

## 变换自适应算法实现特征矢量谱

赵滨生 陆仲良

(航天部501设计部) (国防科技大学)

## 摘 要

特征矢量法是分辨相关信号源的一种有效算法。该算法需求出阵列接收信号空间相关矩阵的最小特征矢量。本文在梯度法与空间三角格型法基础上,提出了一种新的算法:变换自适应法。此法通过一个变换,将求矩阵最小特征矢量的问题转换成求最大特征矢量,从而避免了矩阵求逆这一繁杂过程。理论分析及计算机仿真结果均表明,该算法在计算量和收敛速度方面具有相当的优越性。

关键词:高分辨,相关源,特征矢量谱,特征值

## 1 引 言

七十年代末, R. Schmidt提出的多信号源分类 (MUSIC) 算法<sup>[1]</sup>开辟了特征结构分析的道路。基于该算法之原理,很快涌现出多种算法<sup>[2,3,4,5]</sup>,其中,特征矢量法 (EVM)<sup>[2]</sup>是解决相干源超角分辨问题的一种有效算法。

EVM是基于阵列接收信号空间相关矩阵的特征值和特征矢量分解的原理,且假定场的模型是 $(P-1)$ 个(或更少)辐射点源( $P$ 为阵元总数目),它们处在空间白噪声中。当信号源不完全相关时,空间相关矩阵 $R$ 的最小特征矢量与所有的信号源方向矢量正交<sup>[6]</sup>,即

$$\vec{a}^H(\theta_i) \cdot \vec{V}_{\min} = 0 \quad (1)$$

式中,  $\vec{a}(\theta_i) = [1, e^{j\omega_0 r_i}, \dots, e^{j\omega_0^{(P-1)} r_i}]^T$  为信号源的方向矢量,  $i=1, \dots, q$  ( $q$ 为信号源数目),  $\vec{V}_{\min}$ 为 $R$ 的最小特征矢量。

特征矢量谱定义为:

$$P_{EV}( \theta ) = 1 / |\vec{a}^H(\theta) \cdot \vec{V}_{\min}|^2 \quad (2)$$

当 $\theta = \theta_i$ ,  $i=1, \dots, q$ 时,  $P_{EV}(\theta)$ 出现峰值。由此可有效地指示出信号源的方位。

要得到特征矢量谱,首先必须求出空间相关矩阵 $R$ 的最小特征矢量 $\vec{V}_{\min}$ ,文[2]中提出了两种求 $\vec{V}_{\min}$ 的算法:梯度法和空间三角格型法。并分析指出,梯度法虽计算量小,但收敛速度慢,空间三角格型法收敛速度快,但是它的计算量太大。本文提出了一种新的算法:变换自适应法(以下简称变换法)并证明了其计算量同于梯度法,收敛速

度略慢于空间三角格型法。这种新算法是实现特征矢量谱的一种较理想算法。

## 2 求最小特征矢量的算法

在介绍变换法前,先来看一下梯度法和空间三角格型法。

### 2.1 梯度法

梯度法是基于这样一个事实,即  $R$  的最小特征矢量  $\vec{v}_{\min}$  是具有正交约束加权矢量的波束形成器的最小输出功率的解。设波束形成器的输出为  $Y(t) = \vec{w}^t \cdot \vec{r}(t)$ ,  $\vec{w} = [w_1 \cdots w_p]^t$  是加权矢量。于是用梯度下降法来求以下问题的最佳解:

$$\begin{cases} P = E[Y^*(t) \cdot Y(t)] = \vec{w}^H R \vec{w} & (3-1) \\ \|\vec{w}\| = \vec{w}^H \vec{w} = 1 & (3-2) \end{cases}$$

迭代价函数  $J = \vec{w}^H R \vec{w} + \lambda(\vec{w}^H \vec{w} - 1)$ , 使  $J$  最小的  $\vec{w}$  即为  $R$  的最小特征矢量。

用梯度法来求  $\vec{w}$ , 其递推公式为:

$$\begin{cases} \vec{w}(K+1) = \hat{\vec{w}}(K) - 2\mu R \hat{\vec{w}}(K) & (4-1) \\ \hat{\vec{w}}(K+1) = \vec{w}(K+1) / |\vec{w}^H(K+1) \vec{w}(K+1)|^{1/2} & (4-2) \end{cases}$$

要使(4)式收敛,  $\mu$  必须满足:  $|\mu| < \frac{1}{2\lambda_{\max}}$  (4-3)

式中  $\lambda_{\max}$  为  $R$  的最大特征值。

$\hat{\vec{w}}(K)$  为第  $K$  步迭代的最小特征矢量  $\vec{v}_{\min}$  的估值, 当  $K \rightarrow \infty$  时,  $\hat{\vec{w}}(K) \rightarrow \vec{v}_{\min}$ 。相关矩阵  $R$  是按下式进行实时估计的:

$$\hat{R}(t) = r\hat{R}(t-1) + (1-r)\vec{r}^*(t)\vec{r}^t(t), \quad r < 1 \quad (5)$$

$\vec{r}(t)$  为  $t$  时刻阵列接收的信号矢量。

梯度法的优点是简单、计算量小。缺点是收敛速度受  $\mu$  值影响。为了使算法收敛,  $\mu$  必须满足(4-3)式, 但  $\mu$  值若取得太小, 收敛速度会很慢。

### 2.2 三角格型算法

另一种求最小特征矢量的方法是逆幂迭代法。根据公式:

$$\vec{w}(0) = [1 \ 0 \cdots 0]^t \quad (6-1)$$

$$\vec{w}(K+1) = R^{-1} \vec{w}(K) \quad (6-2)$$

$$\vec{w}(K+1) = \vec{w}(K+1) / |\vec{w}^t(K+1) \vec{w}^*(K+1)|^{1/2} \quad (6-3)$$

可以求得  $R^{-1}$  的最大特征矢量, 亦即  $R$  的最小特征矢量。

该方法的复杂性在于需实时地估计出  $R^{-1}$  的值, 利用空间三角格型滤波器可以做到这一点。

空间三角格型滤波器的结构如图1所示。它是建立在左向和右向预测滤波器基础之上的。在  $K$  时刻, 设第  $n$  个阵元数据的  $m$  阶左、右预测值分别为:

$$\hat{r}_{n,l}^m(K) = \sum_{s=1}^m a_{n,s}^m r_{n+s}(K) \quad (7)$$

$$\hat{r}_{n,r}^m(K) = \sum_{s=1}^m b_{n,s}^m r_{n-s}(K) \quad (8)$$

式中  $\{a_{n,s}^m, s=1, \cdots, m\}$  和  $\{b_{n,s}^m, s=1, \cdots, m\}$  分别为左、右预测滤波器系数。  $f_n^m(K)$ 、

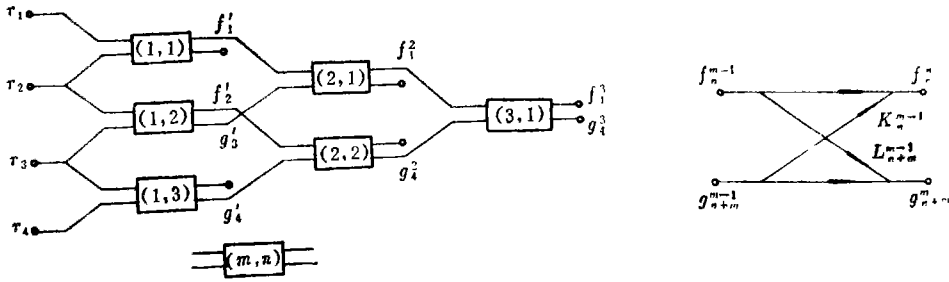


图 1 四阵元的空间格型滤波器

$g_n^m(K)$ 为左、右预测误差:

$$f_n^m(K) = r_n(K) - \hat{r}_{ni}^m(K) \tag{9}$$

$$g_n^m(K) = r_n(K) - \hat{r}_{nr}^m(K) \tag{10}$$

预测误差功率最小为最佳。在最佳情况下,存在阶次递归关系:

$$f_n^m(K) = f_n^{m-1}(K) - K_n^{m-1} g_{n+m}^{m-1}(K) \tag{11-1}$$

$$g_n^m(K) = g_n^{m-1}(K) - L_n^{m-1} f_n^{m-1}(K) \tag{11-2}$$

式中  $K_n^{m-1}$ 、 $L_n^{m-1}$  分别称为左、右反射系数。由最小误差功率条件得出:

$$K_n^{m-1} = E[g_{n+m}^{m-1*}(K) \cdot f_n^{m-1}(K)] / E[g_{n+m}^{m-1*}(K) \cdot g_{n+m}^{m-1}(K)] \tag{12-1}$$

$$L_n^{m-1} = E[f_n^{m-1*}(K) \cdot g_n^{m-1}(K)] / E[f_n^{m-1*}(K) \cdot f_n^{m-1}(K)] \tag{12-2}$$

以及初始条件:

$$f_n^0(K) = g_n^0(K) = r_n(K) \tag{13}$$

式(11)为空间三角格型滤波器的基础,图1中的每个格子都是由它建立的。

左、右预测滤波器系数服从下列阶次递归关系:

$$\begin{cases} a_{ns}^m = a_{ns}^{m-1} - K_n^{m-1} \cdot b_{n+m, m-s}^{m-1}, & s = 1, \dots, (m-1) \end{cases} \tag{14-1}$$

$$\begin{cases} a_{nm}^m = K_n^{m-1} \end{cases} \tag{14-2}$$

$$\begin{cases} b_{ns}^m = b_{ns}^{m-1} - L_n^{m-1} \cdot a_{n-m, m-s}^{m-1}, & s = 1, \dots, (m-1) \end{cases} \tag{14-3}$$

$$\begin{cases} b_{nm}^m = L_n^{m-1} \end{cases} \tag{14-4}$$

利用预测误差功率及预测滤波器系数,并考虑预测滤波器中的一些正交特性,可以求得  $R^{-1}$ 。

$$R^{-1} = A^H D^{-1} A \tag{15-1}$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -a_{1,1}^{p-1} & -a_{1,2}^{p-1} \cdots -a_{1,p-1}^{p-1} \\ 0 & 1 & -a_{2,1}^{p-2} \cdots -a_{2,p-2}^{p-2} \\ 0 & 0 & 1 \cdots -a_{3,p-3}^{p-3} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & & 1 \end{bmatrix} \tag{15-2}$$

$$D^{-1} = D_{diag} [1/d_1 \ 1/d_2 \ \dots \ 1/d_p] \tag{15-3}$$

$$d_l = E[f_l^{p-l}(K) \cdot f_l^{p-l*}(K)], \quad l = 1, 2, \dots, p \tag{15-4}$$

要想实时地得到  $R^{-1}$  的估值,在新数据连续收到的情况下,要实时地刷新反射系数,实现阶次和时间递归刷新滤波器参数。

标量反射系数  $K_m^n$  和  $L_m^n$  的时间递归形式为：

$$K_{n+1}^{m-1}(K) = \beta(K) [\mu(K) K_{n+1}^{m-1}(K-1) + g_{n+1}^{m*}(K) f_{n+1}^{m-1}(K)] \quad (16)$$

$$L_{n+1}^{m-1}(K) = \alpha(K) [\mu'(K) L_{n+1}^{m-1}(K-1) + f_{n+1}^{m-1*}(K) g_{n+1}^{m-1}(K)] \quad (17)$$

这里  $\mu(K)$ 、 $\mu'(K)$ 、 $\beta(K)$ 、 $\alpha(K)$  可以是常数，也可以是与剩余功率有关的参数。

将实时求得的  $R^{-1}$  代入(6)式，即可得到  $R$  的最小特征矢量。

空间三角格型滤波法可以快速提供  $R^{-1}$  的估值，其收敛速度比梯度法快<sup>[2]</sup>，没有  $\mu$  值选取的限制。但是实时求  $R^{-1}$  却带来很大的计算量。

### 2.3 变换法

变换法<sup>[7]</sup>也是将求矩阵的最小特征矢量的问题转化成求矩阵最大特征矢量的问题。不过这里无需求  $R^{-1}$ ，因此这种算法的计算量较小。

考虑到  $(p \times p)$  空间相关矩阵  $R$  是 Hermitian 矩阵，因而它有  $p$  个实特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ，且满足：

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0 \quad (18)$$

令 
$$a = \text{tr}(R) = \sum_{i=1}^p R(i, i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \quad (19)$$

则 
$$a > \lambda_i > 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, p \quad (20)$$

于是有：

$$|\lambda_p - a| \geq |\lambda_{p-1} - a| \geq \dots \geq |\lambda_1 - a| > 0 \quad (21)$$

可见，矩阵  $R - aI$  绝对值最大的特征值对应的特征矢量就是矩阵  $R$  的最小特征矢量。

于是求  $R$  的最小特征矢量的迭代过程为：

$$\begin{cases} \tilde{w}(0) = [0 \ 0 \dots 1]^t & (22-1) \\ \tilde{w}(K+1) = (R - aI)\tilde{w}(K) & (22-2) \\ \tilde{w}(K+1) = \tilde{w}(K+1) / |\tilde{w}^t(K+1)\tilde{w}^*(K+1)|^{1/2} & (22-3) \end{cases}$$

$K \rightarrow \infty$  时， $\tilde{w}(K)$  即为  $R$  的最小特征矢量， $R$  的值仍用(5)式实时估计。

## 3 三种算法的比较

这一节，从计算量以及收敛速度两方面对这三种算法进行比较。

### 3.1 计算量的比较

表 1 给出了每次快拍下，三种算法的计算量比较。在同一瞬时对  $p$  个阵元采样，称为一次快拍。

表 1 三种算法的计算量比较

算 法	计 算 量
梯 度 法	$3p^2 + 4p$ 次复乘，一次开平方运算
三角格型法	$\propto p^3$ 次复乘
变 换 法	$3p^2 + 4p$ 次复乘，一次开平方运算

从表中看出，变换法的计算量同于梯度法，比三角格型法少。

### 3.2 收敛速度的比较

文[2]中给出了梯度法和三角格型法收敛速度的比较,见图2。图3是变换法与三角格型法收敛时间的比较。

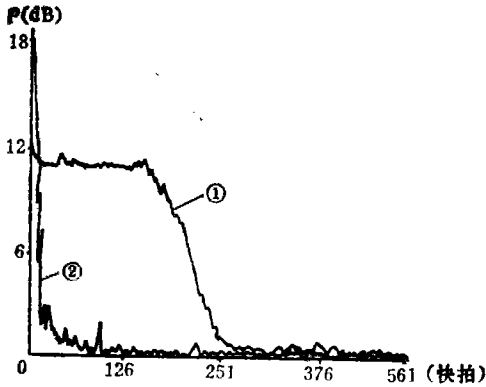


图2 梯度法与三角格型法收敛时间比较

①梯度法; ②三角格型法

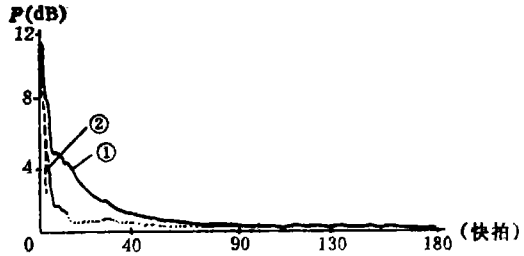


图3 变换法与三角格型法收敛时间比较

①变换法; ②三角格型法

通过对计算量和收敛时间的比较,可以得到如下结论:

- a. 计算量: 梯度法 = 变换法 << 三角格型法;
- b. 收敛时间: 三角格型法 < 变换法 << 梯度法。

## 4 特征矢量谱的实现

由于梯度法收敛速度太慢,本作者没有用它去实现特征矢量谱。

三角格型法及变换法实现特征矢量谱的过程,见图4。

每一快拍下:

$m=1, P-1, n=1, P-m$   
 计算  $K_{n-1}^{-1}, L_{n-1}^{m-1}$  [(16)、(17)式]  
 计算  $f_n^m, g_{n-m}^m$  [(11)式]

计算剩余功率  $d_l, l=1, \dots, P$  [(15-4)式]

$m=2, P-1, n=1, P-m,$   
 $S=1, m-1$  计算  $a_n^m, \delta_n^m$  [(14)式]

计算  $R^{-1}$  [(15-1)式]

进行一次或  $K$  次迭代,求  $R$  的最小特征矢量  $\vec{v}_{\min}$  [(16)式]

求特征矢量角谱 [(2)式]

(4a)

计算  $R$  [(5)式]

求  $a$  [(19)式]

进行一次或  $K$  次迭代,求  $R$  的最小特征矢量  $\vec{v}_{\min}$  [(22)式]

求  $P_{EV}(\theta)$  谱 [(2)式]

(4b)

图4 三角格型法及变换法实现特征矢量谱过程

(4a) 三角格型法实现特征矢量谱过程

(4b) 变换法实现特征矢量谱过程

图5示出了分别用三角格型法及移位法实现的特征矢量谱。图中可见,一定快拍后

(即收敛后), 两种算法得到的角度谱几乎无差别。

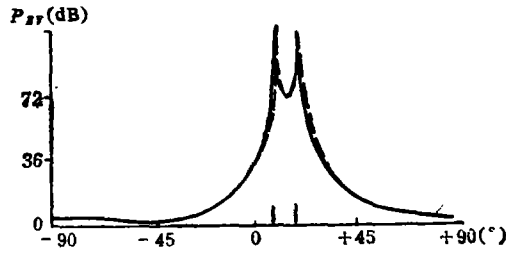


图5  $P_{EV}(\theta)$ 角度谱(两等功率源, 入射角分别为 $10^\circ, 20^\circ$ )  
实线: 三角格型法; 虚线: 变换法

### 参 考 文 献

- [1] R.Schmidt. Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation. Proc. RADC.Spectrum Estimation Workshop, 1979
- [2] T.S.Durrani and K.C.Sharman. Eigenfilter Approaches to Adaptive Array Processing. IEE PROC.1983,130 (Pts F and H, 1);22~28
- [3] G.Bienvenu and L.Kopp. Source Power Estimation Method Associated With High Resolution Bearing Estimation. in Proc. IEEE ICASSP'81
- [4] D.H.Johnson and S.DeGraaf. Improving the Resolution of Bearing in Passive Sonar Array by Eigenvalue Analysis.IEEE Trans. on ASSP, 1982;30
- [5] T.P.Bronez and J.A.Cadzow. An Algebraic Approach to Superresolution Array Processing. IEEE Trans.on AES., 1983;19
- [6] A.Cantoni and L.C.Godara. Resolving the Directions of Sources in a Correlated Field Incident on An Array. J.Acoust.Soc.Am.67, 1980
- [7] 冯康. 数值计算方法. 北京: 国防工业出版社

## A Transforming Adaptive Algorithm for Implementation of The Eigenvector Spectrum

Zhao Binsheng Lu Zhongliang

### Abstract

The eigenvector spectrum method is an effective method for resolving coherent signals in array processing. It requires that the minimum eigenvector of the received array signals covariance matrix  $R$  should be obtained first. Instead of gradient descent and space triangular ladder methods, we propose a new one — transforming adaptive algorithm method for implementation of the eigenvector spectrum. This method turns the problem of finding the minimum eigenvector, through a simple transformation, into that of finding the maximum one, thus the complicated calculation of  $R^{-1}$  can be eliminated. Theoretic analysis and simulation results show that this new method is superior to gradient descent one in convergence rate and to space triangular ladder one in computation complexity.

**Key words:** Superresolution, Coherent signals, Eigenvector spectrum, Eigenvalue

## A Fast Terrain Correlation Algorithm for Aircraft Off-Course

Gao Zhiyong

### Abstract

In the paper a fast terrain correlation algorithm to be called the generalized ordering acquisition of statistics (GOAS) is proposed by means of continuity of the aircraft track, which is better adaptable when the course of aircraft drifts off the axis of reference image. The algorithm can not only serially process the data of real-time image but also continually gives rough match information. Monte-Carlo simulations have shown that its performance was better for the drift angle  $\theta < 5^\circ$  and its CEP was less than 50m for SNR=3.

**Key words:** Guidance, Image match, Terrain Correlation