国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第10卷第2期　1988年6月　Vol.10.No.2

推广的Vandermond行列式之值不为零的证明

严守喜*
（应用数学与系统工程系）

摘　要　本文证明了在一定条件下，推广的Vandermond 行列式之值不等于零。这个结论在证明常系数齐次线性递归关系的通解定理中有关键性的作用。

关键词　行列式，矩阵，齐次线性方程组，根

引　言

在证明常系数齐次线性递归关系（有重根情形）的通解定理时，要用到下述结论：

$$I=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_1 & q_1 & q_1 & \cdots & q_1 & \cdots & q_V & q_V & q_V & \cdots & q_V \\ q_1^2 & 2q_1^2 & 2^2q_1^2 & \cdots & 2^{e_1-1}q_1^2 & \cdots & q_V^2 & 2q_V^2 & 2^2q_V^2 & \cdots & 2^{e_r-1}q_V^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_1^{k-1} & (k-1)\cdot q_1^{k-1} & (k-1)^2\cdot q_1^{k-1} & \cdots & (k-1)^{e_1-1}\cdot q_1^{k-1} & \cdots & q_V^{k-1} & (k-1)^2\cdot q_V^{k-1} & (k-1)\cdot q_V^{k-1} & \cdots & (k-1)^{e_V-1}\cdot q_V^{k-1} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1}$$

其中 $q_1\ q_2\cdots q_V$ 为互异非零复数，并且 $\sum\limits_{i=1}^{V} e_i=k$，当 $e_i=1$，$i=1,2,\cdots,v$ 时，I 为一般的Vandermond行列式。但是关于(1)式的证明在一般书籍中很难找到，本文给出(1)式的一个简单证明方法。

引理 1　设 $P_0(x)\in C^{+\infty}(-\infty,+\infty)$，$q\neq 0$. 归纳定义 $P_1(x)=xP_0'(x)$，$P_2(x)=xP_1'(x),\cdots,P_n(x)=xP_{n-1}'(x)$. 若 $P_0(q)=P_1(q)=\cdots=P_n(q)=0$，则 $P_0(q)=P_0'(q)=\cdots=P_0^{(n)}(q)=0$.

证明　第一步：$P_n(x)=C_1xP_0'(x)+C_2x^2P_0''(x)+\cdots+C_{n-1}x^{n-1}P_0^{(n-1)}(x)+x^nP_0^{(n)}(x)$，其中 $C_1,C_2,\cdots C_{n-1}$ 为常数($n\geqslant 1$).

当 $n=1$ 时，$P_1(x)=xP_0'(x)$，结论显然成立。

假定 $P_{n-1}(x)=C_1xP_0'(x)+C_2x^2P_0''(x)+\cdots+C_{n-2}x^{n-2}P_0^{(n-2)}(x)+x^{n-1}P_0^{(n-1)}(x)$，

本文1987年6月25日收到
* 作者为在校本科生。

则由题设

$$P_n(x)=xP'_{n-1}(x)$$
$$=x[C_1xP'_0(x)+C_2x^2P''_0(x)+\cdots+C_{n-2}x^{n-2}P_0^{(n-2)}(x)+x^{n-1}P_0^{(n-1)}(x)]'$$
$$=C_1xP'_0(x)+(C_1+2C_2)x^2P''_0(x)+\cdots+(C_{n-2}+(n-1))x^{n-1}P_0^{(n-1)}(x)$$
$$+x^nP_0^{(n)}(x)$$
$$=\bar{C}_1xP'_0(x)+\bar{C}_2x^2P''_0(x)+\cdots+\bar{C}_{n-1}x^{n-1}P_0^{(n-1)}(x)+x^nP_0^{(n)}(x)$$

这里$\bar{C}_1=C_1$，$\bar{C}_2=C_1+2C_2,\cdots,\bar{C}_i=C_{i-1}+iC_i$ $(i=2,3,\cdots(n-2))$，$\cdots$，$\bar{C}_{n-1}=C_{n-2}+(n-1)$．（以后将$\bar{C}_1,\bar{C}_2\cdots\bar{C}_{n-1}$都记为$C_1,C_2\cdots C_{n-1}$），故由归纳法结论成立。

第二步：归纳证明：$P_0(q)=P'_0(q)=\cdots=P_0^{(n)}(q)=0$．显然由$P_0(q)=P_1(q)=0$，可以得到$P_0(q)=P'_0(q)=0$　$(q\neq0)$．假定由$P_0(q)=P_1(q)=\cdots=P_m(q)=0$　$(m\leqslant n)$可以得到$P_0(q)=P'_0(q)=\cdots P_0^{(m)}(q)=0$，则由$P_0(q)=P_1(q)=\cdots=P_{m+1}(q)=0$的前$m$个等式并利用归纳假设得到$P_0(q)=P'_0(q)=\cdots=P_0^{(m)}(q)=0$．但由第一步$P_{m+1}(q)=C_1qP'_0(q)+\cdots+C_mq^mP_0^{(m)}(q)+q^{m+1}P_0^{(m+1)}(q)$，从而$P_0^{(m+1)}(q)=0$．故由归纳法引理真。

引理 2　在引理1的定义中，取$P_0(x)=\sum\limits_{i=0}^{k-1}C_ix^i$，则$P_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{k-1}i^nC_ix^i$　$(n=1,2,3\cdots)$．

证明　（用数学归纳法）

当$n=1$时显然$P_1(x)=xP'_0(x)=\sum\limits_{i=1}^{k-1}iC_ix^i$．假定$P_{n-1}(x)=\sum\limits_{i=1}^{k-1}i^{n-1}C_ix^i$，则$P_n(x)=xP'_{n-1}(x)=x[C_1+2^nC_2x+\cdots+(k-1)^nC_{k-1}x^{k-2}]=\sum\limits_{i=1}^{k-1}i^nC_ix^i$，证毕。

现在回到原问题：

设$C=(C_0,C_1,C_2\cdots C_{k-1})$，行列式$I$对应的$k$阶方阵记为$I_0$，考察一个关于$C_0,C_1\cdots C_{k-1}$的齐次线性方程组：$CI_0=0$，或即

$$(*)\quad\begin{cases}C_0+C_1q+C_2q_1^2+\cdots+C_{k-1}q_1^{k-1}=0,\\ \quad C_1q_1+2C_2q_1^2+\cdots+(k-1)C_{k-1}q_1^{k-1}=0,\\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \quad C_1q_1+2^{e_1-1}C_2q_1^2+\cdots+(k-1)^{e_1-1}C_{k-1}q_1^{k-1}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ C_0+C_1q_V+C_2q_V^2+\cdots+C_{k-1}q_V^{k-1}=0,\\ \quad C_1q_V+2C_2q_V^2+\cdots+(k-1)C_{k-1}q_V^{k-1}=0,\\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \quad C_1q_V+2^{e_V-1}C_2q_V^2+\cdots+(k-1)^{e_V-1}C_{k-1}q_V^{k-1}=0.\end{cases}$$

假定$I=0$则$(*)$有非零解$(C_0,C_1,C_2\cdots C_{k-i})$于是$P_0(x)=\sum\limits_{i=0}^{k-1}C_ix^i$至多是一个$k-1$次多项式，由代数基本定理得到，$P_0(x)$在复数域内最多有$k-1$个根（重根按照重数计算）。

但是在引理2中取$n=1,2,\cdots,e_j-1$　$(j=1,2\cdots v)$及$x=q_j$对照$(*)$式得到$P_0(q_j)$

$=P_1(q_j)=\cdots=P_{e_j-1}(q_j)=0$。再由引理1，取 $n=e_j-1$ 得到 $P_0(q_j)=P_0'(q_j)=\cdots=P_0^{(e_j-1)}(q_j)=0$. 于是$q_j$是$P_0(x)$的一个$e_j$重根，注意到 q_j 是互异的复数，则 $P_0(x)$共有$\sum_{j=1}^{V} e_j=k$个根（重根按照重数计算）这是一个矛盾，故假定$I\neq 0$不能成立，从而$I=0$，证毕。

参考文献

[1] 卢开澄编著，组合数学算法与分析，清华大学出版社，1983

[2] [美] R.A.Brualdi，组合数学导引，李盘林，王天明译

A Proof of the Extended Vandermond Determinant It not Zero

Yan Shouxi

Abstract

This paper has proved the fact that the extended Vandermond determinant is not zero, this is the most important fact in proving the theorem for the general solutions of a linear homogeneous relation with constant cofficients in the case of repeated roots.

KEY WORDS Determinant, Matrix, Linear homogeneous equations, Root