国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第11卷第1期 1989年8月 Vol.11.No.1

相依目标群状态转移概率矩阵的特性及其应用

张干宗 严小颖

（系统工程与数学系）

摘要 本文对相依目标群的状态转移概率矩阵的性质进行了深入的分析，得到了若干重要结论，并在此基础上讨论了相依目标群系统的火力分配模型

关键词 矩阵，概率，转移状态，相依目标群，火力分配模型

分类号 O22，O29

在文[1]中，作者对相依目标群系统的火力分配问题，直接用点目标的毁伤概率来描述，所得数学模型如下：

$$\left.\begin{aligned}&\min V=\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{n_m}\prod_{l=1}^{L}\prod_{k=1}^{g_m}(1-P_{mi}(l,k))^{x_{mlk}}v_{mi}\\&s.t.\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{g_m}x_{mlk}=K_l(l=1,\cdots,L)\\&\qquad x_{mlk}\geqslant 0\ \text{且为整数}\begin{pmatrix}m=1,\cdots,M;\\l=1,\cdots,L;\\k=1,\cdots,g_m\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\quad(MP_1)$$

其中，v_{mi}表示第m个相依目标群中第i个点目标的毁伤价值，$P_{mi}(l,k)$表示第m个相依目标群在一发l型弹按第k种瞄准点方案的攻击下第i个点目标的毁伤概率，其他符号的意义见文[1]。本文从状态转移的角度来建立相依目标群系统的火力分配模型。为此先将有关概念明确一下。

由点目标A_1，A_2，…，A_n组成的相依目标群受到攻击后可能产生各种状态。如A_{i_1}，…，A_{i_k}被毁伤，其余点目标未被毁伤，便是一个状态。这一状态对应于自然数集合$S_0=\{1,2,\cdots,n\}$的一个子集$\{i_1,\cdots,i_k\}$。S_0的每一个子集(包括空集)都对应目标群的一个状态，共有$N=2^n$个状态。现在把这N个状态按如下的字典序递增规则排序：

$S_1=\varnothing$，$S_2=\{1\}$，…，$S_{n+1}=\{n\}$，$S_{n+2}=\{1,2\}$，…，$S_{2n}=\{1,n\}$，$S_{2n+1}=\{2,3\}$，…，$S_N=\{1,2,\cdots,n\}(=S_0)$.

上述各个状态的出现都带有随机性。用z_i表示目标群出现第i个状态的概率。称行

1988年5月3日收稿

向量 $Z=(z_1, z_2, \cdots, z_N)$为该相依目标群的状态概率向量（或称为混合状态）。这里 $\sum_{i=1}^{N} z_i=1$. 用ω_i表示相依目标群在状态S_i下的毁伤值。如用v_j表示第 j 个点目标A_j的毁伤价值，则

$$\omega_i=\sum_{j\in S_j} v_j \qquad (i=1, \cdots, N)$$

并称列向量$\Omega=(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N)$为该相依目标群的毁伤值向量。

用 p_{ij} 表示相依目标群受击一发弹时由状态 S_i 转移到状态 S_j 的概率。称矩阵 $T=(p_{ij})_{N\times N}$为该相依目标群的状态转移概率矩阵。易知有下列简单结论成立：

(1) $p_{ij}\geqslant 0 \quad (i, j=1, \cdots, N)$;

(2) $\sum_{j=1}^{N} p_{ij}=1 \quad (i=1, \cdots, N)$;

(3) 当$p_{ij}>0$时，必有$S_i\subset S_j$；因此，当$S_i\not\subset S_j$时，$p_{ij}=0$；

(4) T 为上三角矩阵，$p_{NN}=1$. （注意状态必须是按前述规则排列）

现在用状态转移概率矩阵来描述相依目标群系统的火力分配模型。设相依目标群系统由M个相依目标群组成，第 m 个相依目标群（或简称为目标群 m）由 n_m 个点目标组成，该目标群的瞄准点选取方案有g_m个。并记目标群 m 的初始状态概率向量为 $Z_m^{(0)}$，毁伤值向量为 $\Omega_m(m=1,\cdots,M)$。设对该系统的总投弹量为K，K枚弹分为L种类型，第 l 型弹的枚数为$K_l(l=1,\cdots,L)$。并设各弹的发射是相互独立的。考虑到状态转移概率矩阵不仅随相依目标群的不同而不同，而且与武器型号和瞄准点的选取有关，用

$$T(m,l,k)=(p_{ij}(m,l,k))_{N_n\times N_n}$$

表示目标群 m 在一发 l 型弹按第 k 个瞄准点方案攻击下的状态转移概率矩阵($m=1,\cdots,M$；$l=1,\cdots,L$；$k=1,\cdots,g_m$)，这里$N_m=2^{n_m}$. 用x_{mlk}表示对目标群 m 使用 l 型弹并按第 k 个瞄准点方案攻击的弹数，这是火力分配问题的决策变量。则目标群 m 在x_{mlk}发弹攻击下的状态概率向量为（见[2]）

$$Z_m^{(0)}T(m,l,k)^{x_{mlk}}$$

从而目标群 m 在x_{mlk}发弹攻击下的平均毁伤值为

$$Z_m^{(0)}T(m,l,k)^{x_{lmk}}\Omega_m$$

目标群 m 的总受击弹数为 $\sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{g_m} x_{mlk}$，并由于相依目标群的状态转移概率矩阵对于乘法具有可交换性（在下文中将被证明），因此目标群 m 的总平均毁伤价值为

$$Z_m^{(0)}\left[\prod_{l=1}^{L}\prod_{k=1}^{g_m} T(m,l,k)^{x_{mlk}}\right]\Omega_m$$

从而整个相依目标群系统的平均毁伤价值为

$$W=\sum_{m=1}^{M}\prod_{l=1}^{L}\prod_{k=1}^{g_m} Z_m^{(0)}T(m,l,k)^{x_{lmk}}\Omega_m \tag{1}$$

因此，相依目标群系统的火力分配模型可表达为：

$$\left.\begin{aligned} &\max W=\sum_{m=1}^{M}\prod_{l=1}^{L}\prod_{k=1}^{g_m}Z_m^{(0)}T(m,l,k)^{x_{mlk}}Q_m \\ &s.t.\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{g_m}x_{mlk}=K_l\ (l=1,\cdots,L) \\ &\qquad x_{mlk}\geqslant 0 \text{ 且为整数}\begin{pmatrix} m=1,\cdots,M; \\ l=1,\cdots,L; \\ k=1,\cdots,g_m \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}(MP_2)$$

从实际意义考虑，模型(MP_2)与前述模型(MP_1)应当是等价的。但从数学形式看，两者颇不相同。(MP_1)中的目标函数是由普通的指数函数表达的，而(MP_2)中的目标函数是由矩阵的指数表达的。这预示着相依目标群的状态转移概率矩阵具有某些特殊性质。下面我们将揭示出状态转移概率矩阵的许多内在特性，从而展现出上述两个模型等价的数学根源。

现在考虑由 n 个点目标组成的相依目标群的状态转移概率矩阵 $T=(p_{ij})_{N\times N}(N=2^n)$。由于$T$是上三角矩阵，故其特征值就是主对角线各元素。不妨设T的主对角线各元素互不相等。如不然，通过适当的微小扰动可以达到这一要求。令p_i为T的对应于特征值p_{ii}的特征向量$(i=1,\cdots,N)$。记矩阵

$$Q=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_N)$$

则Q可逆，且有如下结论。

定理 1　设$(Q^{-1})^T=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)$，即$\xi_i^T$是$Q^{-1}$的第 i 行向量，则ξ_i为T^T的对应于特征值p_{ii}的特征向量$(i=1,\cdots,N)$，且有下列关系成立：

$$\xi_i^T\eta_j=\begin{cases}1, i=j,\\ 0, i\neq j.\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,N) \tag{2}$$

证明　由$T\eta_i=p_{ii}\eta_i(i=1,\cdots,N)$可知

$$T=Q\mathrm{diag}(p_{11},\ \cdots,\ p_{NN})Q^{-1}$$

于是

$$T^T=(Q^{-1})^T\mathrm{diag}(p_{11},\cdots,p_{NN})Q^T$$

从而有

$$T^T(Q^{-1})^T=(Q^{-1})^T\mathrm{diag}(p_{11},\cdots,p_{NN})$$

由此可知，$T^T\xi_i=p_{ii}\xi_i\quad(i=1,\cdots,N)$

由$Q^{-1}Q=I$，可知关系式(2)成立。　　(证毕)

T的对应于特征值p_{kk}的特征向量所满足的齐次线性方程组

$$(T-p_{kk}I)X=0 \tag{3}$$

的一般解的第 k 个分量x_k是自由变量。取$x_k=1$时对应特征向量 η_k 称为T的典则特征向量。相应的ξ_k称为T^T的典则特征向量。以下用到的η_k，ξ_k均指典则特征向量。下面我们指出，对同阶的状态转移概率矩阵，典则特征向量组是一致的。

定理 2　设状态转移概率矩阵 $T=(p_{ij})_{N\times N}$ 的主对角线元素互不相同，则T的对应于特征值p_{kk} 的典则特征向量

$$\eta_k=(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ \cdots,\ x_N^{(k)}),\ k=1,\cdots,N,$$

其中

$$x_i^{(k)}=\begin{cases}1, & 当 S_i\subset S_k\\ 0, & 当 S_i\not\subset S_k\end{cases}\qquad (i=1,\cdots,N) \tag{4}$$

T^T的对应于特征值p_{kk}的典则特征向量

$$\xi_k=(y_1^{(k)},\ y_2^{(k)},\ \cdots,\ y_N^{(k)}),\ k=1,\ \cdots,\ N$$

其中

$$y_j^{(k)}=\begin{cases}1, & 当 S_j\supset S_k 且 |S_j\setminus S_k| 为偶数\\ -1, & 当 S_j\supset S_k 且 |S_j\setminus S_k| 为奇数\\ 0, & 当 S_j\not\supset S_k\end{cases} \tag{5}$$

$$(j=1,\cdots,N)$$

证明 由典则特征向量的定义，$x_k^{(k)}=1$．若$k<N$，注意到T是上三角矩阵和$1-p_{kk}\neq 0$，可知$x_N^{(k)}=0$．若$k<N-1$，由$x_{N-1}^{(k)}$满足方程

$$(p_{N-1,N-1}-p_{kk})x_{N-1}^{(k)}+p_{N-1,N}x_N^{(k)}=0$$

和$p_{N-1,N-1}-p_{kk}\neq 0$，$x_N^{(k)}=0$，可得$x_{N-1}^{(k)}=0$．类推可知$x_{k+1}^{(k)}=\cdots=x_N^{(k)}=0$．于是$x_{k-1}^{(k)}$满足方程

$$(p_{k-1,k-1}-p_{kk})x_{k-1}^{(k)}+p_{k-1,k}x_k^{(k)}=0$$

若$S_{k-1}\not\subset S_k$，则$p_{k-1,k}=0$，从而得$x_{k-1}^{(k)}=0$；若$S_{k-1}\subset S_k$，由状态按字典序递增排序规则可知，这时只能是$k=2$或N．在这两种情形下都有$p_{kk}=p_{k-1,k-1}+p_{k-1,k}$成立，从而得$x_{k-1}^{(k)}=1$．现设结论(4)对于$j>i$的$x_j^{(k)}$都成立。下证对于$i(<k)$结论(4)成立。$x_i^{(k)}$满足方程

$$(p_{ii}-p_{kk})x_i^{(k)}+\sum_{j=i+1}^{k}p_{ij}x_j^{(k)}=0$$

注意到，当$S_i\not\subset S_j$时，$p_{ij}=0$，故上述方程实为

$$(p_{ii}-p_{kk})x_i^{(k)}+\sum_{\substack{j=i+1\\ S_i\subset S_j}}^{k}p_{ij}x_j^{(k)}=0$$

若$S_i\not\subset S_k$，则当$S_i\subset S_j$必有$S_j\not\subset S_k$，则由归纳法假设，$x_j^{(k)}=0$．于是此方程化为$(p_{ii}-p_{kk})x_i^{(k)}=0$，从而得$x_i^{(k)}=0$．若$S_i\subset S_k$，上述方程化为

$$(p_{ii}-p_{kk})x_i^{(k)}+\sum_{\substack{j=i+1\\ S_i\subset S_j\subset S_k}}^{k}p_{ij}=0$$

注意到，$p_{ii}=\sum_{S_l\subset S_i}z_l$，$z_l$为相依目标群受击一发出现状态$S_l$的概率；当$S_i\subset S_j$时，

$$p_{ij}=\sum_{S_j\setminus S_i\subset S_l\subset S_j}z_l$$

所以

$$\sum_{\substack{j=i+1\\ S_i\subset S_j\subset S_k}}^{k}p_{ij}=\sum_{\substack{j=i+1\\ S_i\subset S_j\subset S_k}}^{k}\ \sum_{S_j\setminus S_i\subset S_l\subset S_j}z_l$$

记$S_r=S_j/S_i$．由$S_j\supset S_i$且$j>i$可知$S_r\neq\varnothing$．于是

$$\sum_{\substack{j=i+1\\ S_i\subset S_j\subset S_k}}^{k} p_{ij}=\sum_{\phi\neq S_r\subset S_k\setminus S_i}\ \sum_{S_r\subset S_l\subset S_r\cup S_i} z_l$$

$$=\sum_{\phi\neq S_r\subset S_k\setminus S_i}\ \sum_{\substack{S_l=S_r\cup S_q\\ S_q\subset S_i}} z_l=\sum_{\substack{S_l\subset S_k\\ S_l\not\subset S_i}} z_l$$

$$=\sum_{S_r\subset S_k} z_l-\sum_{S_l\subset S_i} z_l=p_{kk}-p_{ii}$$

由此可得$x_i^{(k)}=1$．综上得知(4)成立。

结论(5)可由类似的推理导出。　　　　(证毕)

定理2表明方程组(3)的解空间对于同阶状态转移概率矩阵具有一致性。

设状态转移概率矩阵T的典则特征向量为$\eta_k(k=1,\cdots,N)$，T^T的典则特征向量为$\xi_l(l=1,\cdots,N)$。令

$$J_k=\eta_k\xi_k^T\quad(k=1,\cdots,N)$$

称$J_k(k=1,\cdots,N)$为T的谱阵。易知J_k均为上三角矩阵，其非零元素只取1或－1值。J_k具有下述性质。

定理3　设$J_k(k=1,\cdots,N)$为T的谱阵，则有下列关系成立：

(1) 当$i\neq j$时，$J_iJ_j=0$；

(2) $J_k^2=J_k\quad(k=1,\cdots,N)$；

(3) $\sum_{k=1}^{N}J_k=I$

证明　(1) 由定理1可知，当$i\neq j$时，$J_iJ_j=\eta_i(\xi_i^T\eta_j)\xi_j^T=0$。(2)$J_k^2=\eta_k(\xi_k^T\eta_k)\xi_k^T=\eta_k\xi_k^T=J_k\quad(k=1,\cdots,N)$。(3) $\left(\sum_{k=1}^{N}J_k\right)\eta_j=\sum_{k=1}^{N}\eta_k(\xi_k^T\eta_j)=\eta_j(j=1,\cdots,N)$。即有$\left(\sum_{k=1}^{N}J_k\right)Q=Q$。于是$\sum_{k=1}^{N}J_k=QQ^{-1}=I$．　　　　(证毕)

定理4　设N阶状态转移概率矩阵T的主对角线元素互不相同，则其谱阵$J_k(k=1,\cdots,N)$只与T的阶数有关，而与T的元素取值无关。且$J_k=(t_{ij}^{(k)})_{N\times N}$的元素按下列规律取值：

第k行元素

$$t_{kj}^{(k)}=\begin{cases}-1，当S_j\supset S_k且|S_j\setminus S_k|为奇数\\ 1，当S_j\supset S_k且|S_j\setminus S_k|为偶数\\ 0，当S_j\not\supset S_k\end{cases}\qquad(6)$$

$$(j=1,\cdots,N)$$

第i $(\neq k)$行元素

$$t_{ij}^{(k)}=\begin{cases}t_{kj}^{(k)}，若S_i\subset S_k\\ 0，若S_i\not\subset S_k\end{cases}\quad(j=1,\cdots,N)\qquad(7)$$

上述规律对$k=1,\cdots,N$都成立。

证明　由定理2，典则特征向量η_k、ξ_k只与T的阶数有关。因而$J_k=\eta_k\xi_k^T$也只与T的阶数有关。由η_k的分量$x_k^{(k)}=1$和式(5)可知式(6)成立。由式(4)可知，当$S_i\subset S_k$时，

J_k的第 i 行与第 k 行相同；当$S_i \subset S_k$时，J_k的第 k 行元素全为零。故有(7)成立。

（证毕）

定理 4 说明，对任何 $N=2^n$ 阶的状态转移概率矩阵（视其主对角线元素互不相同），可以得出一组相同的谱阵。例如，对于 4 阶状态转移概率矩阵，它具有如下形式：

$$T=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & 1-\sum_{j=1}^{3} p_{1j} \\ 0 & p_{11}+p_{12} & 0 & 1-p_{11}-p_{12} \\ 0 & 0 & p_{11}+p_{13} & 1-p_{11}-p_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

不难得出 T 的典则特征向量为：

$$\eta_1=(1,\ 0,\ 0,\ 0),\ \eta_2=(1,\ 1,\ 0,\ 0)$$
$$\eta_3=(1,\ 0,\ 1,\ 0),\ \eta_4=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$$

T^T的典则特征向量为：

$$\xi_1=(1,\ -1,\ -1,\ 1),\ \xi_2=(0,\ 1,\ 0,\ -1)$$
$$\xi_3=(0,\ 0,\ 1,\ -1),\quad \xi_4=(0,\ 0,\ 0,\ 1).$$

T 的谱阵为：

$$J_1=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\qquad J_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\qquad J_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

定理 5　设 $T=(p_{ij})_{N\times N}$ 为状态转移概率矩阵，则对于任意非负整数 k，有下式成立：

$$T^k=\sum_{i=1}^{N} p_{ii}^k J_i \tag{8}$$

证明　由定理 3 之(3)，可知式(8)对于 $k=0$ 成立。由矩阵谱分解定理（见[3]）可知

$$T=\sum_{i=1}^{N} p_{ii}\eta_i\xi_i^T$$

即知式(8)对于$k=1$成立。假定式(8)对于正整数 k 成立。则由定理 3 得

$$T^{k+1}=T^kT=\left(\sum_{i=1}^{N} p_{ii}^k J_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N} p_{jj}J_j\right)=\sum_{i=1}^{N} p_{ii}^{k+1}J_i$$

可见式(8)对于$k+1$也成立。所以(8)对任何非负整数都成立。　　（证毕）

由定理 5 和定理 3 可以推知，状态转移概率矩阵对乘法满足交换律。即有如下结论。

推论　设$P_1=(p_{ij}^{(1)})_{N\times N}$，$P_2=(p_{ij}^{(2)})_{N\times N}$是两个同阶的状态转移概率矩阵，则

$$P_1P_2=P_2P_1$$

对于前述相依目标群系统，由于目标群m在一发l型弹按第k个瞄准点方案攻击下的状态转移概率矩阵

$$T(m,l,k)=(p_{ij}(m,l,k))_{N_m\times N_m}$$

对于$l=1,\cdots,L$和$k=1,\cdots,g_m$具有相同的阶$N_m=2^{n_m}$，故其典则特征向量和谱阵是一致的。记$T(m,l,k)$和$[T(m,l,k)]^T$的典则特征向量分别为$\{\eta_i(m)\}$和$\{\xi_i(m)\}$ $(i=1,\cdots,N_m)$，对应谱阵记为$J_i(m)(i=1,\cdots,N_m)$。由定理 5，可得

$$T(m,l,k)^{x_{mlk}}=\sum_{i=1}^{N_m}p_{ii}(m,l,k)^{x_{mlk}}J_i(m)$$

再由定理 3 可得

$$\prod_{l=1}^{L}\prod_{k=1}^{g_m}T(m,l,k)^{x_{mlk}}=\sum_{i=1}^{N_m}\left[\prod_{l=1}^{L}\prod_{k=1}^{g_m}p_{ii}(m,l,k)^{x_{mlk}}\right]J_i(m)$$

于是模型(MP_2)中的目标函数可化为

$$W=\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{N_m}\left[\prod_{l=1}^{L}\prod_{k=1}^{g_m}p_{ii}(m,l,k)^{x_{mlk}}\right]Z_m^{(0)}J_i(m)\Omega_m \tag{9}$$

其中

$$Z_m^{(0)}J_i(m)\Omega_m=[Z_m^{(0)}\eta_i(m)][\xi_i(m)^T\Omega_m] \tag{10}$$

对于确定的目标群系统而言，它是一个定数，且满足下述结论。

定理 6　当$Z_m^{(0)}=(1,0,\cdots,0)$（即目标群m的初始状态确定无损）时，

$$Z_m^{(0)}J_i(m)\Omega_m=\begin{cases}-v_{S_0\setminus S_i}(m)(\text{当}i=N_m-n_m,\cdots,N_m-1)\\ 0(\text{对其他 }i)\end{cases} \tag{11}$$

其中$v_{S_0\setminus S_i}(m)$表示目标群m中属于集合$S_0\setminus S_i$的点目标的毁伤价值之和。

证明　当$Z_m^{(0)}=(1,0,\cdots,0)$时，由定理 2 中式(4)可知$Z_m^{(0)}\eta_i(m)=1$．由$\Omega_m=(\omega_1(m),\cdots,\omega_{N_m}(m))$，其中$\omega_j(m)=\sum_{k\in S_j}v_k(m)$，$v_k(m)$是目标群$m$中第$k$个点目标的毁伤价值；以及定理 2 中式(5)，可知

$$\xi_i(m)^T\Omega_m=\sum_{\substack{S_j\supset S_i\\|S_j\setminus S_i|\text{为偶数}}}\omega_j(m)-\sum_{\substack{S_j\supset S_i\\|S_j\setminus S_i|\text{为奇数}}}\omega_j(m)$$

$$=\sum_{\substack{S_j\supset S_i\\|S_j\setminus S_i|\text{为偶数}}}\sum_{k\in S_j}v_k(m)-\sum_{\substack{S_j\supset S_i\\|S_j\setminus S_i|\text{为奇数}}}\sum_{k\in S_j}v_k(m)$$

注意到，一个有限集的含奇数个元素的子集个数等于含偶数个元素的子集个数。于是由上式可导出

$$\xi_i(m)^T\Omega_m=\sum_{\substack{S_l\supset S_0/S_i\\|S_l|\text{为偶数}}}\sum_{k\in S_l}v_k(m)-\sum_{\substack{S_l\subset S_0S\setminus_i\\|S_l|\text{为奇数}}}\sum_{k\in S_l}v_k(m)$$

$$=\sum_{S_l\subset S_0\setminus S_i}\left[(-1)^{|S_l|}\sum_{k\in S_l}v_k(m)\right]$$

由此可知，当$|S_0\setminus S_i|=0$，即$i=N_m$时，$\xi_i(m)^T\Omega_m=0$；当$|S_0\setminus S_i|=1$，即$i=N_m-$

n_m, …, N_m-1时,

$$\xi_i(m)^T\Omega_m=(-1)^{|S_0\setminus S_i|}\sum_{k\in S_0\setminus S_i}v_k(m)=-v_{S_0\setminus S_i}(m);$$

当$|S_0\setminus S_i|>1$，即对于其他 i

$$\xi_i(m)^T\Omega_m=\sum_{k\in S_0\setminus S_i}v_k(m)\left[\sum_{r=1}^{|S_0\setminus S_i|}(-1)^r C_{|S_0\setminus S_i|-1}^{r-1}\right]$$

$$=\sum_{k\in S_0\setminus S_i}v_k(m)[(-1)(1-1)^{|S_0\setminus S_i|-1}]=0$$

综上得知定理的结论成立。(证毕)

对于实际的相依目标群系统，一般应视各相依目标群的初始状态是确定无损的。因此由定理 6 和式(9)可知

$$W=-\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=N_m-n_m}^{N_m-1}\left[\prod_{l=1}^{L}\prod_{k=1}^{g_m}p_{ii}(m,l,k)^{x_{mlk}}\right]v_{S_0\setminus S_i}(m)$$

$$=-\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{n_m}\left[\prod_{l=1}^{L}\prod_{k=1}^{g_m}p_{N_m-i,N_m-i}(m,l,k)^{x_{mlk}}\right]v_{S_0\setminus S_{N_m-i}}(m)$$

注意到，对于任一$m\in\{1, \cdots, M\}$

$S_{N_m-i}=\{1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n_m\}\qquad (i=1, \cdots, n_m)$

$S_0\setminus S_{N_m-i}=\{i\}\qquad (i=1, \cdots, n_m)$

$v_{S_0\setminus S_{m-i}}=v_{mi}\qquad (i=1, \cdots, n_m)$

并注意到$p_{N_m-i,N_m-i}(m,l,k)$等于目标群m在一发 l 型弹并按第 k 个瞄准点方案的攻击下第 i 个点目标未被毁伤的概率。即

$$p_{N_m-i,N_m-i}(m,l,k)=1-P_{mi}(l,k)$$

于是模型(MP_2)的目标函数可化为

$$W=-\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{n_m}\prod_{l=1}^{L}\prod_{k=1}^{g_m}(1-P_{mi}(l,k))^{x_{mlk}}v_{mi}$$

至此，模型(MP_2)与模型(MP_1)的等价性也就得到了证明。

参 考 文 献

[1] 张子宗，严小颖．相依目标群系统火力分配问题分析与解法．国防科技大学学报，1989；(1)

[2] 张金槐．离散目标群毁伤数的概率分布——兼及火力运用研究中的规划论模型．国防科技大学学报，1980；(4)

[3] 蒋尔维，高坤敏，吴景琨编．线性代数．北京：人民教育出版社，1979：267～269

Character and Application of the State Transition Probabilities Matrix of a Group of Damage-dependent Targets

Zhang Ganzong Yan Xiaoying

Abstract

In this paper, the characters of the state transition probabilities matrix of a group of damage-dependent targets are deeply analyzed, and a number of important conclusions have been reached. On the basis of the anabove alysis, the general fire-power allocation model to the system consisting of some groups of targets related to damage is discussed.

key words: matrix, probability, transfer state, group of damage-dependent targets, fire-power allocation.