

康特洛维奇的数值方法在矩形薄板 横向弯曲振动中的应用

唐乾刚 徐后华

(航天技术系)

摘要 本文提出的解决矩形薄板弯曲振动问题的康特洛维奇的数值方法,大大减少了所需要的计算机内存。通过算例表明它具有比较高的计算精度和计算速度,是一种有前途的计算方法。

关键词 康特洛维奇近似变分法, 样条函数, 特征值问题

1. 引言

康特洛维奇近似变分法^[2]是由康特洛维奇·克雷洛夫于1941年提出的,是一种特殊的立兹法。后来A.D.Kerr把迭代技术应用于其中,提出了推广的康氏法,并用以计算了扭转、弯曲问题和矩形板稳定与薄膜振动问题^[3]。陈广南、徐后华首先提出了康特洛维奇的数值方法^[5],以样条函数作为基函数解决复合材料板的弯曲问题。到目前为止,康氏法或推广的康氏法求解振动问题,都是通过直接解微分方程而获得结果。本文提出解决薄板弯曲振动问题的康特洛维奇的数值方法,把振型函数展开为样条函数或梁的振型函数的级数形式,根据瑞雷原理,导出了解矩形薄板弯曲振动的特征方程,大大地减少了所需要的计算机内存,提高了计算速度,通过计算,得到了很好的结果。

2. 基本方程与数值解法

对于矩形薄板,其横向弯曲自由振动的泛函为

$$\pi = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [W_{xx}^2 + 2\mu W_{xx}W_{yy} + W_{yy}^2 + 2(1-\mu) \cdot W_{xy}^2] dx dy - \frac{\lambda}{2} \iint_{\Omega} W^2 dx dy \quad (1)$$

其中: $\lambda = \rho\omega^2/D$, ρ 为板中面单位面积的质量, ω 为周期运动的角速度, D 为抗弯刚度, μ 为泊桑比。

设振型函数 $W(x, y)$ 为

$$W(x, y) = A(x)B(y) \quad (2)$$

(1) 如果将 $A(x)$ 、 $B(y)$ 都展开为三次B样条基函数的级数^[1], 则

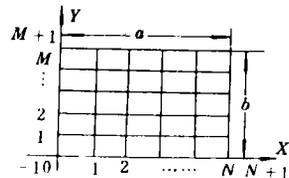


图1 双向三次B样条网格划分

$$\begin{cases} A(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} \alpha_i \phi_i(x) = \lfloor \phi(x) \rfloor \{ \alpha \} \\ B(y) = \sum_{r=-1}^{M+1} \beta_r \psi_r(y) = \lfloor \psi(y) \rfloor \{ \beta \} \end{cases}$$

将上两式代入(2)式中, 可得

$$W(x, y) = \lfloor \phi(x) \rfloor \{ \alpha \} \lfloor \psi(y) \rfloor \{ \beta \} \quad (3)$$

(2) 如果将 $A(x)$ 展开为三次 B 样条函数的级数而 $B(y)$ 展开为梁的振型函数的级数, 则

$$\begin{cases} A(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} \alpha_i \phi_i(x) = \lfloor \phi(x) \rfloor \{ \alpha \} \\ B(y) = \sum_{r=1}^M \beta_r Z_r(y) = \lfloor Z(y) \rfloor \{ \beta \} \end{cases} \quad (3a)$$

其中 $Z_r(y)$ 是梁的振型函数。

两端固支梁的振型函数为

$$Z_m(y) = \sin \frac{\mu_m}{b} y - \operatorname{sh} \frac{\mu_m}{b} y - \alpha_m \left(\cos \frac{\mu_m}{b} y - \operatorname{ch} \frac{\mu_m}{b} y \right), \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

左端铰支右端固支梁的振型函数为:

$$Z_m(y) = \sin \frac{\mu_m}{b} y - \alpha_m \operatorname{sh} \frac{\mu_m}{b} y \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

左端铰支右端自由梁的振型函数为

$$Z_1(y) = y/b; \quad Z_m(y) = \sin \frac{\mu_m}{b} y + \alpha_m \operatorname{sh} \frac{\mu_m}{b} y, \quad (m = 2, 3, \dots)$$

还有其它边界条件这里未列出。其中 μ_m 、 α_m 可查有关手册。将(3a)式代入(2)式, 可得

$$W(x, y) = \lfloor \phi(x) \rfloor \{ \alpha \} \lfloor Z(y) \rfloor \{ \beta \} \quad (4)$$

当然还可以将(2)式展开为其它形式的级数, 为了方便, 我们将(3)、(4)式统一写为

$$W(x, y) = \lfloor \xi(x) \rfloor \{ \alpha \} \lfloor \eta(y) \rfloor \{ \beta \} \quad (5)$$

将(5)式代入(1)式, 并令各矩阵为

$$\begin{aligned} \int_0^a \lfloor \xi(x) \rfloor^T \lfloor \xi(x) \rfloor dx &= [A]; \quad \int_0^a \lfloor \xi'(x) \rfloor^T \lfloor \xi'(x) \rfloor dx = [A_1] \\ \int_0^a \lfloor \xi''(x) \rfloor^T \lfloor \xi''(x) \rfloor dx &= [A_2]; \quad \int_0^a \{ \lfloor \xi''(x) \rfloor^T \lfloor \xi(x) \rfloor + \lfloor \xi(x) \rfloor^T \lfloor \xi''(x) \rfloor \} dx \\ &= [A_{20}] \quad (6) \\ \int_0^b \lfloor \eta(y) \rfloor^T \lfloor \eta(y) \rfloor dy &= [B]; \quad \int_0^b \lfloor \eta'(y) \rfloor^T \lfloor \eta'(y) \rfloor dy = [B_1] \\ \int_0^b \lfloor \eta''(y) \rfloor^T \lfloor \eta''(y) \rfloor dy &= [B_2]; \quad \int_0^b \{ \lfloor \eta''(y) \rfloor^T \lfloor \eta(y) \rfloor + \lfloor \eta(y) \rfloor^T \lfloor \eta''(y) \rfloor \} dy \\ &= [B_{20}] \end{aligned}$$

可得泛函表达式:

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \{\alpha\}^T [A_2] \{\alpha\} \{\beta\}^T [B] \{\beta\} + \frac{\mu}{4} \{\alpha\}^T [A_{20}] \{\alpha\} \{\beta\}^T [B_{20}] \{\beta\} \\ & + \frac{1}{2} \{\alpha\}^T [A] \{\alpha\} \{\beta\}^T [B_2] \{\beta\} + (1 - \mu) \{\alpha\}^T [A_1] \{\alpha\} \{\beta\}^T [B_1] \{\beta\} \\ & - \frac{1}{2} \lambda \{\alpha\}^T [A] \{\alpha\} \{\beta\}^T [B] \{\beta\} \end{aligned} \quad (7)$$

由 $\frac{\partial \pi}{\partial \{\alpha\}} = \frac{\partial \pi}{\partial \{\beta\}} = 0$, 可得两个特征方程:

$$\begin{aligned} & \{\beta\}^T [B] \{\beta\} [A_2] \{\alpha\} + \frac{\mu}{2} \{\beta\}^T [B_{20}] \{\beta\} [A_{20}] \{\alpha\} + \{\beta\}^T [B_2] \{\beta\} \\ & \cdot [A] \{\alpha\} + 2(1 - \mu) \{\beta\}^T [B_1] \{\beta\} [A_1] \{\alpha\} - \lambda \{\beta\}^T [B] \{\beta\} [A] \cdot \{\alpha\} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \{\alpha\}^T [A_2] \{\alpha\} [B] \{\beta\} + \frac{\mu}{2} \{\alpha\}^T [A_{20}] \{\alpha\} [B_{20}] \{\beta\} + \{\alpha\}^T [A] \{\alpha\} \\ & \cdot [B_2] \{\beta\} + 2(1 - \mu) \{\alpha\}^T [A_1] \{\alpha\} [B_1] \{\beta\} - \lambda \{\alpha\}^T [A] \{\alpha\} [B] \cdot \{\beta\} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

从(6)式可以看出, 用这种方法展开的级数各矩阵阶数很小。例如, 取 $A(x)$ 、 $B(y)$ 都为三次 B 样条基函数的级数, $N = M = 8$, 对于周边固定矩形板而言, 矩阵阶数只有 7 阶, 而用 $W(x, y) = \sum_{i=-1}^{N+1} \sum_{r=-1}^{M+1} c_{ir} \phi_i(x) \phi_r(y)$ 的形式, 各矩阵为 49 阶, 因此将 $W(x, y)$ 展开为(5)式形式的级数, 大大地减少了所需要的计算机内存。

在求解时先假定某方向, 如 y 方向的振型参数 $\{\beta\}_1$, 从(8)式求出 $\{\alpha\}_1$, 再将 $\{\alpha\}_1$ 代入(9)式求出 $\{\beta\}_1$ 。如此进行迭代, 直到 $\{\beta\}_1$ 达到某一精度要求为止。而后可从(8)式求出 λ_{11} , $\{\alpha\}_1$, λ_{21} , $\{\alpha\}_2, \dots$, 下面给出的算例都是假定 $[\beta]_1 = [100 \dots]^T$ 精度为 10^{-5} 求出的结果。为了进一步提高计算速度也可以取 $A(x) = Z_1(x)$ ($Z_1(x)$ 是梁的第一阶振型函数) 代入(6)、(9)式求出 $\{\beta\}_1$ 。对于有两对边简支的板, 可从(8)、(9)式求出所需要的自振频率和相应的振型, 对于其它边界条件一般迭二次、最多三次就可以得到满意的结果。

3. 算 例

下列表中给出了周边简支、周边固定和三边简支一边固支的正方形板的计算结果。其中 B 代表三次 B 样条函数, 梁代表梁的振型函数。例如 B —梁代表 $A(x)$ 为三次 B 样条函数的级数, $B(y)$ 为梁的振型函数的级数。迭代次数指求 $\{\beta\}_1$ 的迭代次数。

附表 1—(a)、1—(b)、2—(a)、2—(b)、3—(a)、3—(b) 分别给出周边简支、三边简支一边固支 ($x=0$ 的边固支)。周边固支正方形薄板的两个振型的振幅, $M = N = 10$, $\mu = 0.3$, a 为方板边长。

表 1 周边简支的正方形薄板($\mu=0.3$)

	$B-B$	精确解 ^[6]	ω_9	168.13	167.78
	$N=M=10$		ω_{10}	168.13	167.78
ω_1	19.74	19.74	ω_{11}	177.71	177.65
ω_2	49.35	49.35	ω_{12}	197.70	197.39
ω_3	49.35	49.35	ω_{13}	197.70	197.39
ω_4	78.96	78.96	ω_{14}	247.01	246.74
ω_5	98.75	98.70	ω_{15}	247.01	246.74
ω_6	98.75	98.70	矩阵阶数为11 迭代次数为8		
ω_7	128.35	128.30			
ω_8	128.35	128.30			

表 2 三边简支一边固支正方形薄板($\mu=0.3$)

方 法	本 法	$B-B$	$B-梁$	梁-梁	有限点 ^[11]	文献 ^[4]
		$N=M=8$	$N=8 M=3$	$N=M=5$	$N=8 M=3$	
ω_1		23.65	23.65	23.50	23.65	23.77
ω_2		51.82	51.81	51.62	51.64	52.00
ω_3		58.67	58.67	58.63	58.67	58.65
ω_4		86.24	86.23	86.38	86.36	86.26
ω_5		100.75	100.61	100.31	100.42	100.84
ω_6		113.46	113.46	113.22		113.23
ω_7		134.22	134.12	134.08		134.19
ω_8		141.07	141.07	141.15		140.89
ω_9		170.43		169.13		169.72
最大矩阵阶数		9	8	5		
迭代次数		3	2	2		

表 3 周边固支正方形薄板($\mu=0.3$)

方 法	本法	B-B	B-梁	梁-梁	有限点 ^[1]	文献[4]
		$N=M=8$	$N=8 M=4$	$N=M=5$	$N=8 M=4$	
ω_1		36.00	36.01	36.02	36.02	36.00
ω_2		73.43	73.54	73.56	73.43	73.41
ω_3		73.43	73.61	73.56	73.67	73.41
ω_4		108.31	108.59	108.59	108.49	108.24
ω_5		132.23	132.29	132.32	131.96	131.90
ω_6		132.23	132.69	132.32		131.90
ω_7		165.44	165.77	165.79		165.88
ω_8		165.44	165.97	165.79		165.88
ω_9		212.06	211.10	211.13		211.36
最大矩阵阶数		7	7	5		
迭代次数		4	3	3		

附表1-(a) 无节线振幅比值

$y = \frac{a}{2}$	x	0.2a	0.3a	0.4a	0.5a	0.6a	0.7a	0.8a
	本法	0.5878	0.8090	0.9511	1.000	0.9511	0.8090	0.5878
	准确值	0.5878	0.8090	0.9511	1.000	0.9511	0.8090	0.5878
$x = \frac{a}{2}$	y	0.2a	0.3a	0.4a	0.5a	0.6a	0.7a	0.8a
	本法	0.5878	0.8090	0.9511	1.000	0.9511	0.8090	0.5878
	准确值	0.5878	0.8090	0.9511	1.000	0.9511	0.8090	0.5878

附表1—(b) 有一条平行于 y 轴的节线振幅比值

$y = \frac{a}{2}$	x	0.2a	0.3a	0.4a	0.5a	0.6a	0.7a	0.8a
	本法	0.9511	0.9511	0.5878	0	-0.5878	-0.9511	-0.9511
	准确值	0.9511	0.9511	0.5878	0	-0.5878	-0.9511	-0.9511
$x = \frac{a}{4}$	y	0.2a	0.3a	0.4a	0.5a	0.6a	0.7a	0.8a
	本法	0.5878	0.8090	0.9511	1.000	0.9511	0.8090	0.5878
	准确值	0.5878	0.8090	0.9511	1.000	0.9511	0.8090	0.5878

附表2—(a) 无节线振幅比值

$y = \frac{a}{2}$	x	0.1a	0.2a	0.3a	0.4a	0.5a	0.6a	0.7a	0.8a	0.9a
	比值	0.1035	0.3366	0.6043	0.8348	0.9768	1.0000	0.8948	0.6721	0.3081
$x = \frac{a}{2}$	y	0.1a	0.2a	0.3a	0.4a	0.5a	0.6a	0.7a	0.8a	0.9a
	比值	0.3019	0.5742	0.7903	0.9292	0.9768	0.9292	0.7903	0.5742	0.3019

附表2—(b) 有一条平行于 y 轴的节线振幅比值

$y = \frac{a}{2}$	x	0.1a	0.2a	0.3a	0.4a	0.5a	0.6a	0.7a	0.8a	0.9a
	比值	0.2961	0.7361	1.0000	0.8587	0.3406	-0.3241	-0.8318	-0.9478	-0.6190
$x = 0.3a$	y	0.1a	0.2a	0.3a	0.4a	0.5a	0.6a	0.7a	0.8a	0.9a
	比值	0.3090	0.5878	0.8090	0.9511	1.0000	0.9511	0.8090	0.5878	0.3090

附表3—(a) 无节线振幅比值

$y = \frac{a}{2}$	x	0.1a	0.2a	0.3a	0.4a	0.5a	0.6a	0.7a	0.8a	0.9a
	比值	0.1299	0.4089	0.7045	0.9211	1.0000	0.9211	0.7045	0.4089	0.1299
$x = \frac{a}{2}$	y	0.1a	0.2a	0.3a	0.4a	0.5a	0.6a	0.7a	0.8a	0.9a
	比值	0.1299	0.4089	0.7045	0.9211	1.0000	0.9211	0.7045	0.4089	0.1299

附表3—(b) 有一条平行于 y 轴的节线振幅比值

$y = \frac{a}{2}$	x	0.1a	0.2a	0.3a	0.4a	0.5a	0.6a	0.7a	0.8a	0.9a
	比值	0.3138	0.8128	1.0000	0.6819	0	-0.6819	-1.0000	-0.8128	-0.3138
$x = 0.3a$	y	0.1a	0.2a	0.3a	0.4a	0.5a	0.6a	0.7a	0.8a	0.9a
	比值	0.1520	0.4445	0.7300	0.9291	1.0000	0.9291	0.7300	0.4445	0.1520

4. 结 论

通过实算证明, 本文提出的方法有很高的计算精度和收敛速度。特征值和特征向量的计算精度均如此(对于简支板, 前几阶振型与精确解几乎没有差别, 对于三边简支一边固支板和周边固支板, 由于没有精确解对比, 只列出计算结果)。本文提出的方法容易推广应用于曲板的动力问题。由于它大大地减少了所需要的计算机内存, 具有比较高的计算精度和计算速度, 是一种有前途的结构动力学的计算方法。

参 考 文 献

- [1] 秦荣: 结构力学的样条函数方法, 广西人民出版社, 1985年
- [2] 钱伟长: 变分原理及有限元, 科学出版社, 1980年
- [3] A.D.Kerr: An Extended Kantorovich Method For the Solution of Eigenvalue Problems, Int. J.Solids. structures, 1969, Vol. 5, p559-572
- [4] G.B.WARBURTON: The vibration of rectangular plates, Proc. Instn Mech Engrs 168(12) 371-84(1954)
- [5] 陈广南, 徐后华: 样条函数康特诺维奇法在复合材料板弯曲问题中的应用, 第四届全国复合材料学术会议文集, 1986年
- [6] 清华大学工程力学系: 机械振动, 机械工业出版社, 1982年
- [7] Y.K.CHEUNG: 结构分析的有限条法, 人民交通出版社, 1985年

The Application of Kantorovich's Numerical Method in the Bending Vibration of Rectangular Plates

Tang Qiangang Xu Houhua

Abstract

In this paper a new numerical method called kantorovich's method is

presented for solving the bending vibration of rectangular plates. The store capacity needed in the computer can be largely reduced by using the method. The examples calculated show that the method has an advantage of a high speed of calculation and high precision. The method is of the bright future.

Key Words Kantorovich's approximate calculus of variations, Spline function, Problems of eigenvalue