

# 提高再入点精度的末助推级制导方法

贾沛然 汤国建

(自动控制系)

**摘要** 本文将需要速度运用于导弹末助推级以提高导弹的再入点精度, 为再入机动及末制导提供较好的初始条件。文中还考虑到为调整推力方向进行姿态控制的工程可实现性。

**关键词** 弹道、制导, 姿态控制

**分类号** V 448.23

## 1 基本假设及条件

假设已知导弹末助推级开始时刻  $t_0$  具有相对发射坐标系  $O-x_0y_0z_0$  (发射点  $O$  的地理纬度为  $B_0$ , 经度为  $\lambda_0$ , 射击方位角为  $A_0$ ) 的速度和位置参数值为:

$$\bar{V}_{00} = [V_{x00} \ V_{y00} \ V_{z00}]^T; \quad \bar{\rho}_{00} = [x_{00} \ y_{00} \ z_{00}]^T$$

及再入点位置参数: 地心距为  $r_e$ , 地心纬度为  $\phi_e$ , 经度为  $\lambda_e$ 。

研究末助推级制导方法应考虑到的条件是: 末助推级起始重量为  $G_0$ , 推力为  $P$ , 质量秒耗量为  $m$ ; 弹上测量装置提供导弹在发射惯性坐标系  $O_A-xyz$  (发射瞬间与发射坐标系重合) 中的视速度三个分量  $W_x$ 、 $W_y$ 、 $W_z$  的实时值; 导弹姿态角调整原则, 俯仰角  $\varphi$  不受限制, 偏航角实时转动的范围为  $|\psi| \leq \psi_m$ , 当  $|\psi| > \psi_m$  时只允许以角速率  $\dot{\psi}$  逐渐偏转。

## 2 导弹在末助推段状态参数实时值的确定

导弹在发射惯性坐标系内的运动微分方程为

$$\begin{cases} \dot{V}_x = W_x + \mathcal{J}_x \\ \dot{V}_y = W_y + \mathcal{J}_y \\ \dot{V}_z = W_z + \mathcal{J}_z \end{cases} \quad (1)$$

其中等式的各符号分别为导弹绝对加速度、视加速度和引力加速度在各轴的分量。

在末助推段要求解该微分方程, 只需将已知相对参数  $\bar{V}_{00}$  及  $\bar{\rho}_{00}$  转换为绝对参数  $\bar{V}_0$ 、 $\bar{\rho}_0$  这可通过下列关系式完成:

$$\begin{bmatrix} V_{x_0} \\ V_{y_0} \\ V_{z_0} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_a \begin{bmatrix} V_{x_{g0}} \\ V_{y_{g0}} \\ V_{z_{g0}} \end{bmatrix} + \mathbf{A}_a \begin{bmatrix} \Omega_y(R_{0z} + z_{g0}) - \Omega_z(R_{0y} + y_{g0}) \\ \Omega_z(R_{0x} + x_{g0}) - \Omega_x(R_{0z} + z_{g0}) \\ \Omega_x(R_{0y} + y_{g0}) - \Omega_y(R_{0x} + x_{g0}) \end{bmatrix} \quad (2)$$

以及

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ N + y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_a \begin{bmatrix} x_{g0} \\ N + y_{g0} \\ z_{g0} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\text{其中: (1) } \bar{R}_0 = [R_{0x} \ R_{0y} \ R_{0z}]^T = R_0 [-\sin\mu\cos A_0 \ \cos\mu \ \sin\mu\sin A_0]^T \quad (4)$$

$R_0$  为地球中心  $O_E$  至发射点的距离;

$\mu$  为发射点地理纬度  $B_0$  与地心纬度  $\phi_0$  之差。

$$\begin{aligned} \text{(2) } \bar{\Omega} &= [\Omega_x \ \Omega_y \ \Omega_z]^T = \Omega [\Omega_x^0 \ \Omega_y^0 \ \Omega_z^0]^T \\ &= \Omega [\cos B_0 \cos A_0 \ \sin B_0 \ -\cos B_0 \sin A_0]^T \end{aligned} \quad (5)$$

$\Omega$  为地球旋转角速度。

(3)  $\mathbf{A}_a$  为  $O - x_0 y_0 z_0$  与  $O_A - xyz$  之方向余弦阵

$$\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}(\Omega^2 - \Omega_x^2)t_0^2 & -\Omega_z t_0 + \frac{1}{2}\Omega_x \Omega_y t_0^2 & \Omega_y t_0 + \frac{1}{2}\Omega_x \Omega_z t_0^2 \\ \Omega_z t_0 + \frac{1}{2}\Omega_x \Omega_y t_0^2 & 1 - \frac{1}{2}(\Omega^2 - \Omega_y^2)t_0^2 & -\Omega_x t_0 + \frac{1}{2}\Omega_y \Omega_z t_0^2 \\ -\Omega_y t_0 + \frac{1}{2}\Omega_x \Omega_z t_0^2 & \Omega_x t_0 + \frac{1}{2}\Omega_y \Omega_z t_0^2 & 1 - \frac{1}{2}(\Omega^2 - \Omega_z^2)t_0^2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

(4)  $N$  为发射点的卯酉半径 ( $= R_0 \cos \phi_0 / \cos B_0$ )。

将通过(2)、(3)式得到的  $V_{x_0}$ 、 $V_{y_0}$ 、 $V_{z_0}$  及  $x_0$ 、 $y_0$ 、 $z_0$  作为初始参数, 对(1)式进行两次积分即可得到导弹在末助推段的实时值。

关于引力加速度  $\bar{g}$  的各分量  $g_x$ 、 $g_y$ 、 $g_z$ , 可通过先将  $\bar{g}$  分解为沿矢径  $\bar{r}$  及地球旋转角速度  $\bar{\Omega}$  的分量, 然后再投影到  $O_A - xyz$  的三个坐标轴上。即

$$\bar{g} = g_r \bar{r}^0 + g_\Omega \bar{\Omega}^0 \quad (7)$$

注意到

$$\bar{r}^0 = [r_x^0 \ r_y^0 \ r_z^0]^T = \left[ \frac{R_{0x} + x}{r} \ \frac{R_{0y} + y}{r} \ \frac{R_{0z} + z}{r} \right]^T \quad (8)$$

$\bar{\Omega}^0$  见(5)式

$g_r$ 、 $g_\Omega$  根据需要将引力考虑扁率修正项取至几项而定, 计算公式可参考文献[3]。

对(1)式的积分, 可导出递推公式, 便于弹上运算。设将(1)式从  $t_i$  积分至  $t_{i+1}$ , 记  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ 。首先将  $\bar{g}$  在积分间隔  $\Delta t$  内视为常数, 取为  $\bar{g}(t_i)$ , 将(1)式积分可得  $t_{i+1}$  时位置参数:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \left[ V_{x_i} + \frac{1}{2} (W_{x_{i+1}} - W_{x_i} + \rho_{x_i} \Delta t) \right] \Delta t \\ y_{i+1} = y_i + \left[ V_{y_i} + \frac{1}{2} (W_{y_{i+1}} - W_{y_i} + \rho_{y_i} \Delta t) \right] \Delta t \\ z_{i+1} = z_i + \left[ V_{z_i} + \frac{1}{2} (W_{z_{i+1}} - W_{z_i} + \rho_{z_i} \Delta t) \right] \Delta t \end{cases} \quad (9)$$

根据所得位置参数即可求得 $\bar{\rho}(t_{i+1})$ , 然后取 $\bar{\rho}(t_i)$ 与 $\bar{\rho}(t_{i+1})$ 的平均值作为积分限内的 $\bar{\rho}$ , 则可由(1)式积分求出 $t_{i+1}$ 时刻的速度分量:

$$\begin{aligned} V_{x_{i+1}} &= V_{x_i} + W_{x_{i+1}} - W_{x_i} + \frac{1}{2} (\rho_{x_{i+1}} + \rho_{x_i}) \Delta t \\ V_{y_{i+1}} &= V_{y_i} + W_{y_{i+1}} - W_{y_i} + \frac{1}{2} (\rho_{y_{i+1}} + \rho_{y_i}) \Delta t \\ V_{z_{i+1}} &= V_{z_i} + W_{z_{i+1}} - W_{z_i} + \frac{1}{2} (\rho_{z_{i+1}} + \rho_{z_i}) \Delta t \end{aligned} \quad (10)$$

因此, 有了末助推段起点 $t_0$ 时的参数值及弹上实时测得的视速度在坐标各轴上的分量值, 即可利用递推公式(9)、(10)得到导弹任时刻的实时参数值。

### 3 需要速度的确定

为使下面讨论对末助推段任一时刻都适用, 设已知 $t$ 时刻导弹实际参数为 $\bar{r}(t)$ 、 $\bar{V}(t)$ , 或表示为 $r(t)$ 、 $V(t)$ 、 $\theta(t)$ 。 $\theta(t)$ 为该时刻速度倾角, 由下式计算:

$$\theta(t) = \arcsin \frac{\bar{r}(t) \cdot \bar{V}(t)}{r(t)V(t)} \quad (11)$$

运用弹道学知识, 由 $r(t)$ 、 $V(t)$ 、 $\theta(t)$ 可计算出导弹飞行至地心距为 $r_c$ 处所需的时间, 记为 $t_{ic}$ 。

在 $t$ 时刻导弹弹下点 $t$ 的纬度为

$$\phi_i = \arcsin(\bar{r}^0 \cdot \bar{Q}^0) \quad (12)$$

将 $t$ 点所在的绝对子午面与发射惯性坐标系原点 $O_A$ 所在子午面之间的绝对经差记为 $\lambda_{0t}^A$ , 见图1。为求取该值, 引入地心惯性坐标系 $O_g - XYZ$ , 它与 $O_A - xyz$ 有方向余弦关系式

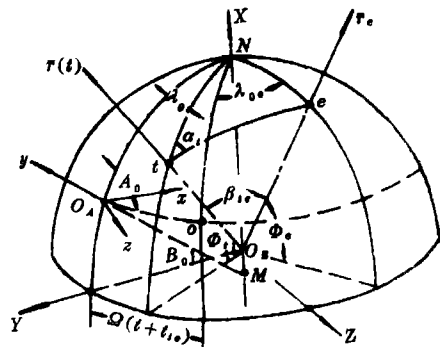


图 1

$$\begin{bmatrix} X^0 \\ Y^0 \\ Z^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos B_0 \cos A_0 & \sin B_0 & -\cos B_0 \sin A_0 \\ -\sin B_0 \cos A_0 & \cos B_0 & \sin B_0 \sin A_0 \\ \sin A_0 & 0 & \cos A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^c \\ y^0 \\ z^0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

据此不难得到 $r(t)$ 在 $Y$ 、 $Z$ 轴上的分量:

$$\begin{cases} r_Y = -\sin B_0 \cos A_0 (R_{0x} + x) + \cos B_0 (R_{0y} + y) + \sin B_0 \sin A_0 (R_{0z} + z) \\ r_Z = \sin A_0 (R_{0x} + x) + \cos A_0 (R_{0z} + z) \end{cases} \quad (14)$$

则可得  $O_A$ 、 $t$  两子午面的绝对经差

$$\lambda_{O_A t}^A = \arctg \frac{r_Z}{r_Y} \quad (15)$$

已给定再入点  $e$  在旋转地球上的经、纬度为  $\lambda_e$ 、 $\phi_e$ ，它与发射点  $O$  的相对经差为  $\lambda_{oe}$ 。现若给出导弹由发射点飞行至再入点  $e$  的时间为  $t+t_{ie}$ ，则发射点  $O$  沿纬度为  $\phi_0$  的平行圈转动经角为  $\Omega(t+t_{ie})$ ，这样  $e$  点对  $O_A$  点绝对经差即为

$$\lambda_{O_A e}^A = \lambda_{oe} + \Omega(t+t_{ie}) \quad (16)$$

而  $e$  点与  $t$  点间的绝对经差由图1可得

$$\lambda_{t e}^A = \lambda_{O_A e}^A - \lambda_{O_A t}^A = \lambda_{oe} + \Omega(t+t_{ie}) - \lambda_{O_A t}^A \quad (17)$$

由图1中球面三角形  $Nte$  可求解  $t$ 、 $e$  两点的绝对射程角  $\beta_{ie}$  为

$$\beta_{ie} = \arccos \{ \sin \phi_t \sin \phi_e + \cos \phi_t \cos \phi_e \cos [\lambda_{oe} + \Omega(t+t_{ie}) - \lambda_{O_A t}^A] \} \quad (18)$$

由弹道学知，被动段射程角的大小，取决于被动段起始的  $r$ 、 $v$ 、 $\Theta$ 。现已知  $\beta_{ie}$ ，从制导的工程实现考虑，取现时刻  $t$  导弹所在点的地心距  $r(t)$  及速度倾角  $\Theta(t)$ ，来求满足  $\beta_{ie}$  的速度值。根据命中方程可求得椭圆半通径  $p$  与  $r(t)$ 、 $\Theta(t)$ 、 $\beta_{ie}$  及再入点地心距  $r_e$  的关系式：

$$p = \frac{r(t)r_e(1 - \cos \beta_{ie})}{r(t) - r_e [\cos \beta_{ie} - \sin \beta_{ie} \operatorname{tg} \Theta(t)]} \quad (19)$$

从而算得所要求的速度为

$$V_R = \frac{\sqrt{fM \cdot p}}{r(t) \cos \Theta(t)} \quad (20)$$

若  $V_R$  与现时导弹实际速度  $V(t)$  不等，则要通过动力装置工作，使导弹速度改变到  $V_R$ ，则可满足射程角  $\beta_{ie}$ 。但用  $r(t)$ 、 $\Theta(t)$  及  $V_R$  计算得的时间  $t_{ie}$  将发生变化，由(18)式可见，这将使实际  $t$ 、 $e$  两点对应的射程角亦随之改变。从(18)式可分析知， $t_{ie}$  的变化引起的  $\beta_{ie}$  改变量比较小，因此若以  $t$  时刻导弹实际参数算得的自由段飞行时间（记为  $t_{ie0}$ ）作为初值，经过(18)~(20)式运算得  $V_R$ ，用  $V_R$  代替  $V(t)$  再算出飞行时间（记为  $t_{ie1}$ ），如此重复迭代可得到收敛的解。迭代的终止条件选为  $|t_{ie_{i+1}} - t_{ie_i}| \leq \epsilon$ ， $i$  反映迭代的次数， $\epsilon$  则根据再入点精度要求来选定。将满足迭代终止条件时的  $V_R$  称为需要速度。应注意到  $V_R$  在  $t$  时刻的方向应在  $\beta_{ie}$  的平面内，并与  $t$  点当地水平面成  $\Theta(t)$  夹角。 $\beta_{ie}$  对应大圆弧的方向可用  $t$  点的该大圆弧切线方向与  $t$  点子午北方向的夹角记为  $\alpha_t$ ，显然可由图1的球面三角形  $Nte$ ，建立关系式：

$$\begin{cases} \sin \alpha_t = \cos \phi_e \frac{\sin [\lambda_{oe} + \Omega(t+t_{ie}) - \lambda_{O_A t}^A]}{\sin \beta_{ie}} \\ \cos \alpha_t = \frac{\sin \phi_e - \cos \beta_{ie} \sin \phi_e}{\sin \beta_{ie} \cos \phi(t)} \end{cases} \quad (21)$$

由此可求得  $\alpha_t$ 。

为将  $\bar{V}_R$  分解到惯性坐标系各轴上, 在  $t$  时刻导弹弹下点  $t$  处建立北天东坐标系  $t-i_\phi j_r k_\lambda$ . 先将  $\bar{V}_R$  投影到  $t-i_\phi j_r k_\lambda$  坐标系中:

$$\begin{bmatrix} V_{R\phi} \\ V_{Rr} \\ V_{R\lambda} \end{bmatrix} = V_R \begin{bmatrix} \cos\Theta(t)\cos\alpha_t \\ \sin\Theta(t) \\ \cos\Theta(t)\sin\alpha_t \end{bmatrix} \quad (22)$$

$t-i_\phi j_r k_\lambda$  与  $O_A-xyz$  两坐标系方向余弦关系可找到为

$$\begin{bmatrix} i_\phi^0 \\ j_r^0 \\ k_\lambda^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

上式方向余弦阵中 9 元素为:

$$\begin{cases} a_{11} = [\Omega_x^0 - \sin\phi(t)r_x^0] / \cos\phi(t) \\ a_{12} = [\Omega_y^0 - \sin\phi(t)r_y^0] / \cos\phi(t) \\ a_{13} = [\Omega_z^0 - \sin\phi(t)r_z^0] / \cos\phi(t) \\ a_{21} = r_x^0, \quad a_{22} = r_y^0, \quad a_{23} = r_z^0 \\ a_{31} = (\Omega_y^0 r_z^0 - \Omega_z^0 r_y^0) / \cos\phi(t) \\ a_{32} = (\Omega_z^0 r_x^0 - \Omega_x^0 r_z^0) / \cos\phi(t) \\ a_{33} = (\Omega_x^0 r_y^0 - \Omega_y^0 r_x^0) / \cos\phi(t) \end{cases} \quad (24)$$

式中  $\bar{\Omega}^0$ 、 $r^0(t)$  在  $O_A-xyz$  中各分量见(5)、(8)式。

由(22)、(23)式可得  $\bar{V}_R$  在  $O_A-xyz$  中各分量

$$\begin{bmatrix} V_{Rx} \\ V_{Ry} \\ V_{Rz} \end{bmatrix} = V_R \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \cos\Theta(t)\cos\alpha_t \\ \sin\Theta(t) \\ \cos\Theta(t)\sin\alpha_t \end{bmatrix} \quad (25)$$

#### 4 制导的实现

由导弹现时实际速度  $\bar{V}(t)$  及上面计算出的需要速度  $\bar{V}_R$ , 可求得速度改变量  $\Delta\bar{V} = \bar{V}_R - \bar{V}(t)$ , 它在发射惯性坐标系内的投影为:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{Rx} - V_x \\ V_{Ry} - V_y \\ V_{Rz} - V_z \end{bmatrix} \quad (26)$$

现以该三分量组成制导信息, 末助推级发动机轴线与弹轴重合。显然, 调整推力的方向即是调整导弹姿态的方向。姿态转动的原则是按先俯仰后偏航的次序进行。由于偏航角  $\psi$ , 在  $|\psi| > \psi_m$  时, 偏航角的调整需按角速率  $\dot{\psi}$  逐渐偏转, 现记  $\text{tg}\psi_m = K$ , 制导分下列两种状态进行:

(1) 当  $|\Delta V_z| \leq K \sqrt{\Delta V_x^2 + \Delta V_y^2}$ , 且  $|\psi(t)| \leq \psi_m$  时, 俯仰角  $\varphi$ 、偏航角  $\psi$  的控制式为

$$\varphi_R = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\Delta V_y}{\Delta V_x} & \Delta V_x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{\Delta V_y}{\Delta V_x} & \Delta V_x < 0 \end{cases} \quad (27)$$

$$\psi_R = \operatorname{arctg} \frac{\Delta V_x}{\sqrt{\Delta V_x^2 + \Delta V_y^2}} \quad (28)$$

(2) 当  $|\Delta V_x| > K\sqrt{\Delta V_x^2 + \Delta V_y^2}$  或  $|\psi(t)| > \psi_m$  时,俯仰角  $\varphi_R$  的控制式同(27)式,也可考虑仍保持现有的  $\varphi(t)$  角不变;偏航角的控制式为

$$\psi(t+\tau) = \begin{cases} \psi(t) + \operatorname{sign}(\Delta\psi_R)\dot{\psi}\tau & |\Delta\psi_R| \geq \dot{\psi}\Delta t, \tau \in [t, t+\Delta t] \\ \psi(t) & |\Delta\psi_R| < \dot{\psi}\Delta t \end{cases} \quad (29)$$

其中:  $\Delta t$  为采样计算的时间间隔;  $\Delta\psi_R = \psi_R - \psi(t)$ ;  $\psi(t)$  为  $t$  时刻导弹实际偏航角;  $\psi_R$  是按(3)式算得的需要的偏航角。

导弹在末助推级起始时刻  $t_0$  时,根据实际的位置矢量  $\vec{r}(t_0)$ 、速度矢量  $\vec{V}(t_0)$ ,即可求出  $\bar{V}_R$  及  $\Delta\bar{V}$ ,来决定推力作用方向  $\varphi_R$ 、 $\psi_R$ ;推力作用  $\Delta t$  后,由弹上测得  $t_0 + \Delta t$  时刻的视速度  $\bar{V}$  分量,运用递推公式得  $t + \Delta t$  时刻的实际  $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$  及  $\vec{V}(t_0 + \Delta t)$ ,重复上述过程不断调整推力方向进行制导。

设时间从导弹起飞开始计时,末助推级工作的起始时刻为  $t_0$ ,则导弹在  $t$  时刻经过发动机工作  $\Delta t$  后的速度增量为

$$\Delta V_1 = \frac{P}{m_0 - m(t - t_0)} \Delta t \quad (30)$$

其中:  $P$  为发动机推力;  $m_0$  为  $t_0$  时刻导弹的质量;  $m$  为末修段发动机工作的质量秒消耗量。

由于采样间隔为  $\Delta t$ ,为了提高制导精度,在控制计算中,考虑到计算机计算延时性,故当所需要的速度增量  $\Delta\bar{V}$  满足

$$|\Delta\bar{V}| \leq 2\Delta V_1 \quad (31)$$

时,对于发动机推力可按脉冲形式给出。如果每秒脉冲数为  $f$ ,则可由

$$|\Delta\bar{V}| = \Delta V_1 + \frac{P \cdot \frac{1}{f}}{m_0 - m(t - t_0 + \Delta t)} \cdot n \quad (32)$$

解算出为达到  $\Delta\bar{V}$  除在  $t$  时刻发动机继续工作一个采样间隔后尚需工作的脉冲数  $n$ ,这样可以在发动机工作到  $(t + \Delta t + n/f)$  时刻关机;还可以改变采样间隔,考察需要速度增量是否满足条件:

$$|\Delta\bar{V}| \leq \frac{P \cdot \frac{1}{f}}{m_0 - m(t - t_0 + \Delta t + n/f)} \quad (33)$$

若满足,则认为达到要求的精度,否则再计算需要几个脉冲数,并令发动机工作,重复上述步骤,直至(33)式满足为止。

对中程导弹进行实例计算结果表明,采用本文的制导方法,误差引起的再入点偏差

不超过70米。

### 参 考 文 献

- [1] 程国采. 弹道导弹制导方法与最优控制. 长沙: 国防科技大学出版社, 1987
- [2] 李连仲. 远程弹道导弹闭环制导方法研究. 系统工程及电子技术, 1980; (4)
- [3] 贾沛然, 沈为异. 弹道导弹弹道学. 国防科技大学, 1980
- [4] 王永平. 飞行器状态方程的实时解. 航天控制, 1985; (10)

## A Guidance Method of the Last Booster to Improve the Precision at the Reentry Point

Jia Peiran Tang Guojian

### Abstract

This paper applies required velocity to the missile's last booster to improve its precision at the reentry point, and to provide the better initial conditions for the reentry maneuver and the terminal guidance. The engineering realizability of attitude control to adjust thrust direction is also taken into account in it.

Key words: trajectory, guidance, attitude control