

CAD/CAM中的两种曲线保凸拟合

方 逵 钱正在

(系统工程与应用数学系)

摘 要 文中描述了一种保凸参数拟合方法。对于任意给定一个平面开(闭)的凸多边形,可用二次(三次)Bezier曲线段构造了一条 C^1 二次(C^2 三次)的保凸插值样条曲线,并且简略讨论了该方法在CAD/CAM中的应用,如凸轮轮廓曲线的拟合,外形的几何设计等。我们在IBM-PC机上编制了通用的交互式作图软件,只要输入相应的坐标和控制参数,即可快速绘制出 C^1 二次(C^2 三次)的保凸插值样条曲线。

关键词 参数曲线, 杆值样条, 保凸拟合

1. 引 言

计算几何已广泛地应用于机械设计与制造[1],曲线拟合是计算几何的重要课题,也是机械设计与制造中经常遇到的数学问题。比如,在自由外形设计中,给定一组型值点(曲线的轮廓),要求寻找一条光滑的曲线通过所给的型值点,然后不断地调整型值点以满足问题的要求;反过来,给出一个曲线型几何体,要求给出它的外形数学表达式,通常的方法是测得一组数据,进行曲线拟合求得数学表达式。当几何体是凸的时,自然要求拟合曲线也保持原来的凸性。比如许多进口机械设备中无规则的盘状凸轮常常不提供加工图纸,又无备用盘,若凸轮损坏,会导致传动机械失灵。因此,如何精确地测定凸轮轮廓曲线,提供加工图纸是一件十分重要的工作。文[2]中研究了盘状凸轮轮廓曲线的拟合,所采用方法是三次样条插值拟合。由于三次样条插值必须在小挠度($|y'| \ll 1$)的情况下才保证良好的光顺性,所以用于凸轮轮廓曲线拟合是不保凸的。因此必须寻找新的保凸拟合方法。保凸拟合在数学上有过许多研究[3][4],但计算复杂。我们构造的保凸样条插值曲线与坐标系选择无关,结构清晰,计算简单,几何意义明显,优于[3][5]中的方法。

2. 基础知识

定义 2.1 给定 $n+1$ 个空间向量 $\vec{b}_i (i=0, 1, \dots, n)$,称 n 次参数曲线段

$$\vec{p}(t) = \sum_{i=0}^n \vec{b}_i B_{i,n}(t) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2.1)$$

为Bezier曲线,其中

1987年9月5日收到

$$B_{i,n}(t) = c_n^i t^i (1-t)^{n-i}$$

$$c_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad i=0, 1, \dots, n$$

依次用线段连接 $\vec{b}_i (i=0, 1, \dots, n)$ 中相邻两向量的终点, 这样组成的 n 边折线多边形称 Bézier 多边形。

从(2.1)易得: $\vec{p}(0) = \vec{b}_0, \vec{p}(1) = \vec{b}_n$ 。这表明 Bézier 曲线以 \vec{b}_0 和 \vec{b}_n 为始点和终点。

对(2.1)式两边求导得

$$\vec{p}'(t) = n \sum_{i=1}^n \vec{a}_i B_{i-1,n-1}(t) \quad (2.2)$$

式中 $\vec{a}_i = \vec{b}_i - \vec{b}_{i-1} (i=1, 2, \dots, n)$ 。

由(2.2)得

$$\vec{p}'(0) = n\vec{a}_1 \quad \vec{p}'(1) = n\vec{a}_n \quad (2.3)$$

进一步还可推得

$$\vec{p}''(0) = n(n-1)(\vec{a}_2 - \vec{a}_1), \quad \vec{p}''(1) = n(n-1)(\vec{a}_n - \vec{a}_{n-1}) \quad (2.4)$$

定义 2.2 设 $[a, b]$ 的划分 $A: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, 在每个结点上给定相应的型值 y_i , 如果成立

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \leq \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad i=1, 2, \dots, n-1 \quad (2.5)$$

则称数组 $\{y_i\}_{i=0}^n$ 具有下凸性质。将(2.5)中的不等号换成“ \geq ”, 则称 $\{y_i\}_{i=0}^n$ 有上凸性质。具有凸性质的数组称为凸数组。

定义 2.3 设 $\vec{p}_0, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$ 是平面 n 边形的 $n+1$ 个顶点, 设 $\vec{a}_1 = \vec{p}_0\vec{p}_1, \vec{a}_2 = \vec{p}_1\vec{p}_2, \dots, \vec{a}_n = \vec{p}_{n-1}\vec{p}_n$, 又设 \vec{e} 是 $\vec{p}_0, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$ 所在平面的法向量, 如果 $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)\vec{e}, (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)\vec{e}, \dots, (\vec{a}_{n-1} \times \vec{a}_n)\vec{e}$ 同号, 则称该平面多边形为凸多边形(如图 1)。

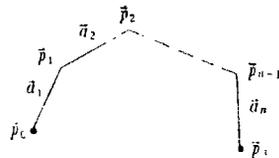


图 1

3. C^1 连续的二次参数样条曲线

基本思想: 图(2)中 $\vec{p}_0\vec{p}_1\cdots\vec{p}_n$ 是一个凸 n 边形, 不考虑相邻三型值点共线的情况, 寻找一个凸 $n+1$ 边形 $\vec{p}_0\vec{A}_0\vec{A}_1\cdots\vec{A}_{n-1}\vec{p}_n$, 使点 $\vec{p}_i (i=1, 2, \dots, n-1)$ 在线段 $\vec{A}_{i-1}\vec{A}_i$ 上, 然后在每两个结点 \vec{p}_{i-1}, \vec{p}_i 之间, 以两边形 $\vec{p}_{i-1}\vec{A}_{i-1}\vec{p}_i$ 为特征多边形作二次 Bézier 曲线段。由定义知所得二次 Bézier 插值样条曲线在结点 $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_{n-1}$ 处 C^1 连续。

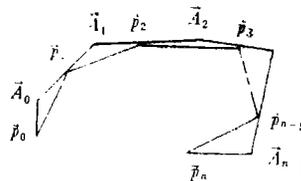


图 2

在不考虑相邻三型值点共线的情况下, 我们来作 $\vec{p}_0\vec{A}_0\vec{A}_1\cdots\vec{A}_{n-1}\vec{p}_n$ 。

记

$$\vec{d}_i = \vec{p}_i - \vec{p}_{i-1}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

令

$$\left. \begin{aligned} \vec{b}_0 &= t_0 \vec{a}_1 + (1-t_0)(-\vec{a}_2) \\ \vec{b}_i &= t_i \vec{a}_i + (1-t_i) \vec{a}_{i+1} \quad i=1, 2, \dots, n-1 \\ \vec{b}_n &= t_n(-\vec{a}_n) + (1-t_n) \vec{a}_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中 $0 < t_0, t_1, \dots, t_n < 1$ 是任意的常数。

过 \vec{p}_i 点作平行于 \vec{b}_i 的直线 l_i , 则 l_i 的方程为 $\vec{r}(t) = \vec{p}_i + t\vec{b}_i$, $i=0, 1, \dots, n$.

联解方程组

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{p}_i - u\vec{b}_i \\ \vec{r}(t) = \vec{p}_{i+1} - v\vec{b}_{i+1} \end{cases} \quad i=0, 1, \dots, n-1$$

求得直线 l_i 与 l_{i+1} 的交点:

$$\vec{A}_i = \vec{p}_{i+1} - \frac{t_i |\vec{a}_i \times \vec{a}_{i+1}|}{|\vec{b}_i \times \vec{b}_{i+1}|} \quad i=0, 1, \dots, n-1 \quad (3.2)$$

由型值点的凸性及相邻三型值点不共线保证了 $|\vec{b}_i \times \vec{b}_{i+1}| \neq 0$.

如果出现相邻三型值点共线的情况, 比如, \vec{p}_{i-1} , \vec{p}_i , \vec{p}_{i+1} 三点共线, 可取 l_{i-1}, l_{i+1} 的直线方程为

$$\vec{r}(t) = \vec{p}_{i-1} + t(\vec{p}_{i+1} - \vec{p}_{i-1})$$

即 l_{i-1} , l_{i+1} 的方程均为线段 $\overline{\vec{p}_{i-1}\vec{p}_{i+1}}$ 所在的直线方程。取

$$\vec{A}_{i-1} = \frac{\vec{p}_{i-1} + \vec{p}_i}{2}; \quad \vec{A}_i = \frac{\vec{p}_i + \vec{p}_{i+1}}{2}$$

这样, 对于具有凸性质的型值点 $\vec{p}_0, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$ 在每两个型值点 \vec{p}_{i-1}, \vec{p}_i 之间得到了两边形 $\vec{p}_{i-1}\vec{A}_{i-1}\vec{p}_i$ (有可能退化成一线段), 记

$$\vec{b}_{i0} = \vec{p}_{i-1}, \quad \vec{b}_{i1} = \vec{A}_{i-1}, \quad \vec{b}_{i2} = \vec{p}_i$$

可求得 C^1 连续的二次 Bezier 插值样条曲线 $\vec{p}(t)$, 其中 $\vec{p}(t)$ 在 \vec{p}_{i-1}, \vec{p}_i 之间的曲线段为

$$\vec{p}_i(t) = \sum_{j=0}^2 \vec{b}_{ij} B_{j,2}(t) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.4)$$

如果平面凸多边形 $\vec{p}_0\vec{p}_1\dots\vec{p}_n$ 是闭合的, 则在 (3.1) 中令

$$\vec{b}_0 = t_0 \vec{a}_1 + (1-t_0) \vec{a}_n = \vec{b}_n$$

用上述方法可求出插值样条曲线。

注意: (3.1) 中的 $t_i (0 < t_i < 1)$ 是控制参数, 用以调节结点处拟合曲线的切线方向, 使每段曲线达到设计的要求。由 $\vec{b}_i (i=0, 1, \dots, n)$ 的表达式知: 每改变一个 t_i 的值只影响 \vec{b}_i 的值, 即只改变两边形 $\vec{p}_{i-1}\vec{A}_{i-1}\vec{p}_i$ 与 $\vec{p}_i\vec{A}_i\vec{p}_{i+1}$ 的形状, 而不影响其它的两边形。由此可说明用 t_i 作为控制参数只改变两段曲线的形状, 而其它曲线段不受影响。

4. C^2 连续的三次参数插值样条

如果认为 C^1 连续的拟合曲线还不满意, 那么, 在 C^1 连续的基础上, 我们还可以构造 C^2 连续的三次保凸插值样条曲线。

基本思想: 暂不讨论 $\vec{p}_0, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$ 中相邻三点共线的情况。图(3)中, $\{A_i\}_{i=0}^n$ 由上一节中的方法求得, 现在分别作 $\vec{D}_i\vec{C}_i \parallel \vec{p}_i\vec{p}_{i+1}$, 且与 $\vec{p}_i\vec{A}_i, \vec{A}_i\vec{p}_{i+1}$ 分别交于 $\vec{D}_i, \vec{C}_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$, 以三边形 $\vec{p}_i\vec{D}_i\vec{C}_i\vec{p}_{i+1}$ 为特征多边形所得的三次 Bezier 曲线在 \vec{p}_i 与 \vec{p}_{i+1} 之间

显然是 c^1 连续的, 如果我们选取的 \vec{D}_i, \vec{C}_i 适当, 就可以使该拟合曲线于结点 \vec{p}_i 处达到 c^2 连续。

下面我们将具体构造三角形 $\vec{p}_i, \vec{D}_i, \vec{C}_i, \vec{p}_{i+1}$ 。

设

$$\left. \begin{aligned} \vec{D}_{i-1} &= \lambda_{i-1} \vec{p}_{i-1} + (1 - \lambda_{i-1}) \vec{A}_{i-1} \\ \vec{C}_{i-1} &= \lambda_{i-1} \vec{p}_i + (1 - \lambda_{i-1}) \vec{A}_{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

其中 $\{\lambda_i\}_{i=0}^n$ 是一组待定常数。

记 $\vec{p}_{i-1}, \vec{D}_{i-1}, \vec{C}_{i-1}, \vec{p}_i$ 做成的 Bézier 曲线为 $\vec{B}_{i-1}(t)$, 设 $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ 依次是三三角形的各边, 则

$$\begin{aligned} \vec{q}_1 &= (1 - \lambda_{i-1})(\vec{A}_{i-1} - \vec{p}_{i-1}) \\ \vec{q}_2 &= \lambda_{i-1}(\vec{p}_i - \vec{p}_{i-1}) = \lambda_{i-1} \vec{a}_i \\ \vec{q}_3 &= (1 - \lambda_{i-1})(\vec{p}_i - \vec{A}_{i-1}) \end{aligned}$$

由(2.3), (2.4)可得

$$\begin{cases} \vec{B}'_{i-1}(1) = 3\vec{q}_3 \\ \vec{B}''_{i-1}(1) = 6(\vec{q}_3 - \vec{q}_2) \end{cases} \quad (4.2)$$

我们知道: 要使两段曲线 $\vec{B}_{i-1}(t)$ 与 $\vec{B}_i(t)$ 在结点 \vec{p}_i 处达到 c^2 连续, 则 $\vec{B}_{i-1}(t)$ 与 $\vec{B}_i(t)$ 在 \vec{p}_i 点必须有连续的曲率。曲线段 $\vec{B}_{i-1}(t)$ 在 \vec{p}_i 点的曲率为

$$K_{i-1}(1) = \frac{|\vec{B}'_{i-1}(1) \times \vec{B}''_{i-1}(1)|}{|\vec{B}'_{i-1}(1)|^3} \quad (4.3)$$

将(4.2)代入(4.3)中得

$$K_{i-1}(1) = \frac{2}{3} \frac{\lambda_{i-1}}{(1 - \lambda_{i-1})^2} \cdot \frac{|(\vec{p}_i - \vec{A}_{i-1}) \times \vec{a}_i|}{|\vec{p}_i - \vec{A}_{i-1}|^3} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.4)$$

同样可求得曲线段 $\vec{B}_i(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) 在结点 \vec{p}_i 处的曲率

$$K_i(0) = \frac{2}{3} \frac{\lambda_i}{(1 - \lambda_i)^2} \cdot \frac{|(\vec{p}_i - \vec{A}_i) \times \vec{a}_{i+1}|}{|\vec{p}_{i+1} - \vec{A}_i|^3} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.5)$$

为简化表达式, 我们记

$$c = \frac{|(\vec{p}_i - \vec{A}_{i-1}) \times \vec{a}_i|}{|\vec{p}_i - \vec{A}_{i-1}|^3}; \quad d = \frac{|(\vec{p}_i - \vec{A}_i) \times \vec{a}_{i+1}|}{|\vec{p}_{i+1} - \vec{A}_i|^3}$$

令(4.4), (4.5)两式相等, 则得到 λ_i 的递推公式

$$\lambda_i = 1 + \frac{(1 - \lambda_{i-1})^2 d \left(1 \pm \sqrt{\frac{4\lambda_{i-1}c}{(1 - \lambda_{i-1})^2 d} + 1} \right)}{2\lambda_{i-1}c} \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

取

$$\lambda_i = 1 + \frac{(1 - \lambda_{i-1})^2 d \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\lambda_{i-1}c}{(1 - \lambda_{i-1})^2 d}} \right)}{2\lambda_{i-1}c}$$

当 λ_0 取值范围为 $0 < \lambda_0 < 1$ 时, 则由不等

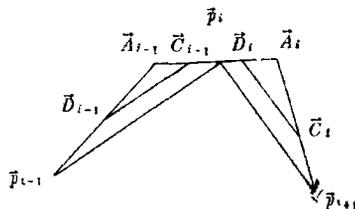


图 3

$$0 > 1 - \sqrt{1+a} = \frac{-a}{1+\sqrt{1+a}} > \frac{-a}{2} \quad (a \geq 0)$$

可递推证得

$$0 < \lambda_i < 1 \quad i=1, 2, \dots, n-1$$

这就保证了 \vec{D}_i, \vec{C}_i 分别不超越线段 $\overline{p_i A_i}, \overline{A_i p_{i+1}}$ 的范围, 同时将所求得的 λ_i 代入 \vec{D}_i, \vec{C}_i 就可求出第 i 段 Bézier 曲线。

记

$$\vec{r}_{i0} = p_i, \vec{r}_{i1} = \vec{D}_i, \vec{r}_{i2} = \vec{C}_i, \vec{r}_{i3} = p_{i+1}$$

则第 i 段 Bézier 曲线的方程为

$$\vec{p}_i(t) = \sum_{j=0}^3 \vec{r}_{ij} B_{j,3}(t) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

如果给定的多边形是闭合的 ($\vec{p}_0 = \vec{p}_n$), 这时在最后一段曲线 $\vec{p}_n(t)$ 要作一个特别处理, 即解一个二元四次方程组。

一个严格的闭合凸轮廓曲线, 一般说来不会出现三点共线的情况, 但由于测量上的误差, 测出的三型值点共线也是有可能的。对于相邻三型值点共线情况我们作如下处理:

(1) 若相邻三型值点共线, 相邻四点不共线, 如 $\vec{p}_{i-1}, \vec{p}_i, \vec{p}_{i+1}$ 共线, 在误差允许范围内改变型值点 \vec{p}_i 的值, 使得改变后的型值点 \vec{p}_i 与其它型值点按原来的次序构成一严格凸多边形。

(2) 如果出现相邻四个以上型值点共线, 如 $\vec{p}_i, \vec{p}_{i+1}, \vec{p}_{i+2}, \vec{p}_{i+3}$ 四点共线, 我们就认为拟合曲线上有一直线段 $\overline{p_i p_{i+3}}$ 。

5. 程序框图与应用分析

4.1 程序框图

以下是求 C^1 连续的二次与 C^2 连续的三次参数 Bézier 曲线拟合的简要程序框图。我们用 n_1 代替有用型值点个数 (闭时 $n_1 = n + 2$, $\vec{p}_{n+1} = \vec{p}_2$, 开时 $n_1 = n + 1$)。以判定曲线是否闭合, 用 $\{t_i\}_{i=0}^{n_1}$ 作控制参数, 以便修改曲线的形状。

4.2 应用分析

设一光滑凸轮廓线的函数方程为 $y = f(x)$, 在凸轮上测得一组凸数组 $\{x_i, y_i\}_{i=0}^{n_1}$, 它们的 C^2 连续的 Bézier 插值曲线为 $B(x)$, 则根据拉格朗日插值逼近误差有如下估计

$$E(x) = |f(x) - B(x)| \leq h^2 M_2$$

其中

$$h = \max \{ |x_i - x_{i-1}| \mid i = 1, 2, \dots, n, n+1 \}$$

$$M_2 = \sup |f''(x)|$$

$$\min \{ x_i \mid i = 0, 1, \dots, n \} \leq x \leq \max \{ x_i \mid i = 0, 1, \dots, n \}$$

例 若测得某一凸轮轮廓线的一凸数组如下:

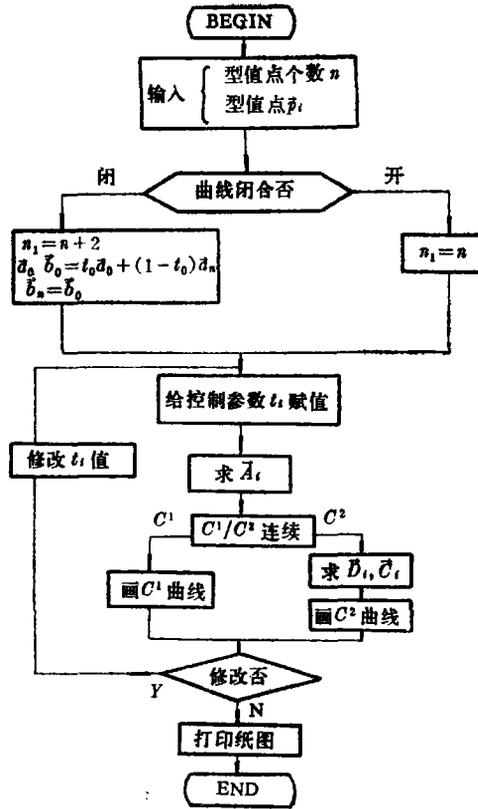


图 4

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 0.5, y_0 = 0 & x_2 &= -0.5, y_2 = 0 \\
 x_1 &= 0, y_1 = 0.3 & x_3 &= 0, y_3 = -0.3 \\
 x_4 &= 0.5, y_4 = 0
 \end{aligned}$$

我们绘制了它的 c^1 连续二次Bezier保凸插值曲线图和(图5)和 c^2 连续三次Bezier保凸插值曲线图(图6)。

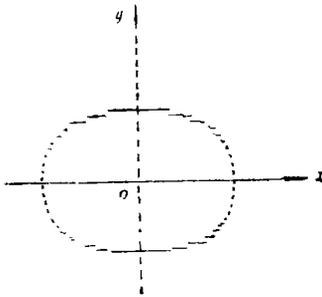


图 5 c^1 连续的拟合曲线

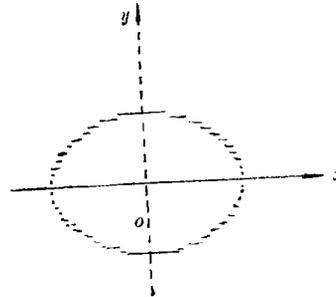


图 6 c^2 连续的拟合曲线

参 考 文 献

- [1] Hiroshi Akima. A New Method of Interpolation and Smooth Curve Fitting Based on Local procedures. ACM. Vol.16, No.6, 1973
- [2] 陈元宽. 盘状凸轮轮廓曲线拟合. 机械设计, No.2, 1986
- [3] 苏步青等. 计算几何. 上海科技出版社, 1981
- [4] 黄友谦. 曲线曲面的数值表示与逼近. 上海科技出版社, 1984
- [5] 唐守胜. 数控机床凸轮加工计算机程序的编制. 机械设计与制造, No.1, 1986

国防科技大学出版社图书

(一) (航天技术类)

- 01 固体火箭发动机工作过程理论基础 3.88元
- 02 大气飞行姿态动力学 2.70元
- 03 航天技术导论 1.80元
- 04 弹道导弹制导方法及最优控制 3.25元
- 05 人造地球卫星轨道力学 1.80元
- 06 两相流动力学 2.50元
- 07 混杂复合材料 1.95元
- 08 复合材料力学性能 2.20元
- 09 材料力学(一)(二) 5.40元

邮购办法:

1. 个人邮购、集体订购、按书款总额收10%的邮挂包扎费。
2. 邮汇: 通过邮局寄到出版社发行科。汇单的附言栏注明所购书名和册数。
3. 信汇: 通过银行信汇, 信汇单上注明书名和册数, 开户银行, 长沙丝茅冲分理处。帐号: 8990515—21

欢迎选购!

Two New Refinement Types of Nash Equilibrium Point

Hou Sixiang

Abstract

In this paper, by viewpoints of system engineering we study the solutions of n -person noncooperative games, give two new refinement types of Nash equilibrium point: 1st Nash equilibrium point (1st Nash e.p.) and 2nd Nash equilibrium point (2nd Nash e.p.), and prove its existence. There is risk in the 1st Nash e.p., conservation in the 2nd Nash e.p., both e.p. satisfying the global optimization.

Key words: Game Theory, Equilibrium point

The Method of Convex Persevering Fitting of Curves for CAD/CAM

Fang Kui Qiang Zhengzai

Abstract

This paper given describes a convex persevering fitting method. Given a sequence of points $\{p_i\}_{i=0}^n$ on a plane, a c' -quadratic (c^2 -cubic) convex persevering parametric spline interpolation curve with Bezier curve segment is constructed.

Also is discussed its applications on CAD/CAM, for example, figure fitting of convex wheel.

Key words: Parametric curve, Interpolating spline, Convex persevering fitting

Some Problems of Structural Dynamic Stability

Zhuo Shyjun Zhou Kejian

Abstract

Some problems of structural dynamic stability are briefly introduced