

## 具有最佳汉明相关性能的跳频序列族

梅文华

陈先福

(空军航空工程研究所)

(国防科技大学)

## 摘 要

在非正交跳频扩展频谱多址通信系统中用作跳频图样的 $P^k$ 进制序列族要求具有小的汉明互相关。文[1]中得到了给定长度和字母表大小的序列的异相自相关及互相关的下限,并构造了具有最佳汉明相关性能的序列族。本文中提出一种更一般的构造方法,文[1]的构造是它的一个特例。构造出的序列族具有最佳汉明相关性能,并且可部分解决Hop-and-Stay问题。

关键词:通信,跳频,序列

## 1 引 言

跳频通信技术具有抗干扰防窃听和选址多址组网等优点,在战术无线通信方面得到重视和应用。跳频通信的实现是用伪随机码(称跳频码)控制信号载波频率在一定频率范围内跳变来完成的,频率跳变的规律称为跳频图样。寻求和设计比较理想的跳频码是研究跳频通信技术的重要课题之一。国内外应用于扩频系统的跳频图样设计技术,主要基于 $m$ 序列、 $M$ 序列、R-S码、本原序列及一般Bent函数序列等。文[1]中考虑了基于 $m$ 序列进行跳频图样设计的一般模型。即使用有限域GF(p)上的 $n$ 级最大长度线性反馈移位寄存器,并且以寄存器的 $k$ 个相邻级控制频率合成器而不用全部 $n$ 级,如图1所示。这种序列具有最佳的汉明相关性能,但是每当在移存器里出现 $n$ 重 $\times \times \dots \times$ , $\times \neq 0$ 时,则输入到频合的是连续 $n-k+1$ 次跳变的 $k$ 重 $\times \times \dots \times$ 。当 $0 \ 0 \dots 0 \ X$ 出现在移存器时类似情况也会发生。这样信号将停留在一个频隙上相当长时间,易于被非法接收机检测,这称为Hop-and-Stay问题。

本文提出一个改进的构造方法,论证其产生的序列族具有最佳的汉明相关性能,该方法可部分解决Hop-and-Stay问题并具有更大的密钥量。改进的方法是:使用 $k$ 个非相邻级而不是相邻级去控制频率合成器,如图2所示。

首先给出汉明相关的定义及最佳性判据。

给定字母表 $A$ 上的长为 $q$ 的两个序列 $X = \{x(j)\}$ 和 $Y = \{y(j)\}$ 之间的汉明相关如下定义:

$$H_{XY}(\tau) = \sum_{j=0}^{q-1} h[x(j), y(j+\tau)], \quad 0 \leq \tau < q \quad (1)$$

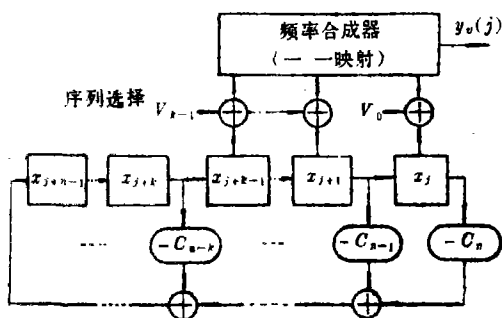


图1 Lempel-Greenberger模型

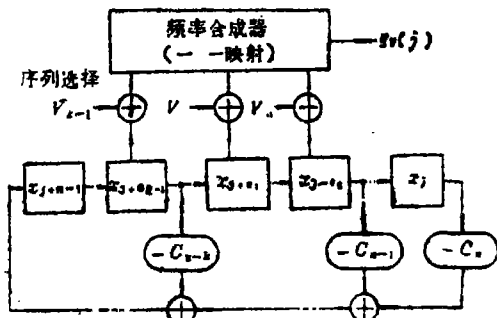


图2 改进的一般模型

其中

$$h[x, y] = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x=y \\ 0, & \text{如果 } x \neq y \end{cases} \quad (2)$$

而且本文中所有相位标志以模  $q$  运算。

设  $S$  表示给定字母表  $A$  上的长为  $q$  的所有序列的集合。对  $X, Y \in S$ , 取

$$H(X) = \max_{0 < \tau < q} \{H_{XX}(\tau)\} \quad (3)$$

$$H(X, Y) = \max_{0 < \tau < q} \{H_{XY}(\tau)\} \quad (4)$$

$$M(X, Y) = \max\{H(X), H(Y), H(X, Y)\} \quad (5)$$

为探讨序列族的性能, 提出如下最佳性判据:

- (1)  $X \in S$  是最佳序列, 如果对于所有  $X' \in S$  有  $H(X) \leq H(X')$ ;
- (2)  $X, Y \in S$  是最佳序列对, 如果对于所有  $X', Y' \in S$  有  $M(X, Y) \leq M(X', Y')$ ;
- (3) 一子集  $F \subset S$  是最佳序列族, 如果  $F$  中每一对不同的序列是最佳序列对。

## 2 最佳序列及最佳序列族的构造

在这一节我们将证明图2结构得到的  $p^k$  进制序列具有最佳的汉明相关性能。图1结构是图2结构的一个特例。A. Lempel和H. Greenberger已证明: 由图1结构所得到的序列具有最佳的汉明相关性能。

给定一素数  $p$  和一正整数  $k$ , 设

$$P = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$$

$$P_k = \{0, 1, 2, \dots, p^k-1\}$$

$$P^k = \{(w_0 w_1 \dots w_{k-1}) \mid w_i \in P\}$$

$P^k$  表示  $P$  上的  $k$  重字集。

存在一个从  $P^k$  到  $P_k$  的一一映射  $\sigma$ , 对于所有的  $w = (w_0 w_1 \dots w_{k-1}) \in P^k$  对应有

$$w\sigma = \sum_{i=0}^{k-1} w_i \cdot p^i \in P_k \quad (6)$$

Lempel和Greenberger已经证明了如下定理:

**定理 1** 对于字母表  $A$  上的长为  $q$  的任何序列  $Y = \{y(j)\}$  有

$$H(Y) \geq \frac{(q-b)(q+b-m)}{m(q-1)} \quad (7)$$

其中  $m$  是字母表  $A$  的大小  $|A| = m$ ,  $b$  是  $q$  模  $m$  的最小非负余数, 而  $H(Y)$  如定义(3)。

**定理 2** 对于  $P_k$  上长为  $q = p^n - 1 \geq 2$  的任意一对序列  $X$  和  $Y$ , 有

$$M(X, Y) \geq p^{n-k}, 1 \leq k \leq n \tag{8}$$

由定理 1 和定理 2 知: 如果序列的自相关以等式满足(7)式, 则该序列为最佳序列; 如果序列对的互相关以等式满足(8)式, 则该序列对为最佳序列对; 如果序列族  $F$  中任何一对不同序列都以等式满足(8)式, 则  $F$  就是最佳序列族。

现在考虑一个  $P$  上长为  $q$  的序列  $X = \{x(j)\}$ , 设  $X(j, k)$  表示  $X$  中第  $j$  个相继或非相继的  $k$  重:

$$[x(j+e_0)x(j+e_1)\cdots x(j+e_{k-1})]$$

这里  $e_i < e_{i+1}$ , 且  $0 \leq e_i \leq n-1$  (对任何  $i$ )。对于每一  $w \in P^k$ , 设  $u_x(w)$  表示  $X$  中不同相位  $j$  的数目。这里  $0 \leq j < q$ , 满足  $w = X(j, k)$ 。  $u_x(w)$  被称为  $X$  中  $w$  的重根数。应用映射  $\sigma$  于  $X$  中相继或非相继的  $k$  重, 可得到  $P_k$  上长为  $q$  的序列  $Y = \{y(j)\}$ , 而

$$y(j) = X(j, k)\sigma = \sum_{i=0}^{k-1} x(j+e_i)p^i, 0 \leq j < q \tag{9}$$

将  $X$  和  $Y$  间的关系(9)表示成  $Y = X\sigma_k$ , 称序列  $Y$  为  $X$  的  $\sigma_k$  变换。例如二进制序列

$$\begin{matrix} X = 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \tag{10}$$

如果  $y(j) = x(j) + x(j+1) \cdot 2 + x(j+2) \cdot 4$ , 则  $X$  的  $\sigma_3$  变换为:

$$\begin{matrix} Y = 2 & 5 & 2 & 5 & 6 & 3 & 1 & 4 & 6 & 3 & 5 & 6 & 7 & 3 & 5 & 6 & 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ & 2 & 1 & 4 & 6 & 7 & 3 & 1 & 0 & 4 & 2 & 5 & 6 & 7 & 7 & 3 & 1 & 4 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ & 0 & 4 & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 3 & 5 \end{matrix} \tag{11}$$

如果  $y(j) = x(j) + x(j+2) \cdot 2 + x(j+4) \cdot 4$ , 则  $X$  的  $\sigma_3$  变换为:

$$\begin{matrix} Y = 0 & 7 & 4 & 3 & 2 & 5 & 5 & 2 & 6 & 5 & 7 & 2 & 7 & 5 & 3 & 6 & 1 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ & 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 5 & 0 & 6 & 4 & 7 & 6 & 3 & 3 & 5 & 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ & 4 & 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 6 & 6 & 7 & 7 & 3 & 7 & 1 & 7 \end{matrix} \tag{12}$$

为简单起见, 并不失一般性, 我们在例题中均假定  $p=2$ 。

所提出的最佳序列的构造方法基于下述定理。

**定理 3** 设  $X$  为  $GF(p)$  上长为  $q = p^n - 1$  的一个  $m$  序列, 那么对所有  $k, 1 \leq k \leq n$ ,  $X$  的  $\sigma_k$  变换是  $P_k$  上长为  $q$  的最佳序列。

**证明** 设  $Y = \{y(j)\}$  是一长为  $q = p^n - 1$  的  $m$  序列  $X = \{x(j)\}$  的  $\sigma_k$  变换, 这里  $1 \leq k \leq n$ 。设  $\gamma^r$  表示循环移位运算, 如下定义:

$$X\gamma^r = \{x(j)\}\gamma^r = \{x(j+\tau)\}$$

则有

$$Y\gamma^r = (X\sigma_k)\gamma^r = (X\gamma^r)\sigma_k$$

而

$$H_{YY}(\tau) = \sum_{j=0}^{q-1} h[y(j), y(j+\tau)], 0 \leq \tau < q$$

当  $\tau=0$  时,

$$H_{YY}(0) = \sum_{j=0}^{q-1} h[y(j), y(j)] = q$$

当  $\tau \neq 0$  时,

$$H_{YY}(\tau) = \sum_{j=0}^{q-1} h[X(j, k)\sigma, X(j+\tau, k)\sigma]$$

$X(j, k)\sigma = X(j+\tau, k)\sigma$ , 当且仅当  $X(j, k) = X(j+\tau, k)$ 。定义  $Z = X - X\gamma^r$ , 则  $Z(j, k) = X(j, k) - X(j+\tau, k)$ 。因此  $X(j, k)\sigma = X(j+\tau, k)\sigma$ , 当且仅当  $Z(j, k) = 0^k$ 。所以  $H_{YY}(\tau) = u_Z(0^k)$ 。

$\tau \neq 0$  时  $Z = X - X\gamma^r$  是  $m$  序列  $X$  的某一个位移序列, 由  $m$  序列的性质知:

$$\begin{aligned} H_{YY}(\tau) &= u_Z(0^k) = u_X(0^k) \\ &= p^{n-k} - 1, \quad \tau \neq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

现回到定理 1, 如果  $q = p^n - 1$ ,  $A = P_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , 则  $m = p^k$  且知  $b = p^k - 1$ , 代入 (7) 式得

$$H(Y) \geq \frac{(p^n - p^k)(p^n - 2)}{p^k(p^n - 2)} = p^{n-k} - 1 \quad (14)$$

由上面推导知, 若  $X$  是一长  $p^n - 1$  的  $m$  序列, 则  $X$  的  $\sigma_k$  变换  $Y = X\sigma_k$  的异相自相关  $H_{YY}(\tau)$  恒为  $p^{n-k} - 1$ 。所以  $H(X\sigma_k) = \max_{0 < \tau < q} \{H_{YY}(\tau)\} = p^{n-k} - 1$ , 即  $X\sigma_k$  以等式满足

(14) 式。由最佳性判据知  $X$  的  $\sigma_k$  变换是  $P_k$  上长为  $q$  的最佳序列。(证毕)

现在证明图 2 结构的序列族是最佳序列族。先用数学语言表述图 2 的构造方法:

设  $X = \{x(j)\}$  为  $\text{GF}(p)$  上长为  $q = p^n - 1$  的一个  $m$  序列。对任意  $j \in P_n$  及  $v \in P_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , 用  $X_v(j, k)$  代表  $X$  的第  $j$  个  $k$  重  $X(j, k)$  和  $k$  重  $v\sigma^{-1} \in P^k$  的逐项模  $p$  之和, 即:

$$X_v(j, k) = X(j, k) + v\sigma^{-1} \quad (15)$$

对任何  $v \in P_k$ ,  $Y_v = \{y_v(j)\}$  是  $P_k$  上长为  $q = p^n - 1$  的序列, 该序列的第  $j$  项由下定义:

$$y_v(j) = X_v(j, k)\sigma \quad (16)$$

从  $X$  到  $Y_v$  的复合变换可用  $Y_v = X\sigma_k(v)$  表示。

**定理 4** 设  $X = \{x(j)\}$  是  $\text{GF}(p)$  上长为  $q = p^n - 1 \geq 2$  的一个  $m$  序列, 对每一  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $p^k$  个序列  $Y_v = X\sigma_k(v)$ ,  $v \in P_k$  的集合是一个最佳序列族, 而且  $F$  中每一序列本身也是最佳的。

**证明** 考虑一对序列  $Y_r, Y_s \in F$ , 有

$$H_{Y_r Y_s}(\tau) = \sum_{j=0}^{q-1} h[y_r(j), y_s(j+\tau)]$$

因为映射  $\sigma$  是一一对应的,  $y_r(j) = y_s(j+\tau)$  当且仅当  $X_r(j, k) = X_s(j+\tau, k)$ , 或等效地, 当且仅当  $X(j, k) - X(j+\tau, k) = s\sigma^{-1} - r\sigma^{-1}$ 。取  $Z = X - X\gamma^r$  和  $w = s\sigma^{-1} - r\sigma^{-1}$ , 上式等效为

$$Z(j, k) = w$$

由此得到

$$H_{Y_r Y_s}(\tau) = u_Z(w)$$

若  $r = s$ , 则  $w = 0^k$ 。情况和定理 3 完全一样。故知每一序列  $Y_r \in F$  本身是最佳的。

假设  $r \neq s$ , 则  $w \neq 0^k$ 。若  $\tau = 0$ , 则  $Z$  是长为  $q$  的全 0 序列, 显然  $Z$  中  $w$  的重根数为 0, 即

$$H_{Y_r Y_s}(0) = 0, \quad r \neq s \quad (17)$$

若  $\tau \neq 0$ , 则  $Z = X - X\gamma^r = X\gamma^0$ , 而  $X\gamma^0$  中  $w$  的重根数与  $X$  中的一样, 为  $p^{n-k}$ :

$$H_{Y_r Y_s}(\tau) = u_X(w) = p^{n-k}, \quad r \neq s, \quad 0 < \tau < q \quad (18)$$

由 (17) 式和 (18) 式知, 对于  $F$  中任何一对不同的序列有

$$H(Y_r, Y_s) = p^{n-k} \tag{19}$$

已经证明，每一  $Y_v \in F$  本身是最佳序列，且  $H(Y_r) = H(Y_s) = p^{n-k} - 1$ 。因此  $M(Y_r, Y_s) = p^{n-k}$ 。由定理 2 知序列族  $F$  是最佳的。

作为一个例子，考虑(10)式的二进制  $m$  序列的  $\sigma_3(v)$  变换的 8 个序列的集合  $F$ ，取  $y(j) = x(j) + x(j+2) \cdot 2 + x(j+4) \cdot 4$ ，8 个序列如下：

$Y_0$ ：如(12)式

```

Y1= 1 6 5 2 3 4 4 3 7 4 6 3 6 4 2 7 0 2 5 0 3
    5 4 7 3 2 0 4 1 7 5 6 7 2 2 4 0 7 1 2 1 4
    5 3 3 0 0 5 1 3 1 0 1 5 5 7 7 6 6 2 6 0 6
Y2= 2 5 6 1 0 7 7 0 4 7 5 0 5 7 1 4 3 1 6 3 0
    6 7 4 0 1 3 7 2 4 6 5 4 1 1 7 3 4 2 1 2 7
    6 0 0 3 3 6 2 0 2 3 2 6 6 4 4 5 5 1 5 3 5
.....
Y7= 7 0 3 4 5 2 2 5 1 2 0 5 0 2 4 1 6 4 3 6 5
    3 2 1 5 4 6 2 7 1 3 0 1 4 4 2 6 1 7 4 7 2
    3 5 5 6 6 3 7 5 7 6 7 3 3 1 1 0 0 4 0 6 0
    
```

容易验证， $H(Y_v) = 7$ ， $0 \leq v \leq 7$ ；且有  $M(Y_r, Y_s) = 8$ ，对所有  $r, s \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}$ ， $r \neq s$ 。

### 3 序列的游程：Hop-and-Stay 问题

序列的最长游程对应于跳频图样在某个频隙上的最长停留时间。为了抗截获和转发式干扰，总希望跳频序列的最长游程越小越好。

**定理 5** 设  $X$  为  $GF(p)$  上长为  $q = p^n - 1$  的一个  $m$  序列， $X$  的  $\sigma_k(v)$  变换  $Y_v$  的最长游程的极大值为  $n - k + 1$ 。

**证明**  $X$  的  $\sigma_k(v)$  变换  $Y_v$  的最长游程等于  $X$  的  $\sigma_k$  变换  $Y$  的最长游程，只要证明  $Y$  的最长游程的极值为  $n - k + 1$  即可。用反证法。

已经知道：当  $X(j, k)$  表示  $X$  中第  $j$  个相继的  $k$  重时，即是说以寄存器的  $k$  个相邻级控制频合时， $X$  的  $\sigma_k$  变换  $Y$  的最长游程达到  $n - k + 1$ 。假设最长游程的极大值不是  $n - k + 1$ ，即大于  $n - k + 1$ ，不妨假定为  $n - k + 2$ 。考虑连续  $n - k + 2$  个码元所对应的矢量  $X(j, k)$ ， $1 \leq j \leq n - k + 2$ ，作如下矩阵：

$$\begin{bmatrix} x(1+e_0) & \cdots & x(1+e_{i-1}) & x(1+e_i) & \cdots & x(1+e_{k-1}) \\ x(2+e_0) & \cdots & x(2+e_{i-1}) & x(2+e_i) & \cdots & x(2+e_{k-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x(n-k+2+e_0) & \cdots & x(n-k+2+e_{i-1}) & x(n-k+2+e_i) & \cdots & x(n-k+2+e_{k-1}) \end{bmatrix}$$

其中行矢量即为  $X(j, k)$ ， $1 \leq j \leq n - k + 2$ 。

若  $X(1, k) = X(2, k) = \dots = X(n - k + 2, k)$ ，对应跳频序列  $Y$  中存在长为  $n - k + 2$  的游程，则矩阵中每列的元相等，即  $x(1+e_i) = x(2+e_i) = \dots = x(n - k + 2 + e_i)$ ， $0 \leq i \leq k - 1$ 。如果证明相邻两列元素中存在相位标志相同的码元，则这两列元素相等。任取相邻两列，如第  $i$  列和第  $i + 1$  列，比较第  $i$  列最后的元  $x(n - k + 2 + e_{i-1})$  和第  $i + 1$  列的第一个元  $x(1 + e_i)$  的位标：

$$\begin{aligned} \text{因} \quad e_i &\leq e_{i-1} + n - k + 1 \\ \text{故} \quad 1 + e_i &\leq n - k + 2 + e_{i-1} \end{aligned}$$

这说明第  $i$  列和第  $i+1$  列有相位相同的元, 推知这两列所有元均相等。因为这相邻两列的选取是任意的, 最终得出上述矩阵中所有的元均相等, 即  $x(l) = \text{常数}$ ,  $1 + e_0 \leq l \leq n - k - 2 + e_{k-1}$ , 而  $e_{k-1} \geq k - 1 + e_0$ , 所以  $n - k + 2 + e_{i-1} \geq n + 1 + e_0$ , 推出在  $n$  级  $m$  序列中存在长为  $n+1$  以上的游程。显然, 这与  $m$  序列的游程特性相矛盾。故知假设是错误的。定理得证。

**定理 6** 设  $X$  为  $\text{GF}(p)$  上长为  $q = p^n - 1$  的一个  $m$  序列,  $X(j, k)$  表示  $X$  中第  $j$  个相继或非相继的  $k$  重:  $[x(j + e_0) \ x(j + e_1) \ \cdots \ x(j + e_{k-2}) \ x(j + e_{k-1})]$ 。仅当如下情况时,  $X$  的  $\sigma_k(v)$  变换  $Y_v$  的最长游程才可能达到极大值  $n - k + 1$ :

1) 当  $e_i = i + e_0$ ,  $0 \leq i \leq t - 1$  而  $e_i = n - (k - i) + e_0$ ,  $t \leq i \leq k - 1$  时, 序列  $Y_v$  可能出现长为  $n - k + 1$  的游程。是否出现与  $m$  序列  $X$  有关;

2) 当  $e_i = i + e_0$ ,  $0 \leq i \leq k - 1$  时, 序列  $Y_v$  一定会出现长为  $n - k + 1$  的游程  $p - 1$  个。

**证明** 考虑如下矩阵

$$\begin{bmatrix} x(1 + e_0) & \cdots & x(1 + e_{t-1}) & x(1 + e_t) & \cdots & x(1 + e_{k-1}) \\ x(2 + e_0) & \cdots & x(2 + e_{t-1}) & x(2 + e_t) & \cdots & x(2 + e_{k-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x(n - k + 1 + e_0) & \cdots & x(n - k + 1 + e_{t-1}) & x(n - k + 1 + e_t) & \cdots & x(n - k + 1 + e_{k-1}) \end{bmatrix}$$

假设上述  $n - k + 1$  个码矢  $X(j, k)$  相等, 则矩阵中每列的元相等。比较任意相邻两列中前列的最后一元与后列的最前一元的位标, 如比较  $x(n - k + 1 + e_{t-1})$  和  $x(1 + e_t)$  的位标。

因  $e_t \leq e_{t-1} + n - k + 1$ , 分两种情况考虑:

1)  $e_t = e_{t-1} + n - k + 1$

由  $e_{t-1} \geq t - 1 + e_0$ , 推出  $e_t \geq n - (k - t) + e_0$

由定义有  $e_t \leq n - (k - t) + e_0$

故得出

$$\begin{aligned} e_t &= n - (k - t) + e_0 \\ e_{t-1} &= t - 1 + e_0 \end{aligned}$$

这意味着:  $e_i = i + e_0$ ,  $0 \leq i \leq t - 1$ ;

$$e_i = n - (k - i) + e_0, \quad t \leq i \leq k - 1$$

由此继续推得矩阵中前  $t$  列中所有元相等, 后  $k - t$  列中所有元为另一常元:

$$x(l) = \text{元}1, \quad 1 + e_0 \leq l \leq n - k + t + e_0$$

$$x(l) = \text{元}2, \quad n - k + t + 1 + e_0 \leq l \leq 2n - k + e_0$$

这种情况在  $n$  级  $m$  序列中可能出现也可能不出现。定理 6.1 得证。

2)  $e_t < e_{t-1} + n - k + 1$

这时有  $e_t \leq e_{t-1} + n - k$ , 得  $1 + e_t \leq n - k + 1 + e_{t-1}$ 。由此推得第  $t$  列元素等于第  $t+1$  列元素。继续比较任意其它两列元素时, 如果不相等, 则归入上述 1) 中的情况。直到比较完所有的相邻列, 得到矩阵中所有的元均相等;

$$x(l) = \text{常元}, 1 + e_0 \leq l \leq n - k + 1 + e_{k-1}$$

由  $e_{k-1} \geq k - 1 + e_0$ , 推得  $n - k + 1 + e_{k-1} \geq n + e_0$ 。由  $m$  序列的游程特性知,  $e_{k-1}$  的值只能取  $k - 1 + e_0$ , 这意味着  $e_i = i + e_0, 0 \leq i \leq k - 1$ 。

因为  $m$  序列中一定会出现长为  $n$  的游程  $p - 1$  个, 所以当  $e_i = i + e_0, 0 \leq i \leq k - 1$  时, 序列  $Y_s$  一定会出现  $p - 1$  个长为  $n - k + 1$  的游程。证毕

定理 5 和 6 是很有意义的。它指出了最佳跳频序列族的最长游程的极大值, 表明 A. Lempel 和 H. Greenberger 提出的模型存在最严重的 Hop-and-Stay 问题, 并为避免出现最差情况指明了方向: 使用  $k$  个非相邻级去控制频合 (这里假定第 1 级和第  $n$  级亦为相邻级)。

比较序列 (11) 和序列 (12) 中的最长游程, (11) 中为 4, (12) 中仅为 2。笔者对  $n \leq 10, k = 3$  的情况进行了计算机模拟, 表明使用  $k$  个非相邻级时最长停留时间减少一半左右, 大大改善了抗截获性能。

## 4 结 束 语

当  $k = n$  时,  $q = p^n - 1, H(Y) = 0$  且  $M(Y_r, Y_s) = 1$ 。具有  $p^n$  个序列的跳频序列族是  $GF(p^n)$  上一阶  $R-S$  码的子集, 它已广泛应用于跳频系统, 尤其是具有自同步技术的跳频系统。

当  $k < n$  时,  $q = p^n - 1, H(Y) = p^{n-k} - 1, M(Y_r, Y_s) = p^{n-k}$ , 具有  $p^k$  个跳频序列。使用  $k$  个非相邻级控制频合, 可部分地解决使用  $k$  个相邻级时存在的 Hop-and-Stay 问题, 并具有更大的密钥量。

感谢周兆祺教授、李情与副教授、饶世林副教授的指导和帮助。

## 参 考 文 献

- [1] A. Lempel and H. Greenberger. Families of Sequences with Optimal Hamming Correlation Properties. IEEE Trans. on IT-20, 1974; (1): 90~94
- [2] D. V. Sarwate and M. B. Pursley. Hopping Patterns for Frequency-Hopped Multiple-Access Communication. ICC'78; 7(4): 1~3
- [3] M. K. Simon et al. Spread Spectrum Communications Computer Science Press, Inc., 1985; 1
- [4] S. W. Golomb. Shift Register Sequences. San Francisco: Holden-Day, 1967

## Families of Frequency-Hopping Sequences with Optimal Hamming Correlation Properties

Mei Wenhua Chen Xianfu

### Abstract

Families of  $p^k$ -ary sequences with small Hamming crosscorrelation are required for hopping patterns in asynchronous frequency-hopping spread-spectrum multiple-access communication systems. Lower bounds on the out-of-phase auto correlation and on the crosscorrelation of sequences of given length and alphabet size are derived in [1], and a method of constructing families of sequences that uniformly realize these bounds is presented as well. In this paper, a commonest method of constructing families of frequencyhopping sequences with optimal Hamming correlation properties is presented, taking the method in [1] as its special case. By driving the frequency synthesizer from  $k$  inconsecutive stages rather than from  $k$  consecutive stages, we can partially solve the Hop-and-Stay problem existing in [1].

**Key words:** Communication, Frequency-hopping, Sequences

## Research on Periodicity of Input and Output of S-boxes in DES

Xiao Rong

### Abstract

There are not any general conclusions about periodicity of DES when it is used in stream cipher system. The author discusses this problem and gives a low bound for period of S-boxes.

**Key words:** Cipher communication, DES method, periodicity