国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第11卷第2期 1989年6月 Vol.11. No.2

l 壳层状态的QSL分类与耦合波函数的计算

陈 健 华

（应用物理系）

摘 要 本文从准旋、自旋、轨道角动量算符的二次量子化形式出发，讨论了l壳层状态的QSL分类，推导了QSL分类的递推公式并给出了p，d，f壳层的分类结果。应用计算单体、二体算符矩阵元的Slater-Condon规则和解线代数本征值问题子程序，编制了计算l壳层QSL耦合波函数的计算程序，在VAX-11/730机上，对p-壳层和d-壳层共约需半分钟，对f-壳层约需24分钟。

关键词 原子物理，波函数，l壳层，递推公式；耦合，耦合状态分类

分类号 O562.1，O174.1

1 QSL分类

先讨论轨道、自旋、准旋算符的二次量子形式与 l 壳层状态的QSL分类。

l 壳层电子的产生，湮灭算符记为$a^{\dagger}_{lms}, a_{lms}, m=-l, -l+1, \cdots, l$；$s=-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$。由于讨论 l 壳层，这里略去了其他量子数。电子产生和湮灭算符满足反对易关系：

$$\{a^{\dagger}_{lms},\ a_{lm's'}\}=\delta_{m,m'}\delta_{s,s'} \tag{1a}$$

$$\{a^{\dagger}_{lms}\ a^{\dagger}_{lm's'}\}=\{a_{lms},\ a_{lm's'}\}=0 \tag{1b}$$

其中 $\{A, B\}\equiv AB+BA$

l 壳层轨道角动量算符的二次量子化形式为[1]

$$\begin{cases} L_z=\sum\limits_{ms} m a^{\dagger}_{lms}a_{lms} \\ L_{\pm}=L_x\pm iL_y=\sum\limits_{ms}[l(l+1)-m(m\pm1)]^{\frac{1}{2}}a^{\dagger}_{l\,m\pm1\,s}a_{lms} \\ L^2\equiv L_x^2+L_y^2+L_z^2=L_+L_-+L_z(L_z-1) \end{cases} \tag{2}$$

l 壳层自旋角动量算符的二次量子化形式为[1]

$$\begin{cases} S_z=\sum\limits_{ms} s a^{\dagger}_{lms}a_{lms}=\frac{1}{2}\sum\limits_{m}(a^{\dagger}_{lm}a_{lm}-a^{\dagger}_{l\bar{m}}a_{l\bar{m}}) \\ S_+=S_x+iS_y=\sum\limits_{m}a^{\dagger}_{lm}a_{l\bar{m}} \\ S_-=S_x-iS_y=\sum\limits_{m}a^{\dagger}_{l\bar{m}}a_{lm} \\ S^2\equiv S_x^2+S_y^2+S_z^2=S_+S_-+S_z(S_z-1) \end{cases} \tag{3}$$

1987年10月5日收稿

这里 $m=\left(m\frac{1}{2}\right)$, $\bar{m}=\left(m-\frac{1}{2}\right)$分别表示自旋向上和向下。

l 壳层准旋算符的二次量子化形式为[2][3]

$$
\begin{aligned}
Q_z&=\frac{1}{2}\left[\sum_{ms}a^{+}_{lms}a_{lms}-(2l+1)\right]\\
Q_+&=Q_x+iQ_y=\sum_{m}(-1)^{l-m}a^{+}_{lm}a^{+}_{l-\bar{m}}\\
Q_-&=Q_x-iQ_y=\sum_{m}(-1)^{l-m}a_{l-\bar{m}}a_{lm}\\
\boldsymbol{Q}^2&\equiv Q_x^2+Q_y^2+Q_z^2=Q_+Q_-+Q_z(Q_z-1)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

利用(1)式，容易证明，轨道、自旋、准旋算符均满足角动量对易关系：

$$
\begin{cases}
[L_i,\ L_j]=i\varepsilon_{ijk}L_k\\
[S_i,\ S_j]=i\varepsilon_{ijk}S_k\\
[Q_i,\ Q_j]=i\varepsilon_{ijk}Q_k
\end{cases}
\tag{5}
$$

且彼此对易：

$$[L_i,\ S_j]=[L_i,\ Q_j]=[S_i,\ Q_j]=0 \tag{6}$$

这里 ε_{ijk} 为全反对称三阶张量，

$$
\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}
1 & (ijk)=(x,y,z)\quad \text{偶排列}\\
-1 & (ijk)=(x,y,z)\quad \text{奇排列}\\
0 & \text{其他}
\end{cases}
$$

$$[A,B]\equiv AB-BA$$

(5) 式右端采用重复下标表示求和的约定。

由(5)，(6)式知：$\mathbf{L}^2$，L_z，$\mathbf{S}^2$，S_z，$\mathbf{Q}^2$，Q_z 彼此对易，存在共同本征态，本征值依次为$L(L+1)$，L_z，$S(S+1)$，S_z，$Q(Q+1)$，Q_z 的归一本征态记为 $|l\alpha QSLQ_zS_zL_z\rangle$，$\alpha$ 是附加量子数，$\alpha=1,2,\cdots,M(l,\mathrm{Q},\mathrm{S},\mathrm{L})$. $M(l,Q,S,L)$表示 l 壳层Q,S,L 允许值及其重数。由(5)式，Q_z,S_z,L_z 的取值范围是：$Q_z=-Q,-Q+1,\cdots,Q$；$S_z=-S,-S+1,\cdots,S$；$L_z=-L,-L+1,\cdots,L$. 由L_z，S_z，Q_z 算符表达式知，L_z 取整数，因之 L 取 0 或正整数；电子数为偶数时，S_z 取整数，Q_z 取半奇数，因之 S 取 0 或正整数，Q 取正半奇数；电子数为奇数时，S_z取半奇数，Q_z取整数，因之 S 取正半奇数，Q 取 0 或正整数，$Q+S$ 总是半奇数。

αQSL 相同而 $Q_zS_zL_z$ 不同的态通过阶梯算符相互联系：

$$
\begin{cases}
Q_\pm|l\alpha QSLQ_zS_zL_z\rangle=[Q(Q+1)-Q_z(Q_z\pm1)]^{\frac{1}{2}}|l\alpha QSLQ_z\pm1S_zL_z\rangle\\
S_\pm|l\alpha QSLQ_zS_zL_z\rangle=[S(S+1)-S_z(S_z\pm1)]^{\frac{1}{2}}|l\alpha QSLQ_zS_z\pm1L_z\rangle\\
L_\pm|l\alpha QSLQ_zS_zL_z\rangle=[L(L+1)-L_z(L_z\pm1)]^{\frac{1}{2}}|l\alpha QSLQ_zS_zL_z\pm1\rangle
\end{cases}
\tag{7}
$$

(7)式暗含了 $Q_zS_zL_z$ 不同的态之间的相位约定。利用(7)式，对给定的 αQSL，只要知道了一个特定的 $Q_zS_zL_z$ 时的耦合波函数，则任意 $Q_zS_zL_z$ 时的耦合波函数都知道了。特别地，电子数为偶数的耦合态，都经过 $Q_z=-1/2$（电子数为$2l$），$S_z=0$，$L_z=0$；电子数为奇数的耦合态，都经过 $Q_z=0$（电子数$2l+1$），$S_z=1/2$，$L_z=0$. 因之对以上

两组 Q_z, S_z, L_z 特定值的态进行分类，就给出了整个 l 壳层的全部分类。可以证明：$M(l,Q,S,L)$ 对 Q,S 交换不变，即 $M(l,Q,S,L)=M(l,S,Q,L)$，因而对 l^{2l} 或 l^{2l+1} 组态 $L_z=0$，$|S_z|$ 取最小值进行分类给出 l 壳层的全部分类。

附带说明，按准旋 Q, Q_z 分类与按电子数 n，先行数 (Seniority) V 分类是一致的，Q_z 与电子数一一对应（见(4)式），Q 与 V 一一对应[3]，即

$$\begin{cases} Q_z=\dfrac{1}{2}(n-2l-1) \\ Q=\dfrac{1}{2}(2l+1-V) \end{cases} \tag{8}$$

引进准旋分类的优点是：便于对准旋应用 Wigner-Eckart 定理，给出力学量矩阵元与电子数的明显依赖关系；相位约定(7)简单一致；而 Racah 相约定[6][7]不仅复杂，而且前半壳层是对粒子，后半壳层是对空穴定义的[4]，两者不自洽，给应用带来不便。例如文[5]指出，计算 jj-LS 变换系数必须采用准旋相约定，才能得到一致的结果，否则出现不一致。

2　l 壳层 QSL 分类的递推公式

定理　设 l^n 组态总自旋 z 分量为 S_z，总轨道角动量 z 分量为 L_z 的重数记为 $I(l,n,L_z,S_z)$，则从 l 壳层到 $l+1$ 壳层有递推公式

$$\begin{aligned} I(l+1,n,L_z,S_z) &= I(l,n,L_z,S_z)+I(l,n-4,L_z,S_z) \\ &+\sum_{m,s}\left[I(l,n-1,L_z-m,S_z-s)+I(l,n-3,L_z-m,S_z-s)\right] \\ &+\sum_{m_1s_1>m_2s_2} I(l,n-2,L_z-m_1-m_2,\ S_z-s_1-s_2) \end{aligned} \tag{9}$$

其中　$m(m_1,\ m_2)$ 取值 $\pm(l+1)$，$s(s_1,\ s_2)$ 取值 $\pm 1/2$.

证明　$l+1$ 壳层比 l 壳层多四个单粒子态，其轨道、自旋的 z 分量取值是 $m=\pm(l+1)$，$s=\pm 1/2$，(9) 式左端为 $(l+1)^n$ 组态总轨道角动量 z 分量为 L_z，总自旋 z 分量为 S_z 的重数，它由下列部分构成：上述四个单粒子态均未被占，其贡献为 (9) 式右端第一项；四个单粒子态均被占，其贡献为右端第二项；四个单粒子态有一个被占或一个空穴，各有四种可能，其贡献为 (9) 式右端方括号内两项，$\sum\limits_{m,s}$ 给出四种可能值；四个单粒子态，有两个被占，其贡献为 (9) 式右端最后一项，$\sum\limits_{m_1s_1>m_2s_2}$ 表示考虑到泡利不相容原理的独立求和，有 $C_4^2=6$ 种取值。以上列举了所述四个单粒子态的一切可能被占据的情况，故应与左端相等。

对 $l=0$，有

$$I(0,0,0,0)=I(0,1,0,\pm 1/2)=I(0,2,0,0)=1 \tag{10}$$

其余全为 0，以(10)式为初值，反复利用(9)式，可得 $l=1,2,\cdots$ 时的 $I(l,n,L_z,S_z)$. 由于 $I(l,n,L_z,S_z)$ 是 L_z，S_z 的偶函数，即

$$I(l,n,L_z,S_z)=I(l,n,\ |L_z|,\ |S_z|) \tag{11}$$

故仅需对 $L_z\geqslant 0$，$S_z\geqslant 0$ 进行计算。

l^n 组态总角动量为L、总自旋为S的重数记为 $K(l,n,L,S)$. 由角动量性质知，K与I的关系是：

$$K(l,n,L,S)=I(l,n,L,S)+I(l,n,L+1,S+1)$$
$$-I(l,n,L+1,S)-I(l,n,L,S+1) \tag{12}$$

由(9)式与(12)式可得从 l 壳层到 $l+1$壳层K的递推公式，其形式与 (9) 式完全相同，只需把I换成K即可。由 (11)，(12) 式知，$K(l,n,L,S)$是L,S以$L=-1/2$，$S=-1/2$为对称轴的奇函数，即

$$K(l,n,L,S)=\eta((L+1/2)(S+1/2))M(l,n,\min(|L|,|1+L|),$$
$$\min(|S|,|1+S|)) \tag{13}$$

其中
$$\eta(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

由(13)式，K只需对$L\geqslant 0$，$S\geqslant 0$算出。

$l=0$时，有

$$K(0,0,0,0)=K(0,1,0,1/2)=K(0,2,0,0)=1 \tag{14}$$

以(14)式为初值，利用形式如(9)式的递推公式，并考虑到(13)式，可得l^n组态的LS分类，即$K(l,n,L,S)$.

l^V 组态先行数为V，总轨道角动量为L，总自旋为S的重数记为$M(l,V,L,S)$. 由先行数的定义[6]知，M函数与K函数有关系式

$$M(l,V,L,S)=K(l,V,L,S)-K(l,V-2,L,S) \tag{15}$$

由(15)式与K的递推关系，得M的递推关系，其形式也与 (9) 式完全相同。

$l=0$时，M的非 0 元素有

$$M(0,0,0,0)=M(0,1,0,1/2)=1 \tag{16}$$

其余为 0 . 以(16)式为初值，利用递推公式，得 l 壳层按 VSL 分类的 $M(l,V,S,L)$.

由于准旋Q与先行数V一一对应（见(8)式），故按VSL分类与按QSL分类完全一致，即

$$M'(l,Q,S,L)=M(l,V,S,L) \tag{17}$$

其中$Q=\frac{1}{2}(2l+1-V)$，$M'(l,Q,S,L)$为 l 壳层按 QSL 分类。

p,d,f 壳层的 VSL 分类结果见附录表1至表3.

3 l 壳层 QSL 耦合波函数计算

这里计算 QSL 耦合波函数的方法与 Slater[8] 计算 p,d 壳层 SL 耦合波函数的方法本质上相同，都是计算算符的矩阵元再加以对角化，差别是：(1) 我们采用算符的二次量子化形式，矩阵元计算比较简单；(2)用计算机程序代替手工计算；(3)SL 耦合不能对 d 壳层进行完全分类，Slater 按与 Racah 方法一致的要求取线性组合，选取符号；QSL 耦合波函数，对p,d 壳层已进行完全分类，不必取线性组合，也未给计算机输入选取符号的信息。

主要计算步骤是：

(1) 对单粒态进行编号

$$k=(m,s),\ m=-l,\ -l+1,\cdots,l;\ s=-1/2,1/2 \tag{18}$$

我们取
$$k(m,s)=2(l+m)+s+1.5 \tag{19a}$$

k 取值1至$4l+2=k_0$.(19a)式反解给出编号为k的m,s值

$$m(k)=\mathrm{INT}((k-1)/2)-l \tag{19b}$$

$$s(k)=(-1)^k0.5 \tag{19c}$$

单粒子编号的不同取法影响相位约定。

(2) 取非耦合态基矢

$$|n_1,n_2,\cdots,n_{k_0}\rangle=a_1^{+n_1}a_2^{+n_2}\cdots a_{k_0}^{+n_{k_0}}|0\rangle,\ n_i=0,1 \tag{20a}$$

(20a)式隐含相位约定。

对基矢(20a)式进行2进制编号：

$$K(n_1,\cdots,n_{k_0})=\sum_{k=1}^{k_0}n_k2^{k-1} \tag{20b}$$

K取值0至$K_0=2^{4l+2}-1$。

(3) 对给定的l, Q_z, S_z, L_z确定非耦合基矢的子空间，由于Q_z与粒子数n一一对应，Q_z可用粒子数代替，即根据

$$\begin{cases}\sum_k n_k=n=2l+1+2Q_z\\ \sum_k n_km(k)=L_z\\ \sum_k n_kS(k)=S_z\end{cases} \tag{21}$$

决定子空间的维数I及其编号$K(i)$, $i=1,\cdots,I$. 这步由子程序完成。

(4) 在I维子空间计算$\boldsymbol{Q}^2$, $\boldsymbol{S}^2$, $\boldsymbol{L}^2$的矩阵元，由子程序完成，计算公式见附录。

(5) 对$\boldsymbol{Q}^2$的$I\times I$维方阵解线代数本征值问题，将本征值按大小排列，记为$B(i)$,

$$Q(i)=(B(i)+0.25)^{\frac{1}{2}}-0.5,\ i=1,\cdots,I \tag{22a}$$

本征矢按相同次序按列排列，记为$V_1(i_1,i_2)$.

(6) 对$\boldsymbol{S}^2$的$I\times I$维方阵进行相似变换

$$A=V_1^T\boldsymbol{S}^2V_1$$

V_1^T为V_1矩阵转置。由于$\boldsymbol{Q}^2$与$\boldsymbol{S}^2$对易，A为对角方块矩阵，仅$Q(i)$简併部分有非零非对角元素，对A解线代数本征值问题，并将本征值在$Q(i)$简併的子空间内按大小排列，记为$B(i)$,

$$S(i)=[B(i)+0.25]^{\frac{1}{2}}-0.5 \tag{22b}$$

本征矢按相同次序按列排列，记为$V_2(i_1,i_2)$，则V_1V_2为使$\boldsymbol{Q}^2$, $\boldsymbol{S}^2$同时对角化的本征矢集。

(7) 对$\boldsymbol{L}^2$的$I\times I$维方阵进行相似变换

$$A=(V_1V_2)^T\boldsymbol{L}^2V_1V_2$$

由于 $\boldsymbol{L}^2$ 与 $\boldsymbol{Q}^2$，$\boldsymbol{S}^2$ 对易，A 为对角方块矩阵，仅 $Q(i)$，$S(i)$ 简併部分有非零非对角元素，对 A 解线代数本征值问题，在 $Q(i)$，$S(i)$ 简併的子空间内将本征值按大小排列，记为 $B(i)$，

$$L(i)=[B(i)+0.25]^{\frac{1}{2}}-0.5 \tag{22c}$$

本征矢按相同次序按列排列，记为 $V_3(i_1,i_2)$，则

$$V=V_1V_2V_3 \tag{23}$$

为使 $\boldsymbol{Q}^2,\boldsymbol{S}^2,\boldsymbol{L}^2$ 同时对角化的本征矢集，即 QSL 耦合波函数。

(8) 输出 $(Q(i),\ S(i),\ L(i),\ (V(j,i),\ j=1,I),\ i=1,I)$，并记入内存备用。

由对(7)式的讨论知，l 壳层仅需对 l^{2l} 或 l^{2l+1} 组态对 $S_z=0$ 或 0.5，$L_z=0$ 进行计算。

对 p 壳层，$I=3$；d 壳层，$I=16$；f 壳层，$I=119$. 在 VAX-11/730 机上，计算 p, d 壳层共需约30秒，f 壳层约需24分；在YH-1 机上，采用并行算法，f 壳层CPU时间约 2 分40秒。

p, d 壳层 QSL 耦合波函数计算结果与 Slater[8] 附录24上数据除相约定外完全一致；f 壳层 QSL 耦合波函数未见有结果发表。

参 考 文 献

[1] Arery J. Creation and Annihilation Operators, 1976

[2] B.G.怀邦著；冯承天等译. 典型群及其在物理学上的应用. 北京：科学出版社，1982:380

[3] Flowers B H, Szpikowski S. Proc Phys Soc, 1964; 84:193
Arima A, Ichimura S. Proc Theor Phys, 1966; 36:298
Lawson D R, Macfarlane M H. Nucl Phys, 1965; 66:60
Helmers K. Nucle Phys, 1965; 69:593

[4] Judd B R. Second Quantization and Atomic Spectroscopy, 1967

[5] Dyall K G, Grant I P. J Phys B:At Mol Phys, 1982; 15:L371

[6] Racah G. Phys Rev, 1943; 63:367

[7] Cowan R D.The Theory of Atomic Structure and Spectra,Berkeleg.Los Angles. London: University of California Press, 1981:110

[8] J.C. 斯莱特著；宋汝安译. 原子结构的量子理论. 第二卷. 上海：科技出版社，1983:46

[9] Condon E U. Phys Rev, 1930; 36:1121

[10] 陈健华. 国防科技大学学报，1985；3:95

The QSL Classification of l-shell and Numerical Calculation of Coupled Wave Function

Chen Jianhua

Abstract

Starting from the second quantization formalism of the Quasispin, Spin and Orbital angular momentum operators, the QSL classification of l-shell states has been discussed, a recursion formula calculating the multiplets of QSL classification is derived from Pauli principle and the classified results of p, d, f-shell is presented. A computation program for calculating the QSL coupled wave function of l-shell has been written with the Slater-Condon rules for computing the matrix elements of Q^2, S^2, L^2 operators, and a linear algebra subroutine for diagonalization. The code takes about 30 seconds for p-shell and d-shell, about 24 minites for f-shell on VAX-11/730.

Key Words: atomic physics, wave function, l-shell, recursion formula; coupling, classification of coupled state

附 录

单体、二体算符矩阵元计算公式[1],[9],[10]及VSL分类表

1 单体算符

$$\hat{F}=\sum_{i,j} f_{ij} a_i^+ a_j \tag{1}$$

其中 $$f_{ij}=\int \psi_i^*(\vec{r}) \hat{f} \psi_j(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

在基矢

$$|n_1, n_2, \cdots\rangle \equiv a_1^{+n_1} a_2^{+n_2} \cdots |0\rangle \tag{2}$$

上的非0矩阵元有

平均值 $$\langle n_1 n_2 \cdots |\hat{F}| n_1 n_2 \cdots\rangle = \sum_i n_i f_{ii} \tag{3}$$

单粒子跃迁

$$\langle \cdots n_i \cdots n_j - 1 \cdots |\hat{F}| \cdots n_i - 1 \cdots n_j \cdots\rangle = (-1)^\delta f_{ij} \delta_{n_i 1} \delta_{n_j 1} \tag{4}$$

其中 $$\delta = \sum_{\min(i,j)+1}^{\max(i,j)-1} n_k \tag{5}$$

2 二体算符

$$\hat{G}=\frac{1}{2}\sum_{ijkl} g_{ijlk} a_i^+ a_j^+ a_k a_l \tag{6}$$

其中 $$g_{ijlk}=\int \psi_i^*(2) \psi_j^*(1) g_{12} \psi_k(1) \psi_l(2) d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2$$

在基矢(2)上的非0矩阵元有

平均值

$$\langle n_1 n_2 \cdots |\hat{G}| n_1 n_2 \cdots\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i,j} n_i n_j (g_{ijji} - g_{ijij}) \tag{7}$$

单粒子跃迁

$$\langle \cdots n_i \cdots n_j - 1 \cdots |\hat{G}| \cdots n_i - 1 \cdots n_j \cdots\rangle = (-1)^\delta \sum_{k \neq i\, j} n_k (g_{ikkj} - g_{ikjk}) \tag{8}$$

其中 δ 同式(5).

双粒子跃迁

$$\langle \cdots n_i \cdots n_j \cdots n_k - 1 \cdots n_l - 1 \cdots |\hat{G}| \cdots n_i - 1 \cdots n_j - 1 \cdots n_k \cdots n_l \cdots\rangle$$
$$= n_i n_j n_k n_l (-1)^\eta (g_{ijkl} - g_{ijlk}) \tag{9}$$

其中 $$\eta = \sum_{\min(i,j)+1}^{\max(i,j)-1} n_m + \sum_{\min(k,l)+1}^{\max(k,l)-1} n_m \tag{10}$$

Q^2, S^2, L^2为单体、二体算符,根据上述单体、二体算符矩阵元计算规则,即得Q^2, S^2, L^2的矩阵元计算公式。

3 VSL分类表

表 1　p 壳层 V, S, L 分类

V	S	L = 0	L = 1	L = 2
2	0.0	0	0	1
2	1.0	0	1	0
3	0.5	0	0	1
3	1.5	1	0	0

表 2　d 壳层 V, S, L 分类

V	S	L = 0	1	2	3	4	5	6
2	0.0	0	0	1	0	1	0	0
2	1.0	0	1	0	1	0	0	0
3	0.5	0	1	1	1	1	1	0
3	1.5	0	1	0	1	0	0	0
4	0.0	1	0	1	1	1	0	1
4	1.0	0	1	1	1	1	1	0
4	2.0	0	0	1	0	0	0	0
5	0.5	1	0	1	1	1	0	1
5	1.5	0	0	1	0	1	0	0
5	2.5	1	0	0	0	0	0	0

表 3　f 壳层 V, S, L 分类

V	S	L = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	0.0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	1.0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0.5	0	1	2	1	2	2	1	1	1	0	0	0	0
3	1.5	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0.0	1	0	3	1	3	2	2	1	2	0	1	0	0
4	1.0	0	2	2	3	3	3	2	2	1	1	0	0	0
4	2.0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0.5	0	3	3	5	4	5	4	4	2	2	1	1	0
5	1.5	0	2	2	3	3	3	2	2	1	1	0	0	0
5	2.5	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
6	0.0	2	1	2	3	4	2	4	2	2	2	1	0	1
6	1.0	0	3	3	5	4	5	4	4	2	2	1	1	0
6	2.0	0	1	2	1	2	2	1	1	1	0	0	0	0
6	3.0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0.5	2	1	2	3	4	2	4	2	2	2	1	0	1
7	1.5	1	0	3	1	3	2	2	1	2	0	1	0	0
7	2.5	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
7	3.5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

（以下略）