唯一性问题，系统科学与数学，6(3)，pp161—168，1986.

An Improved Method for Estimation of the Number of Coherent Sources

Zhao Binsheng

Abstract

An improved method called spatial smoothing—criteria of information theory is presented based on W.Wax and T.Kailath's criteria of information theoretic used for estimation of the number of noncoherent sources. Compared to the WK's method, this improved one can be used to estimate the number of coherent sources and to raise estimating accuracy in case of high correlation, small-angle-separation or low SNR.

The power spatial smoothing——information theoretic criteria method is also presented in order to obtain higher accuracy. Simulation results have been proved to be of the effectiveness of the improved method.