国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第11卷第1期 1989年3月 Vol.11.No.1

非线性系统的状态观测器设计

金 梁
（自动控制系）

摘要 文中讨论了非线性状态观测器的一种新的构造方法，建立了非线性系统观测器的一种线性化设计过程，所得结果是线性系统观测器理论在非线性系统中的直接拓广。

关键词 非线性系统，观测器，构造，规范型，状态变换
分类号 TP13

1 问题的描述

考虑非线性系统

$$\dot{x}=f(x) \tag{1a}$$

$$y_j=h_j(x),\ j=1,2,\cdots,p \tag{1b}$$

式中 $x\in\mathbb{R}^n$ 为状态变量，$y\in\mathbb{R}^p$ 为系统的输出，$f(x)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 C^∞ 向量场，$h_j(x)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 C^∞ 函数。

设系统 (1) 是局部可观的，即存在 p 个正整数 $(k_1,k_2,\cdots,k_p)$，$k_1\geqslant k_2\geqslant\cdots\geqslant k_p$，$\sum_{i=1}^{p}k_i=n$，使得矩阵

$$Q_j(x)=\begin{bmatrix}L_f^0(dh_j)\\ L_f(dh_j)\\ \cdots\\ L_f^{k_j-1}(dh_j)\end{bmatrix},\ j=1,2,\cdots,p \tag{2}$$

在 $\mathbb{R}^n$ 的某个开集 $U\subset\mathbb{R}^n$ 上均满秩[6]。这里 $(k_1,k_2,\cdots,k_p)$ 称为系统(1)的可观指数，而微分一型 dh_j 对向量场 f 的 Lie 导数定义为

$$L_f^0(dh_j)=\partial h_j(x)/\partial x$$

$$L_f(dh_j)=d(L_f(h_j))=f^T\frac{\partial}{\partial x}(\partial h_j/\partial x)^T+\frac{\partial h_j}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\vdots$$

$$L_f^{k_j-1}(dh_j)=L_f(L_f^{k_j-2}(dh_j))$$

1987年12月20日收稿，作者为工学博士

若存在微分同胚坐标变换 $x=T(z)$，$z\in\mathbb{R}^n$，使得非线性系统(1)，在 z 坐标下具有如下的观测器规范型[6]：

$$\dot{z}=Az+S(y) \tag{3a}$$

$$y=Cz \tag{3b}$$

式中 z 称为规范坐标，S 为 n 维连续可微的向量值函数，(A,C)为Brunovsky 可观对，即 $A=\mathrm{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_p)$，$C=(C_1,C_2,C_3,\cdots,C_p)$，并且

$$A_i=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&0\\1&\ddots&&\vdots\\\vdots&&&\\0&\cdots&1&0\end{pmatrix}_{k_i\times k_i},\qquad C_i=\begin{pmatrix}0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\ddots&1\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0\end{pmatrix}_{p\times k_i}\text{第 } i \text{ 行}$$

这时，容易对观测器规范型(3)，构造出全阶状态观测器：

$$\dot{\hat{z}}=A\hat{z}+S(y)+L(y-C\hat{z}),\quad \hat{z}(0)=\hat{z}_0 \tag{4}$$

但是，上述设计过程，必须求出坐标变换 $x=T(z)$ 和向量值函数 $S(y)$，这需要求解一组偏微分方程，通常是十分困难的。

本文在Zeitz[3][4]，Krener-Isidori[5]关于单变量非线性系统观测器的结果基础上，讨论了系统(1)状态观测器的一种线性化设计方法，使得非线性观测器的构造并不需要精确知道坐标变换 $x=T(z)$和函数 $S(y)$，其结果为实际设计非线性观测器提供了一种简便的途径。

2 原系统的坐标变换处理

设微分同胚变换 $x=T(z)$，$z=T^{-1}(x)$，使得系统(1)变换到观测器规范型(3)，则

$$\dot{x}=\frac{\partial T}{\partial z}(Az+S(y)) \tag{5}$$

将上式右端与系统(1)的右端比较，得

$$f\circ T(z)=\frac{\partial T}{\partial z}(Az+S(y)) \tag{6}$$

式中 Jacobi 矩阵

$$\frac{\partial T}{\partial z}=\begin{pmatrix}\frac{\partial T}{\partial z_1}&\frac{\partial T}{\partial z_2}&\cdots&\frac{\partial T}{\partial z_n}\end{pmatrix} \tag{7}$$

不妨简记

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_i}(x):=\frac{\partial T}{\partial z_i}(z) \tag{8}$$

并且以下所出现的上标“－”均表示变量 z 由 x 代替。设$\sigma_0=0$，$\sigma_1=k_1$，$\sigma_2=k_1+k_2,\cdots,\sigma_p=\sum\limits_{k=1}^{p}k_k=n$，在(6)式两端对 z_i，$i=1,2,\cdots,n$ 求偏导数，有

$$\frac{\partial}{\partial z_i}(f\circ T(z))=\frac{\partial}{\partial z_i}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)(Az+S(y))+\frac{\partial T}{\partial z}\ \frac{\partial}{\partial z_i}(Az+S(y)) \tag{9}$$

分别处理上式中的各项如下：

$$\frac{\partial}{\partial z_i}(f\circ T(z))=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_i} \tag{10a}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)(Az+S(y))=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial z_i}\right)\frac{\partial T}{\partial z}(Az+S(y))=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_i}\right)f \tag{10b}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z_i}(Az+S(y))=\begin{cases}\dfrac{\partial \bar{T}}{\partial z_{i+1}},\ i=1,2,\cdots,\sigma_1-1,\sigma_1+1,\cdots,\sigma_p-1\\ \dfrac{\partial \bar{T}}{\partial z}\dfrac{\partial \bar{S}}{\partial y_j},j=1,2,\cdots,p,\ i=\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_j\end{cases} \tag{10c}$$

将上述式子代入(9)式中，得

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_{\sigma_{j-1}+i+1}}=-adf\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_{\sigma_{j-1}+i}}\right)(x),\ j=1,2,\cdots,p,\ \ i=1,2,\cdots,k_j-1 \tag{11a}$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}\frac{\partial \bar{S}}{\partial y_j}=-adf\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_{\sigma_j}}\right)(x),\ j=1,2,\cdots,p \tag{11b}$$

因此，有递推公式

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_{\sigma_{j-1}+i+1}}=(-1)^i ad^i f\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_{\sigma_{j-1}+1}}\right)(x),j=1,2,\cdots,p,\ i=1,2,\cdots,k_j-1 \tag{12}$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}\frac{\partial \bar{S}}{\partial y_j}=(-1)^{k_j}ad^{k_j}f\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_{\sigma_{j-1}+1}}\right)(x),\ j=1,2,\cdots,p \tag{13}$$

式中 Lie 括号定义为

$$ad^0 f\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_{\sigma_{j-1}+1}}\right)=\left[ad^0 f,\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial z_{\sigma_{j-1}+1}}\right]=\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_{\sigma_{j-1}+1}}$$

$$adf\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_{\sigma_{j-1}+1}}\right)=\left[adf,\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial z_{\sigma_{j-1}+1}}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_{\sigma_{j-1}+1}}\right)f-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_{\sigma_{j-1}+1}}$$

$$\vdots$$

$$ad^i f\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_{\sigma_{j-1}+1}}\right)=\left[ad^i f,\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial z_{\sigma_{j-1}+1}}\right]=\left[f,\ \left[ad^{i-1}f,\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial z_{\sigma_{j-1}+1}}\right]\right]$$

利用(12)式可将 Jacobi 矩阵(7)表示为

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}=[\Delta_1(x),\ \Delta_2(x),\cdots,\Delta_p(x)] \tag{14}$$

式中

$$\Delta_j(x)=(ad^0 f,\ (-1)adf,\cdots,(-1)^{k_j-1}ad^{k_j-1}f)\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_{\sigma_{j-1}+1}}(x) \tag{15}$$

$j=1,2,\cdots,p$

为了确定$\dfrac{\partial \bar{T}}{\partial z_{\sigma_{j-1}+1}}$，注意到方程(1b)和(3b)，有关系式

$$h_j\circ T(z)=z_{\sigma_j},\ j=1,2,\cdots,p \tag{16}$$

将上式两端对 z_i，$i=1,2,\cdots,n$ 求偏导数，有

$$\frac{\partial h_j}{\partial x}\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_i}=\delta_{i,\sigma_j},\ j=1,2,\cdots,p;\ i=\sigma_{j-1}+1,\cdots,\sigma_j \tag{17}$$

式中 δ_{i,σ_j} 为 Kronecker 函数，将(11a)式的下标作变换后，代入(17)式中，得

$$-\frac{\partial h_j}{\partial x}ad_f\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_{i-1}}\right)=\delta_{i,\sigma_j},\ j=1,2,\cdots,p;\ i=\sigma_{j-1}+2,\cdots,\sigma_j \tag{18}$$

又将(17)式两端对 t 微分，经整理得

$$(\mathrm{L}_f(dh_j))\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_i}+\frac{\partial h_j}{\partial x}ad_f\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_i}\right)=0 \tag{19}$$

$$i=\sigma_{j-1}+1,\cdots,\sigma_j;\ j=1,2,\cdots,p$$

把(18)式代入(19)式中，得

$$(\mathrm{L}_f(dh_j))\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_{i-1}}=\delta_{i,\sigma_j},\ j=1,2,\cdots,p;\ i=\sigma_{j-1}+2,\cdots,\sigma_j \tag{20}$$

将上式与(17)式比较，知上式右端与(17)式右端相同，而左端 $\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_i}$ 的下标向前移动了一步。若重复上述过程 $k-1$ 次，可得

$$(\mathrm{L}_f^{k-1}(dh_j))\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_{i-(k-1)}}=\delta_{i,\sigma_j} \tag{21}$$

$$j=1,2,\cdots,p;\ k=1,2,\cdots,k_j;\ i=\sigma_{j-1}+k,\cdots,\sigma_j$$

在上式中取 $i=\sigma_{j-1}+k$，有

$$(\mathrm{L}_f^{k-1}(dh_j))\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_{\sigma_{j-1}+1}}=\delta_{\sigma_{j-1}+k,\sigma_j},\ k=1,2,\cdots,k_j;\ j=1,2,\cdots,p \tag{22}$$

所以，有

$$Q_j(x)\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_{\sigma_{j-1}+1}}=[\,0\,,\cdots,\,0\ \ 1\,]^T,\ j=1,2,\cdots,p \tag{23}$$

对于可观的非线性系统(1)，$Q_j(x)$，$j=1,2,\cdots,p$ 均满秩，因此，从(23)式可解出

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial z_{\sigma_{j-1}+1}}=Q_j^{*-1}(x)[\,0\,,\cdots,\,0\ \ 1\,]^T\triangleq q_j(x) \tag{24}$$

$$j=1,2,\cdots,p$$

式中 $Q_j^{*-1}(x)=Q_j^T(x)(Q_j(x)Q_j^T(x))^{-1}$．而 $q_j(x)$ 为 $Q_j^{*-1}(x)$ 的第 k_j 列向量。

3 观测器方程的构造

设非线性系统(1)的状态观测器为

$$\dot{\hat{x}}=f(\hat{x})+\mathrm{L}(\hat{x})[y-h(\hat{x})],\ \hat{x}(0)=\hat{x}_0 \tag{25a}$$

$$\hat{y}_j=h_j(\hat{x}),\ j=1,2,\cdots,p \tag{25b}$$

式中 $n\times p$ 维观测器增益矩阵 $\mathrm{L}(\hat{x})$ 为重构状态 $\hat{x}$ 的函数。为了确定 $\mathrm{L}(\hat{x})$，采用前述的坐标变换 $\hat{x}=T(\hat{z})$，$\hat{z}=T^{-1}(\hat{x})$，将观测器方程(25)变换到规范坐标 $\hat{z}$ 下，有

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + S(\hat{y}) + \left[\frac{\partial T}{\partial \hat{z}}\right]^{-1} L(\hat{x})[Cz - C\hat{z}] \tag{26}$$

$$\hat{z}(0) = \hat{z}_0$$

记观测器(26)的估值误差为 $\tilde{z} = \hat{z} - z$，由 (26) 式减去 (3)式，得估值误差 $\tilde{z}$ 所满足的方程

$$\dot{\tilde{z}} = A\tilde{z} + S(\hat{y}) - S(y) + \left[\frac{\partial T}{\partial \hat{z}}\right]^{-1} L(\hat{x})[Cz - C\hat{z}] \tag{27}$$

$$\tilde{z}(0) = \hat{z}(0) - z(0)$$

将上式右端在重构状态 $\hat{z}$ 处 Taylor 级数展开线性化，得

$$\dot{\tilde{z}} = A\tilde{z} + \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial \hat{y}} - \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial \hat{z}}\right]^{-1} L(\hat{x})\right)C\tilde{z} + O(\tilde{z}^2) \tag{28}$$

若选择

$$\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial \hat{z}}\right]^{-1} \mathrm{L}(\hat{x}) = P + \frac{\partial \bar{S}}{\partial \hat{y}} \tag{29}$$

式中 p 为 $n \times p$ 维矩阵，将(29)式代入(28)式中，并略去 $O(\tilde{z}^2)$项，则知观测器误差方程为线性定常系统

$$\dot{\tilde{z}} = (A - PC)\tilde{z} \tag{30}$$

容易得到(30)式的特征多项式为

$$\sigma(\lambda) = \prod_{j=1}^{p}\left(\lambda^{k_j} + \sum_{i=\sigma_{j-1}+1}^{\sigma_j} p_{i,j}\lambda^{\sigma_j - i}\right) \tag{31}$$

因此，通过选取矩阵 P，可任意配置误差方程(30)的特征值。

记

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_p \end{pmatrix}, \quad p_j \in \mathbb{R}^{k_j \times p}, \quad j = 1, 2, \cdots, p \tag{32}$$

则由(29)式，并利用(13)，(15)和(24)式，可得观测器(25)的增益矩阵

$$\mathrm{L}(\hat{x}) = \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial \hat{z}}\right]\left(P + \frac{\partial \bar{S}}{\partial \hat{y}}\right) = \sum_{j=1}^{p} \Delta_j(\hat{x})p_j + \Delta_{p+1}(\hat{x}) \tag{33}$$

式中

$$\Delta_j(\hat{x}) = (ad^0 f(q_j),\ (-1)adf(q_j), \cdots, (-1)^{k_j-1}ad^{k_j-1}f(q_j))(\hat{x}) \tag{34}$$

$$j = 1, 2, \cdots, p$$

$$\Delta_{p+1}(\hat{x}) = ((-1)^{k_1}ad^{k_1}f(q_1), (-1)^{k_2}adf(q_2), \cdots, (-1)^{k_p}ad^{k_p}f(q_p))(\hat{x}) \tag{35}$$

4 举　　例

考虑如下非线性系统的观测器设计问题

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + 4x_1^2 x_2 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_1^3 x_2^2 = f_2(x_1, x_2)$$
$$y = x_1 = h(x)$$

这时，系统的可观阵为

$$Q(x) = \begin{pmatrix} L_f^0(dh) \\ L_f(dh) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x_1 + 8x_1x_2 & 4x_1^2 \end{pmatrix}$$

当 $x_1 \neq 0$ 时，$Q(x)$是满秩的，根据(24)式，有

$$\frac{\partial T}{\partial z_1} = Q^{-1}(x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4x_1^2 \end{pmatrix}$$

而又由递推公式(12)和(13)式，得

$$\frac{\partial T}{\partial z_2} = -adf\left(\frac{\partial T}{\partial z_1}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2x_1} + \frac{2x_2}{x_1} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}\ \frac{\partial S}{\partial y} = -adf\left(\frac{\partial T}{\partial Z_2}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} -2x_1 - 16x_1x_2 - 2x_1^3x_2 - 2x_1^2 \\ -\frac{1}{2}x_1^2x_2 + \frac{1}{2} - 3x_1^2x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^4x_2^2 - 4x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 - 8x_2^2 \end{pmatrix}$$

则由(33)式，求得观测器增益向量

$$L(\hat{x}) = \begin{pmatrix} l_1(\hat{x}) \\ l_2(\hat{x}) \end{pmatrix} = \left\{ p_1\begin{bmatrix} 0 \\ 1/4\hat{x}_1^2 \end{bmatrix} + p_2\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\hat{x}_1\hat{x}_2 + \frac{1}{2\hat{x}_1} + \frac{2\hat{x}_2}{\hat{x}_1} \end{bmatrix} \right.$$
$$\left. + \begin{bmatrix} -2\hat{x}_1 - 16\hat{x}_1\hat{x}_2 - 2\hat{x}_1^3\hat{x}_2 - 2\hat{x}_1^2 \\ -\frac{1}{2}\hat{x}_1^2\hat{x}_2 + \frac{1}{2} - 3\hat{x}_1^2\hat{x}_2^2 - \frac{1}{2}\hat{x}_1^4\hat{x}_2^2 - 4\hat{x}_2 + \frac{1}{2}\hat{x}_1^2 - 8\hat{x}_2^2 \end{bmatrix} \right\}$$

所以，可构造非线性观测器

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_1^2 + 4\hat{x}_1^2\hat{x}_2 + l_1(\hat{x})(y - \hat{x}_2)$$
$$\dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_1 + \hat{x}_1^3\hat{x}_2^2 + l_2(\hat{x})(y - \hat{x}_2)$$
$$\hat{x}_1(0) = \hat{x}_{10},\ \hat{x}_2(0) = \hat{x}_{20}$$

5 结 束 语

非线性观测器问题是非线性控制理论中的一个比较困难的方面。本文所讨论的非线性观测器设计方法，仅仅需要非线性系统在所讨论的区域内是局部可观的，即仅要求矩阵 $Q_j(x)$是非奇异的。由于 Lie 导数和 Lie 括号计算的规律性很强，因此，文中的设计过程可十分方便的采用符号语言编制程序。进一步研究带控制项非线性系统的状态观测器设计问题是有意义的。

作者感谢杨嘉墀先生的帮助与指导。

参 考 文 献

[1] Isidori A. Nonlinear Control Systems: An Introduction. Lecture Notes in Control Information Sci., Berlin, 1985; 71

[2] Kou S R, Elliott D L, Tarn T J. Exponential Observers for Nonlinear Dynamic Systems, Inform. Control, 1975; 29(3): 204～216.

[3] Bestle D. and Zeitz M. Canonical form observer design for non-linear time-variable systems, Int. J. Control, 1983; 38(2): 419～431

[4] Zeitz M. Observability canonical (phasevariable) form for nonlinear time-variable systems, Int. J. Sys. Sci., 1984; 15: 949～958

[5] Krener A J and Isidori A. Linearization by output injection and nonlinear observer, Sys. & cont. Lett., 1983; 3: 47～52

[6] Krener A J, Respondek W. Nonlinear observers with linearizable error dynamics. SIAM J. Cont. Optim., 1985; 23: 197～216

Design of State Observers for Nonlinear Systems

Jin Liang

Abstract

In this paper, a new reconstructed method for nonlinear state observers is discussed, the nonlinear observers are determined by using a linearization about the current reconstructed state. The results grow out of the observer theory for linear systems.

key words: Nonlinear system, observer, construction, canonical form, state transformation