国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八七年第四期　总第六十期　No.4 1987 Sum. 60

时延数字控制系统最优控制问题的离散正交多项式解法

金　梁

（自动控制系）

摘要：本文利用一般的离散正交多项式研究了具有$2s$个时延项离散系统的最优控制问题。文中导出了系统状态和控制向量离散正交级数展开式中系数向量间的关系，然后，将离散动态系统的最优控制问题转化为直接对二次型性能指标中一组系数向量的参数优化问题，并由一组线性代数方程给出了这组最优系数向量的解。最后，还介绍了一个数值例子。

关键词　最优控制；时延数字系统；离散正交多项式

1. 引　言

近年来，各种正交函数已被用来分析和设计控制系统，其目的是利用正交函数得到一些控制问题的有效算法。对于连续时间系统，Legendre 多项式、Laguerre 多项式、Chebyshev 多项式，Walsh 多项式和方波函数等已被用来处理辨识、分析和控制问题。而在离散时间的情形，离散Laguerre 多项式、离散 Chebyshev 多项式等已被采用来讨论数字系统的最优控制问题[2][3]。本文利用离散正交多项式的统一表达形式[4]研究了时延离散系统的最优控制问题。文中分段地将系统的状态和控制向量进行离散正交多项式展开，导出了状态和控制向量展开式系数向量间的关系，并将离散动态系统的最优控制问题简化为直接对二次型性能指标中一组系数向量的优化问题，由一组线性代数方程给出了这组最优系数向量的解。最后，给出了一个数值例子。

2. 序列的离散正交多项式展开

一般的离散正交多项式，如Chebyshev、Legendre 和 Laguerre 多项式等均满足如下的递推关系[4]

$$z_{i+1}(k)=(a_ik+b_i)z_i(k)+c_iz_{i-1}(k);\quad i,j=0,1,\cdots,N-1 \tag{1}$$

$$z_i(k)=0,\quad i<0 \tag{2}$$

本文1986年12月6日收到

其中a_i、b_i和c_i称为递归系数，其值由一些特殊的离散多项式确定。归一化的离散正交多项式$\{z_i(k)\}$满足正交性条件

$$\sum_{k=0}^{N-1} z_i(k) z_j(k) = \sigma_{ij}, \quad i,j=0,1,\cdots,N-1 \tag{3}$$

其中δ_{ij}为Kronecker函数。

对于任意序列$f(k)$，$(k=0,1,\cdots,N-1)$，可利用离散正交多项式$\{z_i(k)\}$将其展开为

$$f(k) = \sum_{i=0}^{N-1} f_i z_i(k) = f^T z(k) \tag{4}$$

其中$z(k)=[z_0(k),z_1(k),\cdots,z_{N-1}(k)]^T$称为正交多项式向量，$f=[f_0,f_1,\cdots,f_{N-1}]^T$称为序列$f(k)$的正交多项式系数向量，系数$f_i$可由如下的公式确定

$$\varepsilon = \sum_{k=0}^{N-1}\left[f(k) - \sum_{i=0}^{N-1} f_i z_i(k)\right]^2 = \min \tag{5}$$

因此，有

$$f_i = \sum_{k=\cdot}^{N-1}\left(\sum_{j=0}^{N-1} f_j z_j(k)\right) z_i(k) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) z_i(k) \tag{6}$$

$$i=0,1,2,\cdots,N-1$$

并且正交多项式向量 $z(k+l)$和 $z(k)$之间具有如下的线性平移变换关系

$$z(k+l) = T^l z(k) \tag{7}$$

其中

$$T = \begin{pmatrix} t_{00} & & & 0 \\ t_{10} & t_{11} & & \\ t_{20} & t_{21} & t_{22} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ t_{N-1,0} & t_{N-1,1} & t_{N-1,2}\cdots & t_{N-1,N-1} \end{pmatrix} \tag{8}$$

称为平移变换矩阵，可导出T的各元素由下式计算[4]

$$\begin{cases} t_{ii} = t_{0,0}, \quad i=2,3,\cdots,N-1 \\ t_{ij} = c_i t_{i-2,j} + (a_{i-1}(1-b_j/a_j) + b_{i+1}) t_{i-1,j} + a_{i-1}/a_{j-1} t_{i-1,j-1} \\ \qquad - (a_{i-1}/a_{j+1}) c_{j+1} t_{i-1,j+1}, \quad j=0,1,\cdots,N-2; i=j+1,\cdots,N-1 \\ t_{ij} = 0, \quad j>i \end{cases} \tag{9}$$

在本文的附录中给出了各种a_i、b_i和c_i的表达式和相应情况下的T.

3. 状态和控制向量展开式中系数向量间的关系

考虑具有$2s$个时延项的离散系统

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_0 x(k) + A_1 x(k-\tau_1) + \cdots + A_s x(k-\tau_s) \\ &\quad + B_0 u(k) + B_1 u(k-\tau_1) + \cdots + B_s u(k-\tau_s) \\ &= \sum_{i=0}^{s} A_i x(k-\tau_i) + \sum_{i=0}^{s} B_i u(k-\tau_i) \end{aligned} \tag{10}$$

$$x(k) = x_k、u(k) = u_k, \quad -\tau_s \leqslant k < 0, \quad x(0) = x_0 \tag{11}$$

其中A_i 和 B_i 分别为 $n\times n$ 维和 $n\times r$ 维矩阵，$x(k)$为 n 维状态向量，$u(k)$为 r 维控制向

量，时延常数$0=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_s$.

利用离散正交多项式向量$z(k)$，可假设状态和控制向量具有如下的展开式

$$x(k-\tau_i)=p^T(i)z(k)、u(k-\tau_i)=W^T(i)z(k);\ i=1,\cdots,s;\ 0\leqslant k<\tau_i \tag{12}$$

和

$$x(k)=G^T(j)z(k),u(k)=H^T(j)z(k),j=1,2,\cdots,s+1;\ \tau_{j-1}\leqslant k<\tau_j \tag{13}$$

其中 $\tau_{s+1}=N+1$.

将上两式代入（10）式中，有

$$\begin{aligned}G^T(j)z(k+1)=&\sum_{i=0}^{j-1}A_iG^T(j)z(k-\tau_i)+\sum_{i=j}^{s}A_iP^T(i)z(k)\\&+\sum_{i=0}^{j-1}B_iH^T(j)z(k-\tau_i)+\sum_{i=j}^{s}B_iW^T(i)z(k)\\&j=1,2,\cdots,s+1\end{aligned} \tag{14}$$

注意到$z(k)$的平移特性，并在上式两端消去$z(k)$，有

$$\begin{aligned}G^T(j)=&\sum_{i=0}^{j-1}A_iG^T(j)T^{-\tau_i-1}+\sum_{i=j}^{s}A_iP^T(i)T^{-1}\\&+\sum_{i=0}^{j-1}B_iH^T(j)T^{-\tau_i-1}+\sum_{i=j}^{s}B_iW^T(i)T^{-1}\end{aligned} \tag{15}$$

设

$$(T^{-l})^T=[t_{ij}^{(l)}]_{N\times N},\ l=1,2,\cdots \tag{16}$$

则$t_{ij}^{(l)}$可由如下的公式计算

$$\begin{cases}t_{ii}^{(1)}=1/t_{00},t_{ii}^{(2)}=1/t_{00}^2,\cdots,t_{ii}^{(l)}=1/t_{00}^l;\quad i=0,1,\cdots,N-1\\t_{ij}^{(1)}=-1/t_{00}\sum\limits_{k=i}^{j-1}t_{j,k}t_{i,k}^{(1)},t_{i,j}^{(2)}=\sum\limits_{k=0}^{j-1}t_{i,k}^{(1)}t_{k,j}^{(1)},\cdots,t_{i,j}^{(l)}=\sum\limits_{k=0}^{j-1}t_{i,k}^{(l-1)}t_{k,j}^{(1)}\\i=0,1,\cdots,N-2;\ j=i+1,i+2,\cdots,N-1\\t_{ij}^{(l)}=0,\ i>j\end{cases} \tag{17}$$

若记

$$\begin{cases}G^T(j)=[g_0(j),g_1(j),\cdots,g_{N-1}(j)],\ H^T(j)=[h_0(j),h_1(j),\cdots,h_{N-1}(j)]\\P^T(i)=[P_0(i),P_1(i),\cdots,P_{N-1}(i)],\ W^T(i)=[W_0(i),W_1(i),\cdots,W_{N-1}(i)]\\j=1,2,\cdots,s+1;\ i=1,2,\cdots,s\end{cases} \tag{18}$$

则采用Kronecker乘积$\otimes$，不难从15式中将$G^T(j)$解得为

$$\left[I_{mn}-\sum_{i=0}^{j-1}(T^{-\tau_i-1})^T\otimes A_i\right]\begin{bmatrix}g_0(j)\\g_1(j)\\\vdots\\g_{N-1}(j)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V_0(j)\\V_1(j)\\\vdots\\V_{N-1}(j)\end{bmatrix} \tag{19}$$

其中

$$\begin{cases} V_0(j)=\sum\limits_{l=0}^{N-1}\left[\sum\limits_{i=0}^{j-1}B_it_{0,l}^{(\tau_i+1)}h_l(j)+\sum\limits_{i=j}^{s}A_it_{0,l}^{(1)}P_l(i)+\sum\limits_{i=j}^{s}B_it_{0,l}^{(1)}W_l(i)\right] \\ V_1(j)=\sum\limits_{l=1}^{N-1}\left[\sum\limits_{i=0}^{j-1}B_it_{1,l}^{(\tau_i+1)}h_l(j)+\sum\limits_{i=j}^{s}A_it_{1,l}^{(1)}P_l(i)+\sum\limits_{i=j}^{s}B_it_{1,l}^{(1)}W_l(i)\right] \\ \vdots \\ V_{N-1}(j)=\sum\limits_{i=0}^{j-1}B_it_{N-1,N-1}^{(\tau_i+1)}h_{N-1}(j)+\sum\limits_{i=j}^{s}A_it_{N-1,N-1}^{(1)}P_{N-1}(i)+\sum\limits_{i=j}^{s}B_it_{N-1,N-1}^{(1)}W_{N-1}(i) \end{cases} \tag{20}$$

将(16)式代入(19)式左端的系数阵中，有

$$\left[I_{mn}-\sum_{i=0}^{j-1}(T^{-\tau_i-1})^T\otimes A_i\right]$$

$$=\begin{pmatrix} I_n-\sum\limits_{i=0}^{j-1}t_{00}^{(\tau_i+1)}A_i & -\sum\limits_{i=0}^{j-1}t_{01}^{(\tau_i+1)}A_i & \cdots & -\sum\limits_{i=0}^{j-1}t_{0,N-1}^{(\tau_i+1)}A_i \\ & I_n-\sum\limits_{i=0}^{j-1}t_{00}^{(\tau_i+1)}A_i & \ddots & \vdots \\ & & & -\sum\limits_{i=0}^{j-1}t_{N-2,N-1}^{(\tau_i+1)}A_i \\ 0 & & & I_n-\sum\limits_{i=0}^{j-1}t_{00}^{(\tau_i+1)}A_i \end{pmatrix} \tag{21}$$

把上式代入19式中，有

$$\begin{cases} \left[I_n-\sum\limits_{i=0}^{j-1}t_{00}^{(\tau_i+1)}A_i\right]g_0(j)-\sum\limits_{i=0}^{j-1}t_{01}^{(\tau_i+1)}A_ig_1(j)-\cdots \\ \qquad -\sum\limits_{i=0}^{j-1}t_{0,N-1}^{(\tau_i+1)}A_ig_{N-1}(j)=V_0(j) \\ \left[I_n-\sum\limits_{i=0}^{j-1}t_{00}^{(\tau_i+1)}A_i\right]g_1(j)-\sum\limits_{i=0}^{j-1}t_{12}^{(\tau_i+1)}A_ig_2(j)-\cdots \\ \qquad -\sum\limits_{i=0}^{j-1}t_{1,N-1}^{(\tau_i+1)}A_ig_{N-1}(j)=V_1(j) \\ \qquad\vdots \\ \left[I_n-\sum\limits_{i=0}^{j-1}t_{00}^{(\tau_i+1)}A_i\right]g_{N-2}(j)-\sum\limits_{i=0}^{j-1}t_{N-2,N-1}^{(\tau_i+1)}A_ig_{N-1}(j)=V_{N-2}(j) \\ \left[I_n-\sum\limits_{i=0}^{j-1}t_{00}^{(\tau_i+1)}A_i\right]g_{N-1}(j)=V_{N-1}(j) \end{cases} \tag{22}$$

则可解得

$$g_i(j)=\sum_{l=i}^{N-1}\left[e_{i,l}(j)h_l(j)+d_{i,l}(j)\sum_{k=j}^{s}(A_kp_l(k)+B_kW_l(k))\right] \tag{23}$$

$$i=0,1,2,\cdots,N-1;\quad j=1,2,\cdots,s+1$$

其中

$$\begin{cases} e_{i,l}(j)=\left[I_n-\sum\limits_{k=0}^{j-1}t_{00}^{(\tau_k+1)}A_k\right]^{-1}\left[\sum\limits_{k=0}^{j-1}B_kt_{i,l}^{(\tau_k+1)}+\sum\limits_{r=i+1}^{l}\sum\limits_{k=0}^{j-1}t_{i,r}^{(\tau_k+1)}A_ke_{r,l}(j)\right] \\ d_{i,l}(j)=\left[I_n-\sum\limits_{k=0}^{j-1}t_{00}^{(\tau_k+1)}A_k\right]^{-1}\left[t_{i,l}^{(1)}+\sum\limits_{r=i+1}^{l}\sum\limits_{k=0}^{j-1}t_{i,r}^{(\tau_k+1)}A_kd_{r,l}(j)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_{ii}(j)=\left[I_n-\sum\limits_{k=0}^{j-1} t_{00}^{(\tau_k+1)}A_k\right]^{-1}\sum\limits_{k=0}^{j-1} B_k t_{i,i}^{(\tau_k+1)} \\ d_{ii}(j)=\left[I_n-\sum\limits_{k=0}^{j-1} t_{00}^{(\tau_k+1)}A_k\right]^{-1} t_{ii}^{(1)} \end{cases} \tag{24}$$

4. 最优控制问题的近似解法

对于时延离散系统(10)式，取二次型性能指标为

$$J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\{\|x(k)\|^2_{Q(k)}+\|u(k)\|^2_{R(k)}\} \tag{25}$$

其中$Q(k)$和$R(k)$均为正定的权矩阵，则最优控制问题即是选取$u(0),u(1),\cdots u(N-1)$，使得$x(0)=x_0$，$x(N)=x_N$和$J=\min$.

不妨引入增广性能指标

$$\begin{aligned}\tilde{J}&=\|x(0)-x_0\|^2_{Q0}+\|x(N)-x_N\|^2_{QN}\\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\{\|x(k)\|^2_{Q(k)}+\|u(k)\|^2_{R(k)}\}\\ &\triangleq J_1+J_2+\cdots+J_s+J_{s+1}\end{aligned} \tag{26}$$

其中Q_0、$Q_N>0$，并且

$$\begin{cases} J_1=\|x(0)-x_0\|^2_{Q_0}+\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\tau_1-1}\{\|x(k)\|^2_{Q(k)}+\|u(k)\|^2_{R(k)}\} \\ J_2=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\tau_2-1}\{\|x(k)\|^2_{Q(k)}+\|u(k)\|^2_{R(k)}\} \\ \quad\vdots \\ J_s=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=\tau_{s-1}}^{\tau_s-1}\{\|x(k)\|^2_{Q(k)}+\|u(k)\|^2_{R(k)}\} \\ J_{s+1}=\|x(N)-x_N\|^2_{Q_N}+\frac{1}{2}\sum\limits_{k=\tau_s}^{N-1}\{\|x(k)\|^2_{Q(k)}+\|u(k)\|^2_{R(k)}\} \end{cases} \tag{27}$$

将$x(k)$和$u(k)$的离散正交级数展开式(13)代入上式中，得

$$\begin{cases} J_1=\left\|\sum\limits_{i=0}^{N-1} g_i(1)z_i(0)-x_0\right\|^2_{Q_0}+\frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\tau_1-1}\left\{\left\|\sum\limits_{i=0}^{N-1} g_i(1)z_i(k)\right\|^2_{Q(k)}\right. \\ \qquad\left.+\left\|\sum\limits_{i=0}^{N-1} h_i(1)z_i(k)\right\|^2_{R(k)}\right\} \\ J_2=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=\tau_1}^{\tau_2-1}\left\{\left\|\sum\limits_{i=0}^{N-1} g_i(2)z_i(k)\right\|^2_{Q(k)}+\left\|\sum\limits_{i=0}^{N-1} h_i(2)z_i(k)\right\|^2_{R(k)}\right\} \\ \quad\vdots \\ J_s=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=\tau_{s-1}}^{\tau_s-1}\left\{\left\|\sum\limits_{i=0}^{N-1} g_i(s)z_i(k)\right\|^2_{Q(k)}+\left\|\sum\limits_{i=0}^{N-1} h_i(s)z_i(k)\right\|^2_{R(k)}\right\} \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} J_{s+1}=\left\|\sum_{i=0}^{N-1}g_i(s+1)z_i(N)-x_N\right\|^2_{Q_N}+\frac{1}{2}\sum_{k=\tau_s}^{N-1}\left\{\left\|\sum_{i=0}^{N-1}g_i(s+1)z_i(k)\right\|^2_{Q(k)}\right. \\ \left.\qquad+\left\|\sum_{i=0}^{N-1}h_i(s+1)z_i(k)\right\|^2_{R(k)}\right\} \end{cases}$$

则最优控制$u^*(k)$所对应的正交多项式展开系数向量$h_i(j)$应满足的关系，均可直接由性能指标J_j求极值得出，即有最优性条件

$$\partial J_j/\partial h_i(j)=0,\ \ j=1,2,\cdots,s+1;\ \ i=0,1,\cdots,N-1 \tag{29}$$

而利用(23)式，不难求得

$$\begin{cases}\partial g_i(j)/\partial h_l(j)=e^T_{il}(j),i=0,1,\cdots,N-1;\ \ l=i,i+1,\cdots,N-1\\ \partial g_i(j)/\partial h_l(j)=0 \qquad i=0,1,\cdots,N-1;\ \ l=0,1,\cdots,i-1\end{cases} \tag{30}$$

这时，即可由(28)至(30)式导出最优状态和控制的展开系数向量$g_i(j)$和$h_i(j)$满足如下的方程组

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_{ij}(1)g_i(1)+\sum_{i=0}^{N-1}f_{ij}(1)h_i(1)=q_j,\ \ j=0,1,\cdots,N-1\\ \sum_{i=0}^{N-1}r_{ij}(l)g_i(l)+\sum_{i=0}^{N-1}f_{ij}(l)h_i(l)=0,\ \ l=2,3,\cdots,s\\ \sum_{i=0}^{N-1}\eta_{ij}(s+1)g_i(s+1)+\sum_{i=0}^{N-1}f_{ij}(s+1)h_i(s+1)=s_j,\ j=0,1,\cdots,N-1\end{cases} \tag{31}$$

其中

$$\begin{cases}\alpha_{ij}(1)=2\sum_{p=0}^{j}e^T_{p,j}(1)z_p(0)z_i(0)Q_0+r_{ij}(1)\\ q_j=2\sum_{p=0}^{j}e^T_{p,j}(1)z_p(0)Q_0x_0\\ r_{ij}(l)=\sum_{k=\tau_{l-1}}^{\tau_l-1}\ \sum_{p=0}^{j}z_i(k)z_p(k)e^T_{p,j}(l)\,Q(k)\\ f_{ij}(l)=\sum_{k=\tau_{l-1}}^{\tau_l-1}R(k)z_i(k)z_j(k)\\ \eta_{ij}(s+1)=2\sum_{p=0}^{j}e^T_{p,j}(s+1)z_p(N)Q_Nz_i(N)+r_{ij}(s+1)\\ s_j=2\sum_{p=0}^{j}e^T_{p,j}(s+1)z_p(N)Q_Nx_N\\ i,j=0,1,\cdots,N-1;\ \ l=1,2,\cdots,s+1\end{cases} \tag{32}$$

进一步的利用(23)式从(31)的第一式中消去$g_i(1)$，得

$$\sum_{i=0}^{N-1}\zeta_{ij}h_i(1)=\sigma_j,\ \ j=0,1,\cdots,N-1 \tag{33}$$

其中

$$\begin{cases}\zeta_{ij}=f_{ij}(1)+\sum_{k=0}^{i}\alpha_{k,j}(1)e_{k,i}(1)\\ \sigma_j=q_j-\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=i}^{N-1}\left\{\alpha_{ij}(1)d_{ik}(1)\sum_{r=1}^{s}(A_rP_k(r)+B_rW_k(r))\right\}\end{cases} \tag{34}$$

同理，从31后二式中消去$g_i(l)$和$g_i(s+1)$，有

$$\sum_{i=0}^{N-1}\gamma_{ij}(l)h_i(l)=\beta_j(l),\ l=2,3,\cdots,s;\ j=0,1,\cdots,N-1 \tag{35}$$

和

$$\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_{ij}h_i(s+1)=s_j,\ j=0,1,\cdots,N-1 \tag{36}$$

其中

$$\begin{cases}\gamma_{ij}(l)=f_{ij}(l)+\sum\limits_{k=0}^{i}r_{k,j}(l)\,e_{k,i}(l)\\ \beta_j(l)=-\sum\limits_{i=0}^{N-1}\sum\limits_{k=i}^{N-1}\left\{r_{ij}(l)d_{ik}(l)\sum\limits_{r=l}^{s}(A_rP_k(r)+B_rW_k(r))\right\}\\ \lambda_{ij}=f_{ij}(s+1)+\sum\limits_{k=0}^{i}\eta_{k,j}(s+1)e_{k,i}(s+1)\end{cases} \tag{37}$$

5. 数 值 例 子

设有时延离散系统

$$x(k+1)=2x(k)+0.5x(k-4)+2u(k)$$

$$x(k)=0,\ u(k)=0,\ -4\leqslant k<0$$

二次型性能指标取为

$$J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{9}\{2x^2(k)+u^2(k)\}=\min$$

初始和终端条件为$x_0=1$和$x_{10}=0$，选取$Q_0=Q_N=100$，分别采用离散Laguerre、Chebyshev和Legendre多项式来近似计算上述最优控制问题。求解线性代数方程(33)和(36)式得最优控制展开式中的系数向量$h_i(1)$和$h_i(2)$ $(i=0,1,\cdots,9)$并由(13)式计算得最优控制$u^*(k)$如表1所示，然后，由(38)式计算得$g_i(1)$和$g_i(2)$ $(i=0,1,\cdots,9)$，并由(13)式计算得最优状态$x^*(k)$如表2所示。在采用离散Laguerre多项式进行计算时，取可调参数$s=0.1$。限于本文的篇幅$h_i(1)$、$h_i(2)$和$g_i(1)$、$g_i(2)$的计算结果未在此处列出。

表 1

k	u(k)		
	Laguerre	Chebyshev	Legendre
0	-0.618273	-0.618256	-0.618261
1	-0.467418	-0.467409	-0.467374
2	-0.388460	-0.388593	-0.388417
3	-0.350941	-0.350904	-0.350981
4	-0.309608	-0.309652	-0.309584
5	-0.281604	-0.281638	-0.281614
6	-0.178196	-0.178199	-0.178367
7	-0.103940	-0.103872	-0.103981
8	-0.028355	-0.028304	-0.028294
9	-0.026625	-0.026608	-0.026652
10	-0.017307	-0.017340	-0.017364

表 2

k	$x(k)$		
	Laguerre	Chebyshev	Legendre
0	1.000014	1.000009	0.999745
1	0.763482	0.763507	0.763452
2	0.592128	0.592115	0.592120
8	0.407336	0.407314	0.407358
4	0.112790	0.112752	0.112764
5	0.106364	0.106308	0.106387
6	0.031261	0.031251	0.031218
7	0.002194	0.002175	0.002230
8	0.000176	0.000128	0.000201
9	0.000035	0.000031	0.000025
10	0.000001	0.000006	0.000002

6. 结 束 语

本文利用几种不同的离散正交多项式研究了具有时延离散系统最优控制问题的近似解法，使得系统在二次型性能指标下，最优状态向量$x^*(k)$和控制向量$u^*(k)$的求取归结为一组线性代数方程组的求解问题，所得结果简单和便于使用。数值例子的结果是令人满意的。有关利用离散正交多项式研究时延离散系统辨识问题的结果，拟在另文中叙述。

附录 递归系数 a_i、b_i、c_i 和矩阵 T

1. 离散 Laguerre 多项式

$$a_i=s^{-1/2}(1-s)/i+1,\ \ b_i=-s^{-1/2}(i+(i+1)s)/i+1,\ \ c_i=-i/i+1$$

和

$$T=\begin{pmatrix} d & & & & & 0 \\ r & d & & & & \\ (-d)r & r & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & & & d & \\ (-d)^{N-2}r & (-d)^{N-3}r & \cdots & (-d)r & r & d \end{pmatrix}$$

其中$s\in(0,1)$为可调因子，且

$$z_{-1}(k)=0,\ \ z_0(k)=((1-s)s^k)^{1/2}$$

2. 离散Chebyshev 多项式

$$a_i=-2B_{i+1}/i+1,\quad b_i=(N-1)B_{i+1}/i+1,\quad c_i=-iB_{i+1}/(i+1)B_i$$

和

$$T=\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ -2B_1 & 1 & & & \\ 2B_1B_2 & -2B_2 & 1 & & \\ t_{30} & 2B_2B_3 & -2B_3 & 1 & \\ t_{40} & t_{41} & 2B_3B_4 & -2B_4 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ t_{N-1,0} & t_{N-1,1} & t_{N-1,2} & t_{N-1,3}\cdots & 1 \end{pmatrix}$$

其中

$$B_i=((2i-1)(2i+1)/N^2-i^2)^{1/2},\quad z_{-1}(k)=0,\quad z_0(k)=N^{-1/2}$$

和

$$t_{ij}=\left(t_{i-1,j+1}\frac{j+1}{B_{j+1}}-2t_{i-1,j}+t_{i-1,j-1}\frac{j}{B_j}-t_{i-2,j}\frac{i-1}{B_{j-1}}\right)B_i/i$$

$$j=0,1,\cdots,N-2;\quad i=j+1,\cdots,N-1$$

3. 离散 Legendre 多项式

$$a_i=-2(2i+1)/(i+1)(N-i),\quad b_i=N(2i+1)/(i+1)(N-i)$$

$$c_i=-i(N+i+1)/(i+1)(N-i),\quad z_{-1}(k)=0,\quad z_0(k)=1$$

和

$$T=\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ t_{10} & 1 & & \\ t_{20} & t_{21} & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ t_{N-1,0} & t_{N-1,1} & t_{N-1,2}\cdots & 1 \end{pmatrix}$$

其中t_{ij}由(9)式计算。

参 考 文 献

[1] Jamshidi, M., Large-Scale Systems, modeling and Control Series, Vol. 9, Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1983

[2] Horng, I.R.and Ho, S.J., Optimal Control Using Discrete laguerre Polynomials, Int. J.Control, 1985, Vol. 41,No6, 1613-1619.

[3] Horng, I. R. and Ho. S. J., Application of discrete Chebyshev polnomials to the optimal control of digital systems, Int. J.Control, 1985, Vol. 42, No.1, 243-250.

[4] Lee, T.T.and Tsay, Y.F., Application of general discrete orthogonal

polynomials to optimal control systems, Int. J.control, 1986, Vol. 43, No. 5, 1375-1386.

[5] 金梁：离散时间线性系统的干扰不变性原理及其应用，宇航学报。1987年第3期。

Approximation Solution for Optimal Control Problems Time-Delay Digital Systems Via Discrete Orthogonal Polynomials

Jin Liang

Abstract

In this paper, optimal control problem of time-delay digital control system has been studied using discrete orthogonal polynomials. The relationship between the state coefficient vector and control coefficient vector is obtained. The discrete orthogonal polynomials are used to modify the optimal equations into a set of linear algebraic ones for the approximate solutions of optimal state and control variables. Finally, a practical example is given by using discrete Chebyshev polynomial, discrete Laguerre polynomial and discrete Legendre polynomial, and the results obtained are satisfactoy.

key words: Optimal control; Time-delay digital systems; Discrete orthogonal polynomials.