

高超音速化学平衡流粘性激波层数值计算

刘执明 吳其芬

(航天技术系)

摘要 本文给出了层流化学平衡粘性激波层方程对于细长解析体的数值解。这些求解结果是通过空间步进方法得到的,并且与参考文献里的计算结果作了比较,以估价该方法的精确度。结果表明,这种控制方程完全耦合求解的方法能够给出相当精确和稳定的结果,这些结果与参考文献的计算结果相当吻合。

关键词 高超音速流动,粘性激波层,层流平衡气体,数值计算

本文采用的是依据化学平衡自由能最小原理的化学平衡流模型。这种模型的优点在于可以任意选择组元。最陡下降法保证了化学平衡流模型在数值上的实现。

主要符号

c_p^* 等压比热	$T_{r,ef}^* = U_\infty^{*2} / c_p^*, \infty$
g 伸展函数	U_∞^* 自由来流速度
H 焓, H^* / U_∞^{*2}	u 切向速度 u^* / U_∞^*
$H^* = h^* + u^{*2} / 3$	v 法向速度 v^* / U_∞^*
H_t 总焓, $H + V^2 / 2$	x 轴向距离
h 静焓, h^* / U_∞^{*2}	α 激波角
K^* 热传导系数	β 物面角
K 热传导系数 $K^* / \mu_{r,ef}^* c_p^*$	$\bar{\beta}$ 网格精细参数
M_∞ 自由来流马赫数	γ 比热比
n 法向坐标 n^* / R_N^*	e 雷诺数参数
P_r 普朗特数 $c_p^* \mu^* / K^*$	$e = [\mu_{r,ef}^* / \rho_\infty^* U_\infty^* R_N^*]^{1/2}$
p 压力	η η 坐标的变换
q^* 传热率	$\bar{\eta}$ n 坐标的变换
q 传热率 $q^* / \rho_\infty^* U_\infty^{*3}$	θ 物面角
R_N^* 物体头部半径	κ 物面曲率 $\kappa^* R_N^*$
r 对轴称到物面某点的半径 r^* / R_N^*	μ 粘性系数 $\mu^* / \mu_{r,ef}^*$
S_i 斯坦顿数	$\mu_{r,ef}^*$ 参考粘性系数 $\mu^*(T_{r,ef}^*)$
$S_i = q / (H_0 - H_w)$	ξ 物面坐标, $\xi = s$
s 切面坐标	

T	温度, T^*/T_r^*	ρ	密度, ρ^*/ρ_∞^*
τ	剪切应力, $\tau^*/\rho_\infty^*U_\infty^{*2}$	上标:	
下标:		j	$= 0, 1$; 平面或轴对称
sh	激波值	'	全微分
w	壁面值	*	有量纲量
∞	自由来流值		

1. 问题的提出

自从R. T. Davis^[3]1970年创立粘性激波层理论并且经历七十年代的飞速发展后, 最近有了新的进展^{[1],[2],[4]}。粘性激波层方程代表着 Navier-Stokes 方程的一种中间水平的近似, 对于宇航飞行器的设计有相当大的吸引力。

这里, 我们把注意力主要集中在高雷诺数高超音速流动。这种流场的特点是边界层相对来说比较薄, 激波层内无粘区占有重要的部分。以往所采用的控制方程串联求解的方法遇到了发散的困难。在本文, 我们将控制方程完全耦合地求解, 并且采用伸展函数对坐标进行变换, 使网格在物面附近足够精细。这样一种方法可以给出细长体问题的相当精确和稳定的结果。

这里采用的守恒方程是零攻角轴对称或二维物体的定常完全气体或化学平衡流粘性激波层方程。对平衡流, 我们考虑一种更简单的情况, 即假设各组元之间的扩散均表现为双体扩散, Lewis 数为 1。此外元素质量浓度在激波层中假定为常数。相应的粘性激波层方程为:

$$\frac{\partial}{\partial s} [(r + n \cos \theta)^j \rho u] + \frac{\partial}{\partial n} [(1 + n k)(r + n \cos \theta)^j \rho v] = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial s} u / (1 + n k) + v \frac{\partial v}{\partial n} - \kappa u^2 / (1 + n k) \right] + \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (2)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial s} \cdot u / (1 + n k) + v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} + \kappa u v / (1 + n k) \right] + \frac{\partial p}{\partial s} / (1 + n k) \quad (3)$$

$$= [\varepsilon^2 / (1 + n k)^2 (r + n \cos \theta)^j] [(1 + n k)^2 (r + n \cos \theta)^j \cdot \tau]_n$$

$$\rho \left[\frac{\partial h}{\partial s} \cdot u / (1 + n k) + v \cdot \frac{\partial h}{\partial n} \right] - \left[\frac{\partial p}{\partial s} \cdot u / (1 + n k) + v \cdot \frac{\partial p}{\partial n} \right] = \varepsilon^2 \tau^2 / \mu \quad (4)$$

$$[\varepsilon^2 / (1 + n k) (r + n \cos \theta)^j] \cdot \left[(1 + n k) (r + n \cos \theta)^j \cdot \mu \cdot \frac{\partial h}{\partial n} / P_r \right]_n$$

其中 $\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \kappa u / (1 + n k) \right)$ 。

对完全气体 $p = \rho T (\gamma - 1) / \gamma$ 。

应用 Rankine-Hugoniot 关系式计算激波边界条件。在壁面上, 无滑移与无温度跳跃的条件适用。壁面温度和焓给定为常数。

为了计算上的方便, 方程及边界条件通过用当地激波值归一化所有变量进行变换。因为法向速度在激波处可能变号或接近零, 法向速度不进行归一化。

此外,引入伸展函数对坐标进行变换。

$$\text{令 } \xi = s, \bar{\eta} = \frac{n}{n_{sh}}, \eta = g(\bar{\eta}), \text{ 其中 } g(\bar{\eta}) = 1 - \frac{\ln[(\beta + \bar{\eta} - 1)/(\beta - \bar{\eta} + 1)]}{\ln[(\beta - 1)/(\beta + 1)]} \quad (5)$$

坐标变换所需的微分关系为:

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \bar{\eta} \frac{n'_{sh}}{n_{sh}} g' \frac{\partial}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{n_{sn}} g' \frac{\partial}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial^2}{\partial n^2} = \frac{1}{n_{sh}^2} g'' \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{n_{sh}^2} g'^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (6)$$

为便于完全耦合求解,控制方程中的非线性项要进行线性化。线性化关系是:

$$\begin{aligned} X \cdot Y &= X^\circ Y + Y^\circ X - X^\circ Y^\circ \\ XYZ &= X^\circ Y^\circ Z + X^\circ Z^\circ Y + Y^\circ Z^\circ X - 2X^\circ Y^\circ Z^\circ \\ \frac{XZ}{Y} &= \frac{X^\circ Z}{Y^\circ} + \frac{Z^\circ X}{Y^\circ} - \frac{X^\circ Z^\circ}{Y^{\circ 2}} Y \end{aligned} \quad (7)$$

这里 X, Y, Z 可以代表任一变量或变量的偏导数。在驻点流线上 $X^\circ, Y^\circ, Z^\circ$ 取值于前次迭代值,在流动方向上, $X^\circ, Y^\circ, Z^\circ$ 取值于前一站的收敛解。

2. 平衡流模型 [5], [6]

化学平衡状态下,一般认为纯净空气由 7 个组元组成。这 7 个组元实际上又能看成由三个元素组成,7 个组元及 3 个元素的化学表达式为:7 个组元, $e^-, O, O_2, N, N_2, NO, NO^+$, 三个元素: e^-, O, N 。定义一个系数矩阵 $\alpha = \{\alpha_{ij}\}$, 其中 α_{ij} 表示 i 组元中含有 j 元素的个数。

这些组元的比热,焓,自由能,粘性系数和热传导系数均可半经验地表示成温度的多项式函数,其表达式及系数可在文献 [5] 中找到。

设组元自由能用 F_i^* 表示,则混合气体总自由能为:

$$F^*(x) = \sum_{i=1}^{ns} f_i \quad (8)$$

$$\text{其中 } f_i = x_i \left(c_i + \ln \frac{x_i}{\bar{x}} \right), \quad c_i = \frac{F_i^*}{R^* T^*} + \ln p^*, \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^{ns} x_i$$

这里压力的单位是大气压,温度的单位是绝对温标。 x_i 是每克混合气体中 i 组元的摩尔数。

化学反应处于平衡状态时,混合气体自由能取最小值,这时各组元浓度 $x = (x_1, x_2, \dots, x_{ns})$ 就是所求的对应温度,压力下化学平衡流的成份。显而易见, x_i 必须大于零,而且由元素质量浓度在激波层中处处为常数的假定,可以推出 x_i 必须满足的另一个条件:

$$\sum_{i=1}^{ns} \alpha_{ij} \cdot x_i = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, ne \quad (9)$$

其中 ns, ne 分别表示组元数目与元素数目。

我们采取逐次逼近的最陡下降法求 x 。假设 x_0 为任一存在状态,将平衡态自由能关于这一状态展开,如果 x 到 x_0 的半径足够小,则可得到自由能二阶展开式。对这个展开式应用极值条件来求取 x 。推导过程的最后结果为隐含 x 的一组线性代数方程:

$$\begin{aligned}
 x_i &= -f_i(x_0) + \frac{x_i^0}{x_0} \bar{x} + \sum_{j=1}^{nc} \pi_j x_i^0 \alpha_{ij}; \quad \bar{u} = \frac{\bar{x}}{\bar{x}_0} - 1 \\
 \sum_{j=1}^{ne} b_j \pi_j &= \sum_{i=1}^{ne} f_i(x_0); \quad \sum_{j=1}^{ne} r_{jk} \pi_j + b_k u = \sum_{i=1}^{ne} \alpha_{ik} f_i(x_0) \\
 r_{jk} &= r_{kj} = \sum_{i=1}^{ne} \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ik} x_i^0; \quad K=1, 2, \dots, ne
 \end{aligned} \tag{10}$$

这里 π_j 是拉格朗日乘子。为了保证逐次逼近计算过程的收敛,令 $y_i = x_i^0 + \lambda(x_i - x_i^0)$,其中 $0 < \lambda \leq 1$,选择最大的 λ 值使得下述条件成立:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & y_i = x_i^0 + \lambda(x_i - x_i^0) > 0 \\
 2) \quad & \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{ne} (x_i - x_i^0) \left[c_i + \ln \frac{x_i^0 + \lambda(x_i - x_i^0)}{\bar{x}_0 + \lambda(\bar{x} - \bar{x}_0)} \right] \leq 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

条件2)是用来保证所求的极值点不被越过。用 $y = (y_1, y_2, \dots, y_{ns})$ 更新 x_0 ,重复上述过程直至收敛准则得到满足。

在沿流动方向步进求解的过程中,每次当地迭代收敛之后,就要通过平衡流模型求出化学组元成分及相应的热传导系数与粘性系数等。

3. 求解方法

以往的文献对控制方程组大多采用串联求解的方法。事实上这也是这些方法难以解决细长体高雷诺数高超音速流计算问题的原因之一。本文对控制方程组采取完全耦合方式求解,这种方式隐含了对某些物理上相互作用的考虑;对长细长体的求解十分重要。

用 m 表示沿物面方向的计算站, n 表示沿物面法向的计算网格点。控制方程中能量方程和切向动量方程属于二阶偏微分方程。将这两个方程中沿流动方向各量的导数在 (m, n) 点用后向差分处理成双曲型项,沿物面法向各量的一阶和二阶导数在 (m, n) 点采用中心差分处理。

连续方程与法向动量方程属于一阶偏微分方程。为方便起见,沿流动方向和物面法向均采用两点差分来处理各量的导数。连续方程中流动方向各量的导数采用后差,法向采用中心差在网格中点 $(m, n + \frac{1}{2})$ 处写出。法向动量方程中各量导数采取同样的方法在网格中点 $(m, n - \frac{1}{2})$ 处写出。以上这种差分方法属于全隐式差分格式,其显著特点是它的稳定性较好。

粘性激波层方程组在钝体绕流的亚音速头部区是双曲—椭圆混合型的,而在下游超音速区,又是双曲—抛物混合型的。因此应该充分注意头部亚音速区特别是驻点流线上的求解。将各量沿流动方向在驻点流线上展开成 ξ 的多项式,这些展开式使偏微分形式的控制方程退化成为常微分方程。驻点线附近压力源项的处理就显得特别重要。这时沿流动方程的压力梯度项,不能像下游区那样作为双曲型项按后向差分处理。本文的处理方法类似于文献[7]的处理方法,即在驻点线邻近压力梯度项作为方程的常数项来处理,但在控制方程求解之后,再另行通过法向动量方程求解压力,以弥补前述处理所造

成的滞后效应。

求解从初始激波形状的假定开始。只要初始激波形状假设得合理，流动方向的步长取得适当，则亚音速头部区的解就可以通过步进方法得到。至于激波形状的头部的椭圆型影响，则通过对激波脱体距离及其导数的总体迭代来消除。所谓总体迭代，是沿物面方向完成推进之后，依据计算出来的激波形状进行的重复推进计算。

4. 计算结果与讨论

图1到图13给出了细长解析体粘性激波层化学平衡流的求解结果。

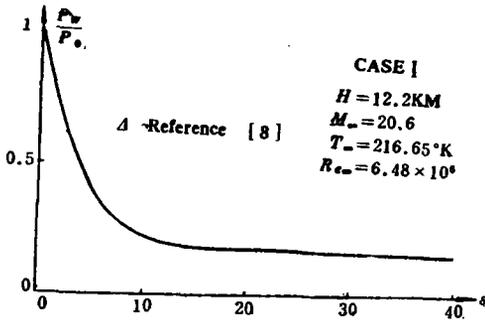


图1 沿9°双曲面物面压力分布

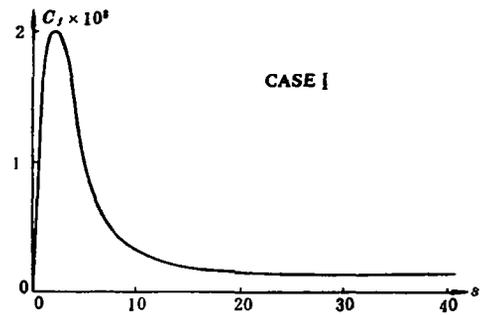


图2 沿9°双曲面物面摩擦系数

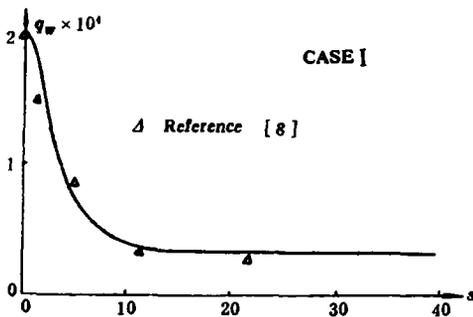


图3 沿9°双曲面物面传热系数

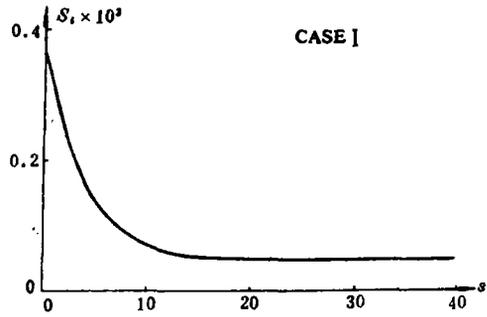


图4 沿9°双曲面物面斯坦特数

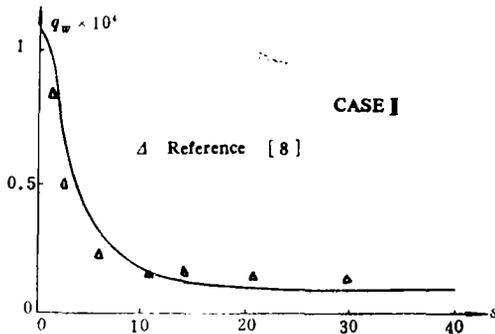


图5 沿9°双曲面物面压力分布

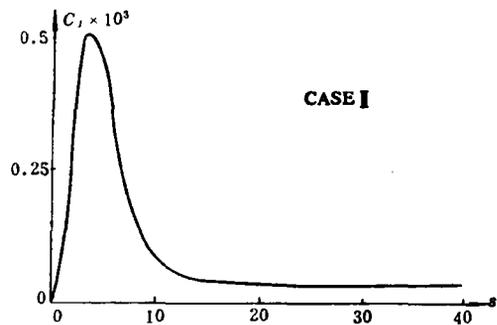


图6 沿9°双曲面物面摩擦系数

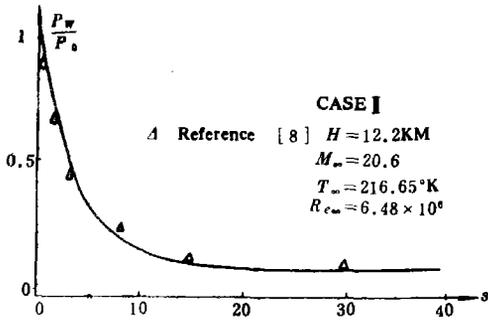


图 7 沿9°双曲面物面传热系数

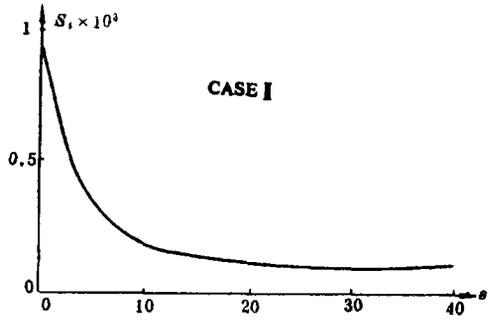


图 8 沿9°双曲面物面斯坦特数

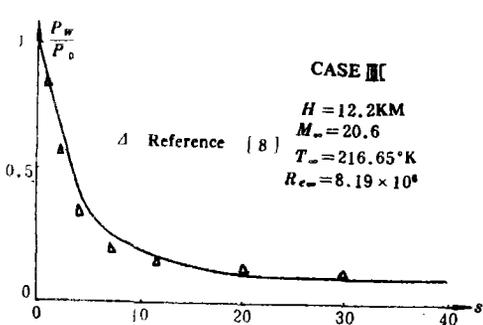


图 9 沿9°双曲面物面压力分布

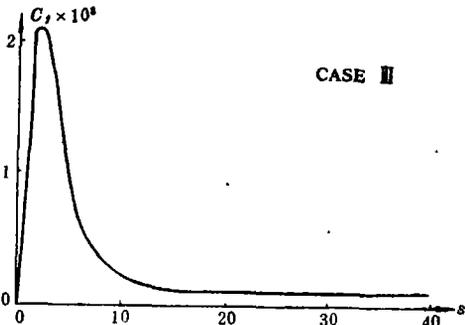


图 10 沿9°双曲面物面摩擦系数

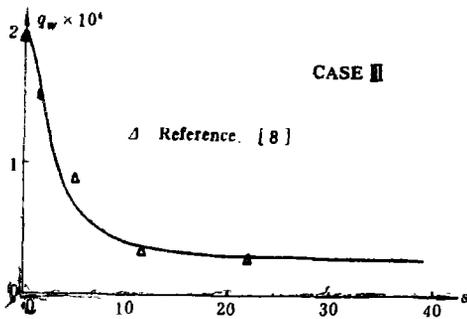


图 11 沿9°双曲面物面传热系数

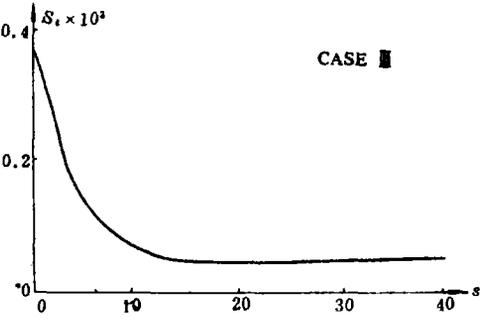


图 12 沿9°双曲面物面斯坦特数

图 1 给出了一个长细长体的物面压力分布，这种压力分布对于解析体来说是非常典型的。图 5 同样给出了这一物体在另一种雷诺数下的压力分布，并与文献 [8] 的计算结果作了比较。文献 [8] 采用了连续方程与法向动量方程并联求解的方法。从图 5 可以看出，完全并联与部分并联一样对于细长体的计算是成功的。部分并联方法要简单些，省时些。尽管现在还看不出完全并联比部分并联有什么优越之处，但应该说完全并联方法对物理上的相互作用的考虑更全面。图 9 给出了另一种马赫数下的物面压力分布。

图 2，图 6 及图 10 给出了这种物体物面摩擦系数的分布。

图 3，图 7 及图 11 给出了这种物体物面传热分布。在图 7 中同时与文献 [8] 的结果

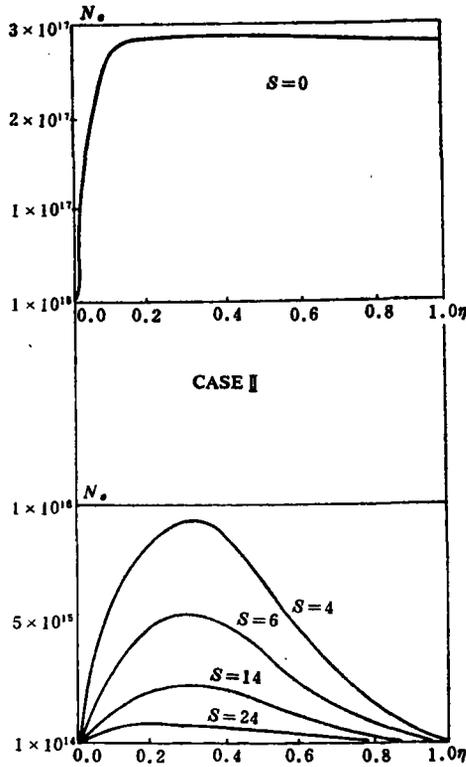


图 13 电子密度分布

作了比较。这些结果吻合得较好。

图 4, 图 8 及图 12 给出了相应的斯坦顿数分布。尽管仅仅就物面压力与物面传热与文献 [8] 作了比较, 但可以相信, 对于解析体绕流这一方法能够给出精确而稳定的数值结果。

最后图 13 给出了电子数密度分布。

参 考 文 献

- [1] Kim, M.D., Bhutta, B.A., Lewis, C.H.: Three-Dimensional Effects Upon Real Gas Flows Past the Space Shuttle, AIAA 84-0225
- [2] Thareja, R., Szema, K.Y., Lewis, C.H.: Viscous shock Layer Predictions for Hypersonic Laminar or Turbulent Flows in Chemical Equilibrium over the Windward Surface of a Shuttle-Like Vehicle, AIAA 82-0201
- [3] Davis, R.T.: AIAA J, v8, N5, 1970, pp 843
- [4] Thompson, R.A.: Three-Dimensional Viscous Shock Layer Applications for the Space Shuttle Orbiter, AIAA 85-0246
- [5] Kumar, A., Graves, R.A.Jr, Weilmuenster, K.J.: User's Guide for Vectorized Code EQUIL for Calculating Equilibrium Chemistry, NASA TM 80193
- [6] White, W.B., Johnson, S.M., Dantzig, G.B.: J. of Chemical Physics, v28, N5, 1958
- [7] Hosny, W.M., Davis, R.T., Werle, M.J: Improvements to the Solution of the

Viscous Shock Layer Equations, AD A072673 1978

- [8] Thareja, R., Szema, K.Y., Lewis, C.H.: Effects of Chemical Equilibrium on Three-Dimensional Viscous Shock Layer Analysis of Hypersonic Laminar Turbulent Flows, AIAA 82-0305.

Numerical Viscous Shock Layer Solution to the Hypersonic Chemically Equilibrium Flows

Liu Zhiming Wu Qifen

Abstract

The viscous shock layer numerical solutions to the hypersonic chemically equilibrium laminar flows are presented. These results are obtained by the spatial marching method. The comparison with the results of reference 8 is made to assess the accuracy of the present method. This method, which fully couples the governing equations, gives the accurate and stable results. These results are compared well with those from reference 8.

A chemical equilibrium model, which is based on the Free-Energy-Minimum principle, is used. For this model, it is convenient to choose the species. The steepest descent method is used to make the chemical equilibrium model easily implemented.

Key words Viscous shock Layer, Viscous flow, Hypersonic flow, Laminar flow equilibrium air, Free-energy-minimum principle, The steepest decent method, Spatial marching method