国 防 科 技 大 学 学 报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第10卷第1期 1988年3月 Vol.10 No.1

在非高斯弱相关噪声中弱信号的最佳检测

高 志 勇

(电子技术系)

摘要 本文探讨了仅已知噪声一维分布和二阶统计特性的条件下非高斯无穷相关噪声中确知弱信号的最佳检测问题。在假设噪声为一阶AR过程 $n_i = y_i + \rho n_{i-1}$ 的情况下，以最优化检测器的渐近相对效验为准则。并对 ρ 取一阶和二阶近似的意义下，分别得到了最佳有记忆和无记忆检测器的闭式解。推证和比较了它们同非高斯白噪声中的最佳检测器在结构上的异同和性能上的改进程度。最后给出了几个典型的实际例子。

关键词 最佳信号检测，噪声，非高斯弱相关

1. 引 言

经典检测理论以Neyman-Pearson准则已经圆满地解决了高斯噪声和非高斯白噪声背景下信号的最佳检测问题。但在处理非高斯相关噪声时却遇到了困难。Neyman-Pearson准则要求知道噪声过程的任意有限维分布族，而实际中一般仅已知噪声的边缘分布和二阶统计特性，这就无法确定噪声的任意 N 维分布，因此也就得不到N－P意义下的最佳结构。正是由于这种根本性的困难，在离散时间信号的最佳检测理论中，噪声样本的独立性仍为一个基本的假设。这显然与大多数实际情况不符。随着高速采样器的发展和信号环境的复杂化。噪声样本的相关性越来越成为一个不可忽视的问题。1979年Poor和Thomas[1]首先研究了在平稳有限相关噪声中常信号的最佳无记忆检测问题。接着Halverson和Wise[2]研究了在 φ—混合噪声中确知信号的最佳检测问题和用多项式对最佳结构的近似[3]。这标志着最佳信号检测理论进入了处理非高斯有色噪声过程的阶段。在讨论非高斯检测问题时普遍使用的准则是最优化检测器的渐近相对效验(ARE)。这是一个非常有效的指标，尤其对弱信号是如此。因为局部最佳检测器（LOD）就是使效验达最大的检测器。效验反映了两个检测器在同样的错误概率下，在信噪比很小时观测样本数的比例或在样本数 $n\to\infty$ 时信噪比的差别。在使用效验最大化准则时，虽然仅需知道噪声过程的二维分布，但对于非高斯过程一般也很难做到这一点。在噪声相关性比较弱的情况下，Poor[4]利用Protony提出的MA模型得到了在有限相关噪声中的最佳无记忆检测器的一阶近似表达式，它仅由噪声的一维分布和二阶矩所确定。

然而许多过程都不是有限相关的。例如连续时间的限带过程和一大类马尔可夫过程

1987年8月20日收到。作者为清华大学博士生

都是无穷相关的。正因如此，有必要研究在无穷相关噪声中的最佳检测问题。实际中最典型的噪声相关函数是指数衰减型，这类噪声常可用一阶AR过程来描述。本文推进了Poor的工作。在假设噪声服从一阶AR模型的基础上，以最大化效验为准则，在一级和二级近似的意义下分别导出了最佳有记忆和无记忆两种检测器的闭式解，并详细地比较了它们在性能和结构上与白噪声时的最佳检测器的异同。最后还比较了它们与线性检测器性能上的差别。

2. 问题的提出

设噪声序列$\{n_i\}$为具有对称概率密度函数$f(x)$的零均值的一阶AR过程，

$$n_i=\rho n_{i-1}+y_i \qquad i=1,2,\cdots,N \tag{1}$$

其中$\{y_i\}$为$i\cdot i\cdot d\cdot$的随机序列，具有对称概率密度$g(x)$。为保证y_i的平稳，可设$n_0=n_N$. 显然有：$k\geqslant 0$时，$E\{n_i\ n_{i+k}\}=\sigma_n^2\rho^k$。

n_i为实际噪声样本，它的边缘分布F是已知的，而y_i的边缘分布G则未知。由于下面的讨论要涉及到y_i的统计特性，必须研究F和G的关系。为此给出

定理 1 若$f(x)$对称且有有限二阶矩，它的特征函数$\Phi_n(u)$使$\int u^2|\Phi_n(u)|du<\infty$，则当$\rho$充分小时$f$与$y_i$的边缘密度$g$有下列关系

$$f(x)=g(x)+O(\rho^2) \tag{2}$$

证 见附录。

从定理1的证明知，当$\Phi_n(u)$为偶函数时，$\Phi_y(u)$亦然，故$g(x)$也是偶函数。类似定理1，还有以下定理。

定理 2 在定理1的条件下，若还有$|g'''(x)|<\infty$几乎处处成立，且f和g均具有有限的Fisher信息量，即

$$I(f)=\int(f')^2/f<\infty,\ \ I(g)=\int(g')^2/g<\infty$$

则有

$$I(f)=I(g)+O(\rho^2) \tag{3}$$

从以上结果可以看出，当ρ很小时，在对相关系数ρ取一阶近似意义下，可分别用f和$I(f)$去代替g和$I(g)$。

3. 有记忆的最佳检测器

考虑检测问题：

$$H_0:\ x_i=n_i \qquad H_1:\ x_i=\theta+n_i \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{4}$$

令

$$\boldsymbol{X}=(x_1,\ x_2,\cdots,x_N)^T \qquad \boldsymbol{N}=(n_1,\ n_2,\cdots,n_N)^T$$

$$\boldsymbol{e}=(1,\ 1,\cdots,1)^T \qquad \boldsymbol{Y}=(y_1,\ y_2,\cdots,y_N)^T$$

则有$X=\theta\boldsymbol{e}+\boldsymbol{N}$ 这是有信号情况，对于无信号情况，只要令$\theta=0$即可。

由(1)

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{S}\boldsymbol{N}$$

其中

$$S=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \rho \\ \rho & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \rho & 0 \end{pmatrix}_{N\times N}$$

所以 $\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})\boldsymbol{N}=\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{N}\qquad \boldsymbol{N}=\boldsymbol{S}_1^{-1}\boldsymbol{Y}$

$$\boldsymbol{S}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\rho \\ -\rho & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

这样对有信号情况 $\boldsymbol{X}=\theta\boldsymbol{e}+\boldsymbol{S}_1^{-1}\boldsymbol{Y}$

所以

$$\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{X}=\theta\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{e}+\boldsymbol{Y} \tag{5}$$

于是得到了等效于(4)的假设检验

$$H_0:\ z_i=y_i \qquad H_1:\ z_i=(1-\rho)\theta+y_i \tag{6}$$

其中 $z_i=x_i-\rho x_{i-1}$

由于 y_i 是 $i\cdot i\cdot d\cdot$的，在H_0 和H_1 下 z_i 的分布密度分别为 $g(z)$和 $g(z-(1-\rho)\theta)$

令检验统计量

$$T_N(\boldsymbol{Z})=\sum_{i=2}^{N}W(z_i)\qquad 且设\ EW(z_i)=0$$

定义检验Φ：

$$\Phi(\boldsymbol{Z})=\begin{cases}1 & 当\ T_N(\boldsymbol{Z})\geqslant\gamma \\ 0 & 当\ T_N(\boldsymbol{Z})<\gamma\end{cases} \tag{7}$$

$$E[\Phi(\boldsymbol{Z})\,|H_0]=\alpha \tag{8}$$

其中门限 γ 由(8)确定。此检验的效验

$$\eta=[E_GW'(z)]^2/E_GW^2(z)$$

当$W(z)=-g'/g$时 η 达最大值 $I(g)=\int(g')^2/g$. 但由于 g 未知，因此由定理 1，得

$$E_GW'(z)=E_FW'(z)+O(\rho^2),\qquad E_GW^2(z)=E_FW^2(z)+O(\rho^2)$$

故效验

$$\eta=[E_FW'(z)]^2/E_FW^2(z)+O(\rho^2) \tag{9}$$

在一阶近似意义下，使$[E_FW'(z)]^2/E_FW^2(z)$达最大的$W_1=-f'(z)/f(z)$。此时效验

$$\eta(W_1)=I(f)+O(\rho^2) \tag{10}$$

由上可见，在一级近似意义下的最佳有记忆检测器的结构为噪声独立时的最佳检测器（LOD）前面加一级白化滤波器。

4. 无记忆最佳检测器

设噪声序列 n_i 为一平稳序列，M_a^b 表由$\{n_a,\ n_{a+1},\cdots,n_b\}$生成的$\sigma$一代数。若存在一非负不增的实序列$\{\varphi_i\}$使对任意不整数 n 和 $A\in M_1^k$，$B\in M_{k+n}^{\infty}$ 都有

$$|P(A\cap B)-P(A)P(B)|\leqslant\varphi_n P(A) \tag{11}$$

则称$\{n_i\}$为φ—混合的随机序列。若还满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^{\frac{1}{2}}<\infty \tag{12}$$

则称$\{n_i\}$为可容的随机序列[2]。

设n_i的一维密度$f(x)$对称且$I(f)<\infty$，再设$\{n_i\}$满足(1)，则可证[5]$\{n_i\}$为一可容的序列。

对于无记忆检测器，其结构为$T_N(X)=\sum\limits_{i=1}^{N}W(x_i)$。为了求得最佳非线性变换$W(x)$，设$W(x)$为实值可测函数且满足以下各式：

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{-\infty}^{\infty}W(x)f(x-\theta)dx\,|_{\theta=0}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}W(x)f(x-\theta)|_{\theta=0}dx \tag{13}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}W(x)f'(x)<0 \tag{14}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W(x)f'\left(x-\frac{K}{\sqrt{n}}\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty}W(x)f'(x)dx\quad（K为正常数） \tag{15}$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}E_\theta\{T_N(X)\}|_{\theta=0}\right]^2}{NE_0\{[T_N(X)]^2\}}>0 \tag{16}$$

$$\lim_{t\to0}E\{[W(n_1+t)-W(n_1)]^2\}=0 \tag{17}$$

$$\sigma_0^2(W)=E_FW^2(x_1)+2\sum_{i=2}^{\infty}E_FW(x_1)W(x_i)>0 \tag{18}$$

则有下面引理[5]。

引理　设$\{n_i\}$为可容的φ—混合序列，且有$E_FW(x)=0$和$E_FW^2(x)<\infty$，则σ_0^2绝对收敛，且

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}W(n_i)\xrightarrow{D}N(0,\ \sigma_0^2(W))$$

其中D表依分布收敛，N表高斯分布。

在引理条件下，由 Pitman-Nother 定理，可得检测器效验为

$$\eta(W)=\frac{[E_FW'(x)]^2}{\left[E_FW^2(x)+2\sum\limits_{k=2}^{\infty}E_FW(x_1)W(x_i)\right]} \tag{19}$$

定理 3　若n_i的密度f对称，$E|n_1|^3<\infty$。其特征函数$\Phi_n(u)$使$\int|u^3\Phi_n(u)|du<\infty$，$W(x)$绝对连续，则当$\rho\to0$时有

$$\sum_{i=2}^{\infty}E_FW(x_1)W(x_i)=\frac{\rho}{1-\rho}E_GW'(x)E_FxW(x)+O(\rho^3) \tag{20}$$

定理3的证明见附录。

由定理1：　$f(x)=g(x)+O(\rho^2)$

由(20)
$$\sum_{i=2}^{\infty} E_F W(x_1)W(x_i)=\frac{\rho}{1-\rho}E_F W'(x)E_F xW(x)+O(\rho^3) \tag{21}$$

则(19)可写为
$$\eta(W)=\frac{[EW'(x)]^2}{[EW^2(x)+2rEW'(x)ExW(x)]}+O(\rho^3) \tag{22}$$

其中E表E_F即对f取平均，$r=\frac{\rho}{1-\rho}$。

这样就把$\eta(W)$化成了仅与f和ρ有关的W的泛函了。为了求最佳的$W(x)$，令
$$V(W)=\frac{EW^2(x)}{[EW'(x)]^2}+2r\frac{ExW(x)}{[EW'(x)]} \tag{23}$$

显然$V(W)$的例数就是效验$\eta(W)$的二级近似式。因此在对ρ取二阶近似意义下，求W使$V(W)$达极小则$\eta(W)$达极大值，为此对$V(W)$求变分并令其为0，即有
$$\frac{\partial}{\partial\alpha}V(W+\alpha\psi)|_{\alpha=0}=0$$

由上式可得当
$$aEW(x)\psi(x)-bE\psi'(x)+ra^2Ex\psi(x)-racE\psi'(x)=0$$

时使$V(W)$极小化。对$E\psi'(x)$进行分部积分，可将上式写成：
$$\int[aW(x)f(x)+bf'(x)+ra^2xf(x)+racf'(x)]\psi(x)dx=0$$

其中　$a=EW'(x)$，$b=EW^2(x)$，$c=ExW(x)$

由于$\psi(x)$的任意性，故方括弧中的函数应恒为零，所以
$$W(x)=\frac{b+rac}{a}W_0(x)-rax \tag{24}$$

其中$W_0(x)=-f'(x)/f(x)$为噪声独立时的最佳非线性变换。由于在$\eta(W)$中W乘一常数η值不变，故可取最佳非线性变换为
$$W_{K_0}=W_0(x)-K_0x \tag{25}$$

其中K_0为一正常数。将$W_K(x)$代入$\eta(W)$的二阶近似表达式$\eta^*(W)$中去，并且令$\frac{\partial}{\partial K}\eta^*(W_K)=0$，得最佳的$K_0=\rho I(f)=\rho\int(f')^2/f$并有下面结果。

定理 4　设$W(x)$为奇函数，$EW^2<\infty$，$E[W']^2<\infty$，$I(f)<\infty$，$\sigma^2=En_i^2<\infty$，则当$\rho<\frac{1}{2\sqrt{\sigma^2I(f)}+1}$时有
$$\eta^*(W)\leqslant\eta^*(W_{K_0})$$

以上等式成立，当且仅当$E|\alpha W(n_1)-W_{K0}(n_1)|^2=0$时。

其中　$\alpha=EW'_{K_0}/EW$.

这个定理的证明完全类似文[4]中定理1的证明。这里从略。

由上分析得到最佳非线性变换为

$$W_{K_0}(x)=W_0(x)-\rho I(f)x \tag{26}$$

因此在噪声弱相关条件下最佳的无记忆检测器仅在噪声独立时的最佳检测器上加一线性修正项。可见在结构上并未增加什么复杂性。

5. 检测器的性能和例子

对于以上导出的最佳有记忆和无记忆检测器的性能，有以下结果。

定理 5 在定理4的条件下，W_1 和 W_{K_0} 与线性检测器 L 的渐近相对效益为

$$\mathrm{ARE}_{W_1,L}=\sigma^2 I(f)(1+2\rho)+O(\rho^2) \tag{27}$$

$$\mathrm{AR}_{W_{K_0},L}=\sigma^2 I(f)[1+(\sigma^2 I(f)-1)\rho^2]+O(\rho^3) \tag{28}$$

其中 $\sigma^2=En_i^2$。

推论 在定理条件下有

$$\mathrm{ARE}_{W_1,W_0}=1+2\rho+O(\rho^2) \tag{29}$$

$$\mathrm{ARE}_{W_{K_0},W_0}=1+(\sigma^2 I(f)-1)\rho^2+O(\rho^3) \tag{30}$$

定理和推论证明见附录。

在定理5及推论中都涉及到量 $\sigma^2 I(f)$。注意到在定理条件下有

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=-\int_{-\infty}^{\infty}xf'(x)dx=-\int_{-\infty}^{\infty}x\sqrt{f(x)}\cdot(f'(x)/\sqrt{f(x)})dx$$

由 Schwarz 不等式

$$\sigma^2 I(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty}[f'(x)]^2/f(x)dx\geqslant\left[\int_{-\infty}^{\infty}(x\sqrt{f(x)})\cdot(f'(x)/\sqrt{f(x)})dx\right]^2=1$$

上式中等号成立的充要条件为

$$f'(x)=cxf(x) \qquad (c\ \text{为任一常数})\ ,\ \text{即}\quad -f'/f=-cx \tag{31}$$

这就是说 $\sigma^2 I(f)=1$ 的充要条件是(31)式成立，此时可取 $W_{K_0}=x$。

易证高斯分布满足(31)式，对非高斯噪声，一般有 $\sigma^2 I(f)>1$。从下面的例子看出 $\sigma^2 I(f)$ 可任意大。

前面已提到，ARE反映了在大样本情况下对同样错误的两个检测器所需样本数的比例。定理5的推论说明在 ρ 较小（以致 ρ^2 或 ρ^3 项可忽略)的情况下，用上面导出的有记忆和无记忆的近似最佳检测器都比用独立噪声下的最佳检测器 W_0 性能有提高，而在结构上并未增加什么复杂性。而由定理5，特别对于线性检测器，随着 $\sigma^2 I(f)$ 的增加，W_1 和 W_{K_0} 性能大大提高。若把 $[\sigma^2 I(f)-1]$ 作为 f 偏离高斯分布的度量，则表明当 f 严重偏离高斯分布时，线性检测器性能将严重下降。这也是我们研究非高斯噪声中的最佳检测问题的主要原因。下面给出两个例子，主要说明 W_{K_0} 对 W_0 性能的改进。

例 1 n_i 服从 sech（双曲正割）分布

$$f(x)=\frac{\pi}{2\sigma}\operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2\sigma}x\right) \qquad x\in R' \tag{32}$$

在实际中，常见的情况是噪声幅度取小值时很接近高斯分布，但取大值时的概率比高斯分布要大，即所谓“重尾部”情形。sech 分布在 x 较小时接近高斯分布，x 较大是接近 Laplace 分布，因此它较好地描述了上述实际噪声背景。对 sech 分布，

$$W_0(x)=\frac{\pi}{2\sigma}\tanh\left(\frac{\pi}{2\sigma}x\right)\qquad x\in R' \tag{33}$$

且有
$$\sigma^2 I(f)=\frac{\pi^2}{8}\approx 1.23$$

由定理 4 、 5 和推论，当 $\rho\leqslant\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 I(f)}+1}\approx 0.31$ 时

$$\mathrm{ARE}_{W_{K_0},W_0}\doteq 1+0.23\rho^2>1$$

故 W_{K_0} 对 W_0 在性能上有所改进。由于 $\sigma^2 I(f)$ 不太大，故改进不太明显。

例 2 实验发现一些数据传输通道中的脉冲噪声的“尾部”比例 1 那样的分布还要重。Mertz[6]指出可用 Cauchy 分布来描述这种噪声的行为，其密度为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}\qquad x\in R'$$

但 Cauchy 密度函数不满足以上各定理要求的正则条件，例如它的二阶矩不存在。因此考虑一个有关的密度函数列[4]

$$f_n(x)=\frac{C_n}{[1+(x/k_n)^{2n}]} \tag{34}$$

其中　$k_n=\sigma\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}\Big/\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)$　　$C_n=\frac{n}{\pi\sigma}\left[\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^{\frac{3}{2}}\Big/\left(\sin\frac{3\pi}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$

$f_n(x)$ 的尾部性质与[6]中考虑的模型类似，因此它较好地描述了脉冲噪声的尾部性质。对 $f_n(x)$

$$W_0(x)=x^{2n-1}\frac{[2n/(k_n)^{2n}]}{[1+(x/k_n)^{2n}]}\qquad x\in R'$$

$$\sigma^2 I(f_n)=\frac{2n^2\sin(\pi/2n)\Gamma(2-1/2n)\Gamma(1+1/2n)}{[\pi\sin(3\pi/2n)]} \tag{35}$$

当 $n\geqslant 3$ 时满足定理 4 的条件，由(41)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2 I(f_n)}{n}=\frac{1}{3}$$

因此 $\sigma^2 I(f_n)$ 可任意地大。这意味着 W_{K_0} 将对 W_0 的性能有显著的改进。但这种改进不是无穷的。因由定理 4 限制 $\rho\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\sigma^2 I(f)}+1}<\frac{1}{2\sqrt{\sigma^2 I(f)}}$

故
$$\rho^2[\sigma^2 I(f)-1]<\frac{1}{4\sigma^2 I(f)}[\sigma^2 I(f)-1]<0.25$$

所以 $\mathrm{ARE}_{W_{K_0},W_0}<1.25$。

由(30)式可见，$[\sigma^2 I(f)-1]$ 越大，即 f 偏离高斯分布越严重，W_{K_0} 对 W_0 的性能改进就越大。当 $[\sigma^2 I(f)-1]\rho^2$ 很小时，仍可用 W_0 作检测，性能也非常接近最佳情况，即这时可将噪声作为独立情况处理，也就是说在 f 接近高斯分布时，其相关性可忽略。否

则应用W_{K0}进行检测。

本文得到了孙仲康、郭桂蓉二位教授的热情指导，特表衷心感谢。

附　录

1.　定理1的证明

证　因为$En_i^2<\infty$

由(1)　$e^{jun_i}=e^{ju(y_i+\rho n_{i-1})}=e^{juy_i}[1+ju\rho n_{i-1}+(ju)^2n_{i-1}^2O(\rho^2)]$

对上式两边求平均得

$$\Phi_n(u)=\Phi_y(u)[1+u^2O(\rho^2)] \tag{1.1}$$

反变换

$$f(x)=g(x)+g''(x)O(\rho^2) \tag{1.2}$$

又因为

$$\Phi_n(u)=\Phi_y(u)\Phi_n(\rho u)$$

当$\rho\to 0$时$|\Phi_n(\rho u)|$一致收敛于1，故有

$$|g''(x)|=\left|-\int u^2\Phi_y(u)e^{-jux}du\right|\leqslant M(\rho)\int u^2\,|\Phi_n(u)|\,du<\infty$$

$M(\rho)$是仅与ρ有关的常数。所以

$$f(x)=g(x)+O(\rho^2) \tag{1.3}$$

2.　定理2的证明

证　由(1.2)　$f(x)=g(x)+g''(x)O(\rho^2)$

再由$|g'''(x)|<\infty$得：$f'(x)=g'(x)+g'''(x)O(\rho^2)$

又因$I(f)<\infty$　$I(g)<\infty$，故f和g几乎处处不为0。

所以　$\dfrac{f'}{f}=\dfrac{g'+O(\rho^2)}{g+O(\rho^2)}=\dfrac{g'}{g}+O(\rho^2)$几乎处处成立。

故　$\left(\dfrac{f'}{f}\right)^2=\left(\dfrac{g'}{g}\right)^2+O(\rho^2)$亦几乎处处成立

再由(1.3)　$I(f)=\int(g'/g)^2f+O(\rho^2)=I(g)+O(\rho^2)$

3.　定理3的证明

证　由(1)，$k\geqslant 2$时$n_k=y_k+\sum_{i=1}^{k-2}\rho^iy_{k-i}+\rho^{k-1}n_1$

$$\exp\{j(n_1u+n_kv)\}=\exp\{j(n_1u+y_kv)\}\cdot\left\{1+jv\left(\sum_{i=1}^{k-2}\rho^iy_{k-i}-\rho^{k-1}n_1\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(jv)^2\left(\sum_{i=1}^{k-2}\rho^iy_{k-i}-\rho^{k-1}n_1\right)^2+\frac{1}{6}(jv)^3\left(\sum_{i=1}^{k-2}\rho^{i-1}y_{k-i}-\rho^{k-2}n_1\right)^3O(\rho^3)\right\}$$

对上式两边取平均后再反变换得

$$f(x_1,x_k)=f(x_1)g(x_k)-\rho^{k-1}x_1f(x_1)g'(x_k)+\frac{1}{2}g''(x_k)\left[EY_1^2\sum_{i=1}^{k-2}\rho^{2i}+\rho^{2(k-1)}x_1^2f(x_1)\right]$$
$$-\frac{1}{6}\rho^{3(k-1)}x_1^3f(x_1)g'''(x_k)O(\rho^3)$$

因为 $E|n_1|^3<\infty$，所以 $x_1^3f(x)<\infty$ 几乎处处成立。因为 $\int|u^3\Phi_n(u)|du<\infty$，所以 $|g'''(x)|<\infty$。因此

$$f(x_1,x_k)=f(x_1)g(x_k)-\rho^{k-1}x_1f(x_1)g'(x_k)+\frac{1}{2}g''(x_k)\left[EY_1^2\sum_{i=1}^{k-2}\rho^{2i}+\rho^{2(k-1)}x_1^2f(x_1)\right]+O(\rho^{3(k-1)})$$

所以
$$E_FW(x_1)W(x_k)=\rho^{k-1}E_FxW(x)E_GW'(x)+O(\rho^{3(k-1)})$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}E_FW(x_1)W(x_k)=\frac{\rho}{1-\rho}E_FxW(x)E_GW'(x)+O(\rho^3)$$

4. 定理5及其推论证明

证　因为 $\sigma^2=\int x^2f(x)dx<\infty$ 且 $f'(x)$ 存在，所以 $xf(x)\to 0$　$(x\to\infty)$。

由定理4的条件易得

$$EW_K'=\int W_K'f=-\int W_Kf'=-\int W_0f+K\int xf'(x)dx=I(f)-K$$

$$EW_K^2=\int W^2f=I(f)+2K\int xf'(x)dx+K^2\sigma^2=I(f)-2K+\sigma^2K^2$$

$$ExW_K=\int xW_0(x)f(x)dx-K\int x^2f(x)dx=1-K\sigma^2$$

代入（22）式

$$\eta(W_K)=\frac{[I(f)-K]^2}{I(f)-2K+\sigma^2K^2+2r[I(f)-K][1-K\sigma^2]}+O(\rho^3)\qquad(4.1)$$

令 $K=K_0=\rho I(f)$ 和 $r=\rho/(1-\rho)$，代入上式化简得

$$\eta(W_{K_0})=\frac{(1-\rho)I(f)}{[1-\rho^2\sigma^2I(f)]}+O(\rho^3)\qquad(4.2)$$

对有记忆检测器 W_1，由(10)得

$$\eta(W_1)=I(f)+O(\rho^2)$$

对线性检测器 L，$W(x)=x$，代入(19)易得

$$\eta(x)=\frac{1}{\sigma^2}\ \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

所以
$$\mathrm{ARE}_{W_{K_0},L}=\frac{\eta(W_{K_0})}{\eta(x)}=\sigma^2I(f)[1+(\sigma^2I(f)-1)\rho^2]+O(\rho^3)$$

$$\mathrm{ARE}_{W_1,L}=\frac{\eta(W_1)}{\eta(x)}=\sigma^2I(f)(1+2\rho)+O(\rho^2)$$

推论的证明只需在(4.1)中令 $K=0$ 即得

$$\eta(W_0)=\frac{1-\rho}{1+\rho}I(f)+O(\rho^3)$$

再由(10)和(4.2)易得(29)和(30)式。

参考文献

[1] H. V. Poor and J. B. Thomas: Memoryless discrete-time detection of a constant Signal in m-dependent noise, IEEE Trans., Vol. IT-25, pp54~61, Jan. 1979.

[2] D.R. Halverson and G. L. Wise: Discrete time detection in φ-mixed noise, IEEE Trans., Vol. IT-26, pp189-198, Mar. 1980

[3] D. R. Halverson and G. L. Wise: Approximately optimal memoryless detection of random Signals in dependent noise, IEEE Trans., Vol. IT-30, pp420~424, Mar. 1984.

[4] H.V. Poor: Signal detection in the presence of weakly dependent noise—Part 1: optimal detection, IEEE Trans., Vol. IT-28, pp735-744, Sept. 1982

[5] G.V. Moustakides and J. B. Thomas: Min-Max detection of weak signals in φ-mixing noise, IEEE Trans. Vol. IT-30, pp529-537, May 1984

[6] P. A. Mertz: Model of impulsive noise for data transmission, IRE Trans. Commun. Syst., Vol. CS-9, pp130-137, June 1961

Optimum Detection of the Weak Signal in the Non-Gaussian Dependent Noise

Gao Zhi yong

Abstralt

In this paper optimum detection of the weak signal in the non-Gaussian dependent noise is discussed. Under the assumptions that the noise can be expressed as a first-order AR process $n_i = \rho n_{i-1} + y_i$ and only marginal distribution of noise samples and dependent coefficient ρ are given, if ρ is small, the optimum strueture of memory and memoryless detectors can be respectively obtained by maxmizing the first-order and the seeond-order approximations of efficacy to ρ.

Key words Optimum signal detection, Noise, Non-Gaussion dependent