国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第10卷第1期 1988年3月 Vol.10 No.1

有限扩域上的Fuzzy子域

姜华彪

（系统工程与应用数学系）

摘　要　在文[3]中，引入了更一般的Fuzzy理想等概念，使Fuzzy代数结构的研究进一步深入进行。本文作为Fuzzy结构理论中的又一课题，引入了Fuzzy子域等概念，对有限扩域上的Fuzzy子域的构造问题进行了比较详细的讨论，得到了几个类似于[2]中的表示定理。尔后，引入了诱导Fuzzy子域，对单纯代数扩域上的诱导Fuzzy子域进行了研究。

关键词　有限扩域，Fuzzy子域，诱导Fuzzy子域

1. Fuzzy子域的表示定理

首先我们给出几个基本的概念和下面经常要用到的记号。

设X是一个集合，X上的Fuzzy集合μ是指一个映射μ：$X\longrightarrow[0,1]$。设$\lambda\in[0,1]$，$\lambda\cdot\mu$定义为这样的集合：$(\lambda\cdot\mu)(x)=\lambda\cdot\mu(x)$，$\forall x\in X$。若对任何$x\in X$，$\mu(x)=1$　则记$\mu=1_X$。

设μ是X的Fuzzy子集，$\forall\lambda\in[0,1]$，
$\mu_\lambda=\{x;\ \mu(x)\geqslant\lambda\}$称为$\mu$的$\lambda$割集。

设K与F都是域，且K是F的有限扩域，$[K:F]=n$，并且$u_1,u_2,\cdots,u_n$是K的一组基底，亦即$K=F(u_1,u_2,\cdots,u_n)$；0，1分别表示F中的零元素和单位元素。

定义 1　设F是一个域，F上的Fuzzy子集μ称为F的Fuzzy子域，如果满足下列条件：

(1) $\mu(x-y)\geqslant\mu(x)\wedge\mu(y)$　　$\forall x,y\in F$；

(2) $\mu(x\cdot y^{-1})\geqslant\mu(x)\wedge\mu(y)$　　$\forall x,y\in F$　且$y\neq0$

从上面的定义容易得知：若μ是$(F,+,\cdot)$的Fuzzy子域，则μ关于“+”运算是$(F,+)$的Fuzzy子群；若令$F^*=F-\{0\}$，则μ关于“·”运算是$(F^*,\cdot)$的Fuzzy子群。

命题 1　若μ是F的Fuzzy子域，则$\forall x\in F^*$有$\mu(0)\geqslant\mu(1)\geqslant\mu(x)$

命题 2　设μ是F的Fuzzy子集，则μ是F的Fuzzy子域的充分必要条件是

1987年6月5日收到

$\forall\lambda\in[0,\mu(1)]$，$\mu_\lambda$是$F$的子域。并且$\forall\lambda\in[0,\mu(1)]$，$\mu_\lambda$都包含$F$的素子域。

命题 3　设K是F的扩域，μ是K的Fuzzy子域，则μ在F上的限制μ_F：

$$\mu_F(x)=\begin{cases}\mu(x) & x\in F\\ 0 & x\notin F\end{cases}$$

是F的Fuzzy子域。

定理1　设μ是域K的Fuzzy子域，F是K的素子域，并且$[K:F]=n$，则有$0\leqslant\lambda_n\leqslant\lambda_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_0\leqslant1$及子域链$\{0\}\subset F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_n=K$，其中$F_i$是$K$的子域，使得$\mu=\lambda_0\cdot1\{0\}\cup\lambda_1\cdot1_{F_1}\cup\cdots\cup\lambda_n\cdot1_{F_n}$。

证明　令$\lambda=\mu(1)$，由命题2可知$F_1'=\mu_\lambda=\{x;\ \mu(x)\geqslant\lambda\}$是$K$的子域。又因为$F$是$K$的素子域，故$F\subset F_1'\subset K$。

因为K是F的有限扩域，所以F_1'也是F的有限扩域，因此存在$u_1,u_2,\cdots,u_{K_1-1}\in F_1'$使得$u_1,u_2,\cdots,u_{K_1-1}$是$F_1'$的一组基；即$F_1'=F(u_1,\cdots,u_{K_1-1})$。令$\lambda_0=\mu(0)$，$\lambda_i=\lambda$，$i=1,2,\cdots,K_1-1,K_1$；令$F_1=F$，$F_2=F_1(u_1),\cdots$，$F_{K_1}=F_{K_1-1}(u_{K_1-1})$，则

$$\mu_{F_1'}=\lambda_0\cdot1\{0\}\cup\lambda_1\cdot1_{F_1}\cup\cdots\cup\lambda_{K_1}\cdot1_{F_{K_1}}$$

令　$\alpha_2=\sup\{\mu(x),\ x\in K-F_1'\}$，若$\alpha_2=\lambda$，则存在$x_n\in K-F_1'$，使得$\mu(x_n)\to\alpha_2$ $(n\to\infty)$，且$\mu(x_n)>\mu(x_{n-1})$。令$\alpha_n'=\mu(x_n)$，则每个$\mu_{\alpha_{n-1}}$都是μ_{α_n}的一个真正扩张，这与K是F的有限扩域相矛盾。因此$\alpha_2<\lambda$。

用上面同样的办法可证得：一定存在$x\in K$使得$\mu(x)=\alpha_2$。因而$\mu_{\alpha_2}\supset F_1'\supset F$。

所以存在$u_1,u_2,\cdots,v_{K_2}\in\mu_{\alpha_2}$，　使得　$u_1,\cdots,u_{k_1-1},v_1,v_2,\cdots,v_{k_2}$是$\mu_{\alpha_2}$关于$F$的一组基。令$F_{K_1+1}=F_1'(v_1)$，$F_{K_1+2}=F_{K_1+1}(v_2)$，……，$F_{K_1+K_2}=F_{K_1+K_2-1}(v_{K_2})$ $\lambda_{k_1+l}=\alpha_2$ $l=1,2,3,\cdots,k_2$，则

$$\mu\Big|_{\mu_{\alpha_2}}=\lambda_0\cdot1\{0\}\cup\lambda_1\cdot1_{F_1}\cup\cdots\cup\lambda_{K_1+K_2}\cdot1_{F_{K_1+K_2}}$$

重复上述过程，因为K是F的有限扩域，所以必将在有限步内完成。

由定理1.1的证明容易看出可以把上面的表示定理写成更紧凑的形式：

定理 1′　设K是素域F的有限扩域，μ是K的Fuzzy子域，并且$[K:F]<\infty$，则存在　$0<\lambda_K<\lambda_{K-1}<\cdots<\lambda_2<\lambda_1\leqslant\lambda_0\leqslant1$　及中间域F_i，$F\subset F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_{K-1}\subset F_K\subset K$，使得

$$\mu=\lambda_0\cdot1\{0\}\cup\lambda_1\cdot1_{F_1}\cup\cdots\cup\lambda_K\cdot1_{F_K}$$

前面我们对基础域是素域的有限扩域上的Fuzzy子域得到了上面的表示定理，但是对非素域上的有限扩域上的Fuzzy子域，一般来说定理1中的结论并不成立。

例如：设Q是有理数域，$p_1,p_2,\cdots,p_n\cdots$，是一列互不相同的素数；令$F_1=Q(\sqrt{p_1})$，$F_2=F_1(\sqrt{p_2})\cdots$　$F_n=F_{n-1}(\sqrt{p_n}),\cdots$，则　$Q\subset F_1\subset\cdots\subset F_n\subset\cdots\subset R\subset C$。此处$R$是实数域，$C$是复数域。

取$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$是严格单调递减数列，并且收敛于$\frac{1}{2}$，令

$$\mu(x)=\begin{cases}\lambda_i & x\in F_i-F_{i-1} \quad i=1,2,\cdots\\ 1 & x\in F_0=Q\\ \frac{1}{2} & x\in C-\bigcup_{i=0}^{\infty}F_i\end{cases}$$

易验证：μ是C的Fuzzy子域，虽然$[C:R]=2$，但并不能表示成定理1中的形式。那么除定理1的条件之外，在什么情况下F的有限扩域K上的Fuzzy子域可以表示成定理1′中的形式呢？

(1) 若L是F的素子域，$[F:L]<\infty$，则$[K:L]=[K:F][F:L]<\infty$，故K上的Fuzzy子域μ具有定理1′中的形式。

(2) 设μ是K的Fuzzy子域，$\lambda=\mu(1)$，若μ_λ包含F，则μ可以表示成定理1′中的形式。

定理 2　若$[K:F]=p$为素数，μ是K上的Fuzzy子域，又若μ，K，F满足(2)的条件，则有$1\geqslant\lambda_0\geqslant\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant0$，使得：$\mu=\lambda_0\cdot 1\{0\}\cup\lambda_1\cdot 1_{\mu_{\lambda_1}}\cup\lambda_2\cdot 1_{\mu_{\lambda_2}}$

2. 诱导Fuzzy子域

设域K是域F的n次扩域，并且$\{u_1,u_2,\cdots u_n\}$是K的一组基底，则$F(u_1,u_2,\cdots,u_n)=K$。若μ是F上的一个Fuzzy子集，$\forall y\in K$，$\exists a_1,a_2,\cdots,a_n\in F$使得　$y=a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_nu_n$。

令　$\bar{\mu}(y)=\bigwedge_{i=1}^{n}\mu(a_i)$，则$\bar{\mu}$是$K$上的Fuzzy子集称为由$\mu$在基底$\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$诱导出的Fuzzy子集。

若K是F的单纯代数扩域，μ是F上的Fuzzy子集，u是K中的代数扩张元。为方便起见，我们总假设μ在K中的诱导Fuzzy子集是在基$\{1,u,\cdots,u^{n-1}\}$下的诱导Fuzzy子集。

引理　设K是F的单纯代数扩域则$[K:F]=n$，μ是F的一个Fuzzy子域，u是K中的代数扩张元，并且存在$a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\in\mu_\lambda$ ($\lambda=\mu(1)$)，使得

$u^n=a_0+a_1u+\cdots+a_{n-1}u^{n-1}$，则$\forall y=b_0+b_1u+\cdots+b_lu^l$

$\bar{\mu}(y)\geqslant\bigwedge_{i=0}^{l}\mu(b_i)$　($\bar{\mu}$是由μ诱导出的Fuzzy子集)

证明　对l用归纳法证。

当$l\leqslant n-1$时，由诱导Fuzzy子集的定义知：$\bar{\mu}(y)=\bigwedge_{i=0}^{l}\mu(b_i)$。故结论成立。

归纳假设$l\leqslant k$时结论成立。

当$l=k+1$时，$y=b_0+b_1u+\cdots+b_{K+1}u^{K+1}$ (b_i不全为0)

又因为　$u^{K+1}=u^{K+1-n}\cdot u^n=u^{K+1-n}(a_0+a_1u+\cdots+a_{n-1}u^{n-1})$

$=a_0u^{K+1-n}+a_1u^{K+1-n+1}+\cdots+a_{n-1}u^K$

故　$y=b_0+b_1u+\cdots+b_{K+1}u^{K+1}$

$=b_0+b_1u+\cdots+(b_{K+1-n}+a_0b_{K+1})u^{K+1-n}+\cdots+(b_K+a_{n-1}b_{K+1})u^K$

所以 $\bar{\mu}(y)\geqslant\left[\bigwedge\limits_{i=0}^{K-n}\mu(b_i)\right]\wedge\left[\bigwedge\limits_{i=0}^{n-1}\mu(b_{K+1-n+i}+a_ib_{K+1})\right]$

$$\geqslant\left[\bigwedge_{i=0}^{K-n}\mu(b_i)\right]\wedge\left\{\bigwedge_{i=0}^{n-1}[\mu(b_{K+1-n+i})\wedge\mu(a_i)\wedge\mu(b_{K+1})]\right\}$$

$$=\left[\bigwedge_{i=0}^{K+1}\mu(b_i)\right]\wedge\left[\bigwedge_{i=0}^{n-1}\mu(a_i)\right]=\left[\bigwedge_{i=0}^{K+1}\mu(b_i)\right]\wedge\mu(1)$$

$$=\bigwedge_{i=0}^{K+1}\mu(b_i)$$

由此可知结论成立。

定理 2 设$K,F,\mu,\bar{\mu}$如前所述，则$\forall\lambda\in[0,\mu(1)]$，$\bar{\mu}_\lambda=\mu_\lambda(u)$。其中 u 是K在F中的代数扩张元。

证明 $\forall x\in u_\lambda(\mu)$，$x=b_0+b_1u+\cdots+b_{n-1}u^{n-1}$，$b_i\in\mu_\lambda$，$i=0,1,\cdots,n-1$，$\bar{\mu}(x)=\bigwedge\limits_{i=0}^{n-1}\mu(b_i)\geqslant\lambda$。因此$x\in\bar{\mu}_\lambda$，即 $\mu_\lambda(u)\subset\bar{\mu}_\lambda$。

反之 $\forall x\in\bar{\mu}_\lambda$，$x=b_0+b_1u+\cdots+b_{n-1}u^{n-1}$，$\bar{\mu}(x)=\bigwedge\limits_{i=0}^{n-1}\mu(b_i)\geqslant\lambda$

故$\mu(b_i)\geqslant\lambda$ $i=0,1,2,\cdots,n-1$。所以$x\in\mu_\lambda(u)$，即 $\mu_\lambda(u)\supset\bar{\mu}_\lambda$。由此可知

$$\bar{\mu}_\lambda=\mu_\lambda(u)$$

定理 3 设K,F,μ如前面所述，则由μ在K中诱导出的 Fuzzy 子集$\bar{\mu}$也是K上的Fuzzy子域，$\bar{\mu}$称为由μ诱导的Fuzzy子域。

证明 因为$\forall\lambda\in[0,\mu(1)]$，$\bar{\mu}_\lambda=\mu_\lambda(u)$，又因$\mu_\lambda$是$F$的子域，故$\mu_\lambda(u)$是$K$的子域。由此可知$\bar{\mu}_\lambda$是$K$的子域，由命题2可知$\bar{\mu}$是$K$上的Fuzzy子域。

由定理1及定理2可知下面结论成立。

定理 4 若F是$\mu_{\mu(1)}$上的有限扩域，μ是F的Fuzzy子域，而K是F的单纯代数扩域，则存在$1\geqslant\lambda_0>\lambda_1>\cdots>\lambda_m\geqslant0$及$F$的子域$F_i$，

满足 $F\supset F_m\supset F_{m-1}\supset\cdots\supset F_2\supset F_1\supset\mu_{\mu(1)}$

使得 $\bar{\mu}=\lambda_0\cdot1\{0\}\cup\lambda_1\cdot1_{F_1(u)}\cup\lambda_2\cdot1_{F_2(u)}\cup\cdots\cup\lambda_m\cdot1_{F_m(u)}$

定义 1 设μ_1,μ_2分别是域F_1,F_2的 Fuzzy子域，μ_1与μ_2称为Fuzzy同构的，如果存在一个同构映射f：$F_1\to F_2$，使得$\forall x\in F_1$，$\mu_1(x)=\mu_2(f(x))$。

则易知下面定理成立：

定理 5 设μ是域F的 Fuzzy 子域，α，β是F上的不可约多项式$f(x)$的根，并且$f(x)$的系数在μ_λ中，此处 $\lambda=\mu(1)$，则μ在$F(\alpha)$与$F(\beta)$上诱导出的Fuzzy子域是Fuzzy同构的。

定理 6 假设μ是域F的Fuzzy子域，K是F的扩域，α与β分别是F上的两个互不相同的不可约多项式$\varphi(x)$与$\psi(x)$的零点，$\deg\varphi(x)=n-1$，$\deg\psi(x)=m-1$，并且$\varphi(x)$与$\psi(x)$的系数都在$\mu_{\mu(1)}$中，则μ在$F(\alpha,\beta)$中以基底$\{\alpha^i\beta^j$，$i=0,1,\cdots,n-1$，$j=0,1,\cdots,m-1\}$诱导的 Fuzzy 子集$\mu_{F(\alpha,\beta)}$是$F(\alpha,\beta)$的 Fuzzy 子域，并且与μ先在$F(\alpha)$上诱导的Fuzzy子域$\mu_{F(\alpha)}$，然后$\mu_{F(\alpha)}$在$F(\alpha)(\beta)(=F(\alpha,\beta))$上诱导的Fuzzy 子域$(\mu_{F(\alpha)})_{F(\alpha)(\beta)}$相同。

证明 由定理2可知$\mu_{F(\alpha)}$是$F(\alpha)$的Fuzzy子域，$(\mu_{F(\alpha)})_{F(\alpha)(\beta)}$是$F(\alpha,\beta)$的 Fuzzy

子域。所以若能证明$\mu_{F(\alpha,\beta)}=(\mu_{F(\alpha)})_{F(\alpha,\beta)}$ 则知定理成立。

$$\forall x\in F(\alpha,\beta),\quad x=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}a_{ij}\alpha^i\beta^j,\quad x=\sum_{j=0}^{m-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1}a_{ij}\alpha^i\right)\beta^j$$

$$(\mu_{F(\alpha)})_{F(\alpha,\beta)}=\bigwedge_{j=0}^{m-1}\mu_{F(\alpha)}\left(\sum_{i=0}^{n-1}a_{ij}\alpha^i\right)$$

$$=\bigwedge_{j-0}^{m-1}\bigwedge_{i=0}^{n-1}\mu(a_{ij})$$

又因为$\mu_{F(\alpha,\beta)}(x)=\bigwedge_{j=0}^{m-1}\bigwedge_{i=0}^{n-1}\mu(a_{ij})$，所以 $(\mu_{F(\alpha)})_{F(\alpha,\beta)}(x)=\mu_{F(\alpha,\beta)}(x)$。

由x的任意性可知定理成立。

参 考 文 献

[1] A.Rosonfeld: Fuzzy Groups, J.Math. Aual. Appl, 35, 512—517, (1971)

[2] R.Lowen: Conuex Fuzzy Sets Fuzzy Sets and Systems 3(1980), 291—310

[3] 姜华彪：Fuzzy理想与商Fuzzy子环，科学探索 1986，第1期

[4] N.Jacobson, Basic Algebra(I), W.H.Freeman and Company, 1974

Fuzzy Subfields on the Finite Extension Fields

Jiang Huabiao

Abstract

In the paper[3], the more general concept of fuzzy ideals was introduced, and the study of fuzzy algebraic Structure has been developed. In this paper, we make a study of another topic in the fuzzy Structure theory. The notion of the fuzzy Subfields is suggested. The Structure problems of the fuzzy subfields on the finite extension fields are discussed in detail. Several representatiue theorems which are analogous to those in [2] are obtained. Later, the notion of induced fuzzy subfields is introduced, we study the properties of the induced fuzzy subfields on the Simple algebraic extonsion fields.

Key words The Finite extension field, Fuzzy subfield, Induced fuzzy subfield.