

## 自由电子激光的粒子模拟

邵福球 常文蔚 张立夫

(应用物理系)

**摘要** 文中简单介绍了自由电子激光粒子模拟方法,用 $1\frac{2}{2}$ 维完全相对论性电磁模程序模拟了相对论电子束通过回旋磁场产生电磁辐射的过程,并作了理论解释;研究了纵向引导磁场对能量转换效率的影响。

**关键词** 自由电子激光, 电子束, 粒子模拟, 回旋磁场

**分类号** O572.2

## 引言

近十几年来,人们对利用相对论电子束产生相干电磁辐射的自由电子激光器特别感兴趣,在理论[1]~[5]和实验[6],[7]方面都取得了较大进展。人们之所以对用相对论电子束产生电磁辐射感兴趣是有其原因的。因为自由电子激光具有高功率、高效率、频率可调等优点,这样就可能产生复盖整个电磁波谱的辐射。在自由电子激光的研究过程中,除了理论和实验研究外,实践证明粒子模拟方法也是一个非常有用的方法,为此我们用

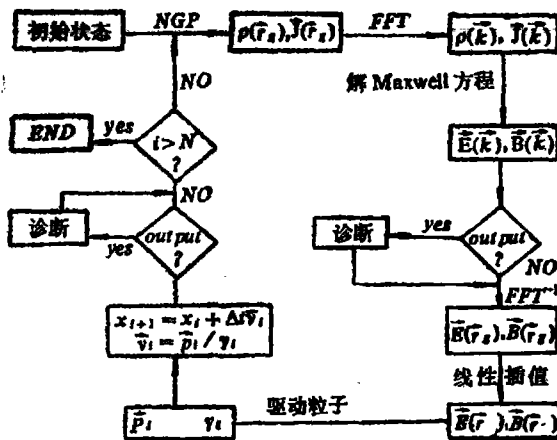


图1 计算框图

1.2 维完全相对论性电磁模程序对自由电子激光中波与粒子相互作用过程进行了模拟。

## 1 粒子模拟程序

整个模拟过程如图 1 所示。现对该计算框图说明如下：

### 1.1 边界条件

我们所采用的是 1.2 维完全相对论性电磁模程序，即粒子坐标是一维的，速度是三维的： $\{x; v_x, v_y, v_z\}$ 。由于计算机的速度和容量的限制，我们用少量计算粒子代替真实等离子体，并引入离散空间和离散时间。由于我们所考虑的电磁辐射频率非常高，因此仅考虑电子的运动而将离子作为中性化本底。使用周期性边界条件。

### 1.2 初始条件

在模拟过程中，为了不使初始扰动抑制真实等离子体中存在的现象，有必要一开始就让电子处于稳定状态。其稳定状态求解如下：

我们考虑的仍是人们最感兴趣的横向回旋磁场作泵浦场的自由电子激光<sup>[8]~[11]</sup>，所加外磁场形式为

$$\vec{B}_{ext} = B_{0x}\vec{e}_x + \delta B_0(\vec{e}_y \cos k_0 x + \vec{e}_z \sin k_0 x) \quad (1)$$

式中  $\delta B_0$  是回旋磁场的幅度， $k_0$  是其波数。

在稳态时，电子的相对论运动方程是：

$$V_0 \frac{\partial}{\partial x} \vec{P} = - \frac{e}{m_0 c \gamma} \vec{P} \times (\vec{B}_{ext} + \vec{B}_p) \quad (2)$$

此处  $V_0$  是电子束漂移速度， $\vec{P}$  是电子的自洽动量， $\vec{B}_p$  是电子束束流所产生的自洽磁场，它由安培定律给出：

$$\frac{\partial}{\partial x} (\vec{e}_x \times \vec{B}_p) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} = -en_0 \frac{4\pi}{cm_0 \gamma_0} \vec{P} \quad (3)$$

联立求解(1)~(3)式得： $P_x = P_{0x}$

它相应于电子束的恒定漂移速度的动量。

$$\begin{pmatrix} B_{py} \\ B_{pz} \end{pmatrix} = \frac{\omega_{pe}^2 \delta B_0}{\gamma_0 c^2 \left( -k_0^2 + \frac{\Omega_{ce}}{\gamma V_0} k_0 - \frac{\omega_{pe}^2}{\gamma_0 c^2} \right)} \begin{pmatrix} \cos k_0 x \\ \sin k_0 x \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \left( -k_0^2 + \frac{\Omega_{ce}}{\gamma V_0} k_0 - \frac{\omega_{pe}^2}{\gamma_0 c^2} \right) \begin{pmatrix} \cos k_0 x \\ \sin k_0 x \end{pmatrix} \quad (6)$$

式中

$$\omega_{ce} = \frac{e \delta B_0}{m_0 c},$$

$$\Omega_{ce} = \frac{B_{0x} \cdot e}{m_0 c}.$$

以上诸式给出了电子束的平衡状态。

### 1.3 求电流密度和电荷密度

图1中“NGP”表示利用偶极展开方法求空间网格点上电流密度和电荷密度<sup>[12]</sup>。在这里我们采用了有限大小粒子方法<sup>[13], [14]</sup>, 即带电粒子的电荷和质量在空间有一定的分布:

$$s(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}a)^n} e^{-|\vec{r} - \vec{r}_0|^2/2a} \quad (7)$$

式中  $n$  是空间维数,  $\vec{r}_0$  是高斯粒子的中心坐标。有限大小粒子方法的引入是粒子模拟得以成功的关键, 目的在于抑制用少量计算粒子代替真实等离子体时所引起的短波扰动。在此基础上求得  $k$  空间的电荷密度和电流密度为

$$\rho_k = s(k) \{ \text{FFT}[Q(\vec{r}_g)] - i\vec{k} \cdot \text{FFT}[\vec{D}(\vec{r}_g)] \} \quad (8)$$

$$\vec{J}_k = s(k) \{ \text{FFT}[\vec{cur}(\vec{r}_g)] - i\vec{k} \cdot \text{FFT}[\vec{cud}(\vec{r}_g)] \} \quad (9)$$

式中

$$Q(\vec{r}_g) = \sum_{j \in g} q_j$$

$$\vec{D}(\vec{r}_g) = \sum_{j \in g} \Delta\vec{r}_j q_j$$

$$\vec{cur}(\vec{r}_g) = \sum_{j \in g} q_j \vec{V}_j$$

$$\vec{cud}(\vec{r}_g) = \sum_{j \in g} q_j \vec{V}_j \Delta\vec{r}_j$$

### 1.4 麦克斯韦方程组的求解

利用付里叶变换及时间中心差分方法, 求得如下方程组:

$$B_{ky}^{n+\frac{1}{2}} = B_{ky}^{n-\frac{1}{2}} + ick\Delta t E_{kz}^n \quad (10)$$

$$B_{kz}^{n+\frac{1}{2}} = B_{kz}^{n-\frac{1}{2}} - ick\Delta t E_{ky}^n \quad (11)$$

$$E_{ky}^n = E_{ky}^{n-1} - ick\Delta t B_{kz}^{n-\frac{1}{2}} + 4\pi\Delta t J_{ky}^{n-\frac{1}{2}} \quad (12)$$

$$E_{kz}^n = E_{kz}^{n-1} + ick\Delta t B_{ky}^{n-\frac{1}{2}} + 4\pi\Delta t J_{kz}^{n-\frac{1}{2}} \quad (13)$$

$$E_{kx}^n = \frac{4\pi}{ik} \rho_{kx}^n \quad (14)$$

### 1.5 用线性插值方法求任意点上的电场、磁场

在求得  $k$  空间场量后, 作付里叶逆变换, 求得空间网格点上的场量, 然后按线性插值方法求任意点上的场量:

$$\vec{E}_x = \vec{E}_g + \frac{\Delta x}{\delta} (\vec{E}_{g+1} - \vec{E}_g) \quad (15)$$

$$\vec{B}_x = \vec{B}_g + \frac{\Delta x}{\delta} (\vec{B}_{g+1} - \vec{B}_g) \quad (16)$$

式中  $\delta$  为网格长度,  $\Delta x$  为  $x$  与第  $g$  个网格点间的距离。

### 1.6 驱动粒子

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = q \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{B} \right) \quad (17)$$

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{m_0 \gamma} = \frac{\vec{P}}{m_0 \left( 1 + \frac{P^2}{m_0^2 c^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (18)$$

由此有

$$\frac{d}{dt} P^2 = 2q \vec{P} \cdot \vec{E} \quad (19)$$

它说明仅需考虑电场引起的加速就能求得相对论性因子  $\gamma$ 。再按时间中心差分方法求解洛伦兹力方程:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{P}_i^{n+\frac{1}{2}} - \vec{P}_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= q_i \vec{E}_i^n + \frac{q_i}{m_0 \gamma_i c} \left( \frac{\vec{P}_i^{n+\frac{1}{2}} + \vec{P}_i^{n-\frac{1}{2}}}{2} \right) \\ &\quad \times \left( \frac{\vec{B}_i^{n+\frac{1}{2}} + \vec{B}_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

驱动粒子

$$\vec{V}_i = \vec{P}_i / m_i \gamma_i \quad (21)$$

$$\vec{r}_i^{n+1} = \vec{r}_i^n + \Delta t \cdot \vec{V}_i^{n+\frac{1}{2}} \quad (22)$$

## 2 不加引导场时的自由电子激光

我们用流体理论和粒子模拟方法来全面研究一下不加引导场的自由电子激光中波与粒子相互作用的全过程,以便更好地了解自由电子激光中相互作用机理。

### 2.1 理论分析

设所加外场为

$$\vec{B}_{\text{ext}} = \delta B_0 (\vec{e}_y \cos k_0 x + \vec{e}_z \sin k_0 x) \quad (23)$$

在随电子运动的坐标系中看来,  $\vec{B}_{\text{ext}}$  相当于一个强泵浦电磁波。

由流团运动方程,连续性运动方程,有

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -e \left( \vec{E} + \frac{\vec{P} \times \vec{B}}{m_0 \gamma c} \right) - \frac{1}{\bar{n}} \frac{\partial}{\partial x} \pi \vec{e}_x \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{n} + \nabla \cdot \bar{n} \vec{V} = 0 \quad (25)$$

$$\begin{cases} \vec{j} = -e \bar{n} \vec{V} \\ \rho = -e \bar{n} \end{cases} \quad (26)$$

及麦克斯韦方程组, 我们可以求得散射电磁波的色散关系为

$$\left\{ [\omega - V_{0z}(k+k_0)]^2 - \frac{\omega_{pe}^2(1+3(k+k_0)^2\lambda_D^2)}{\gamma_0^3} \right\} \cdot \left( \omega^2 - k^2c^2 - \frac{\omega_{pe}^2}{\gamma_0} \right) = \frac{\omega_{pe}^2\omega_{ce}^2k_0^2(k+k_0)^2}{2\gamma_0^5\beta^4} \left[ 1 + \frac{\omega_{pe}(1+3(k+k_0)^2\lambda_D^2)}{\gamma_0^{3/2}(k+k_0)c} \gamma_0\sqrt{\gamma_0^2-1} \right] \quad (27)$$

式中 
$$\beta^2 = -k_0^2 - \frac{\omega_{pe}^2}{\gamma_0 c^2} + \frac{\omega_{ce}}{\gamma V_0} k_0$$

$$\omega_{ce} = \frac{e\delta B_0}{m_0 c}$$

$$\lambda_D^2 = \frac{T}{4\pi n_0 e^2}$$

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m_0}$$

当 
$$\omega_{ce} \geq \frac{\mu k_0 (2UL\gamma_0^5)^{1/2}}{(k+k_0)\omega_{pe}^2}$$

时, 出现不稳定性, 其不稳定波增长率为

$$\omega_i = \frac{1}{2} \left( \frac{Q}{UL} - \mu^2 \right)^{1/2} \quad (28)$$

式中各量意义如下:

$$Q = \frac{\omega_{pe}^2\omega_{ce}^2k_0^2(k+k_0)^2}{2\gamma_0^5\beta^4} \left[ 1 + \frac{\omega_{pe}[1+3(k+k_0)^2\lambda_D^2]}{\gamma_0^{3/2}(k+k_0)c} \gamma_0\sqrt{\gamma_0^2-1} \right]$$

$$U = \left( k^2c^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{\gamma_0} \right)^{1/2}$$

$$D = (k+k_0)V_{0z}$$

$$L = \frac{\omega_{pe}}{\gamma_0^{3/2}}(1+3(k+k_0)^2\lambda_D^2)$$

$$\mu = -D + U + L$$

## 2.2 模拟结果

所用程序为  $1\frac{2}{2}$  维完全相对论性电磁模程序。速度按  $\omega_{pe}\delta$  无量纲化,  $\delta$  是网格长度, 光速取为  $15\omega_{pe}\delta$ , 静磁泵满足  $k_{0c} = 2.2\omega_{pe}$ ,  $\omega_{ce} = \frac{e\delta B_0}{m_0 c} = 0.7\omega_{pe}$ , 电子束入射能量  $\gamma_0 = 1.8$ , 时间步长取为  $0.05\omega_{pe}^{-1}$ , 开始时电子和离子在坐标空间中均匀分布, 而在  $x, y, z$  方向动量取高斯分布, 但在  $x$  方向有一个漂移速度。

在图 2 中, 我们给出了  $t = 55\omega_{pe}^{-1}$  时, 静电模和电磁模波谱图。从图中可以看出此时不稳定性已经发生, 不稳定谱已增长到相当大的幅度。在静电波和电磁波中波数满足

条件： $k_{es} = k_{em} + k_0$ ，另外频谱分析结果也表明，最不稳定的静电模和电磁模频率相等， $\omega_{em} = \omega_{es}$ 。相位匹配条件的满足，表明电磁波确实通过回旋磁场与等离子体振动发生了耦合。从图 2 中不同模的相对幅度同样可看出，电子束所损失的能量绝大部分给了高频电磁模，而这也是产生高效率自由电子激光的一个必要条件。

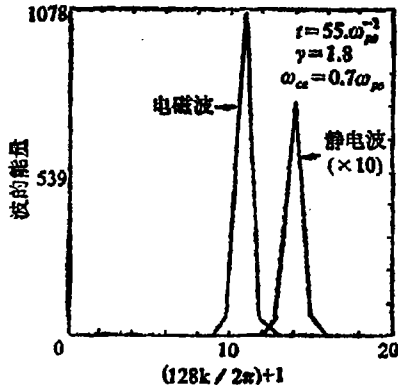


图 2  $t = 55\omega_p^{-1}$  时，电磁波和静电模的波谱图

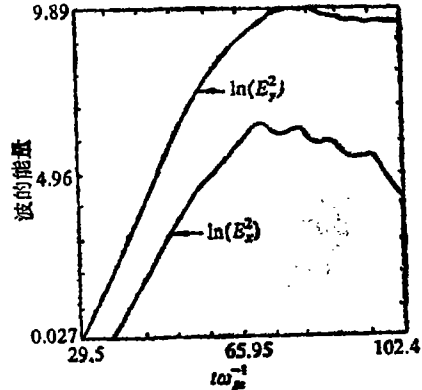


图 3 最不稳定电磁模能量、最不稳定静电模能量随时间变化图

在图 3 中，我们给出了最不稳定电磁模、最不稳定静电模能量取自然对数( $\ln(E_e^2)$ ， $\ln(E_s^2)$ )后随时间  $t$  的变化图。从图中我们看到最不稳定电磁波最大增长率为  $\omega_{ce} = 0.13$ ，与前面理论结果一致。另外，从图 3 中我们看到电磁模比静电模饱和迟。其原因如下：在不稳定性发生过程中，电子束由于静电波作用而发生纵向聚堆，但是在静电波饱和时，电子束的热化还不足以破坏电子束的相干聚堆，结果，电子束与回旋磁场相互作用，电磁模继续增长，这一过程持续到由于电子束的热运动，使得电子聚堆被破坏为止。从图 3 我们还看到电子束所损失的能量仍然是绝大部分给了电磁波，并进一步证实静电波饱和在前，电磁波饱和在后。

在图 4 中，我们给出了  $t = 45\omega_p^{-1}$ ， $t = 60\omega_p^{-1}$  时电子在相空间  $(x, V_x)$  中的分布，

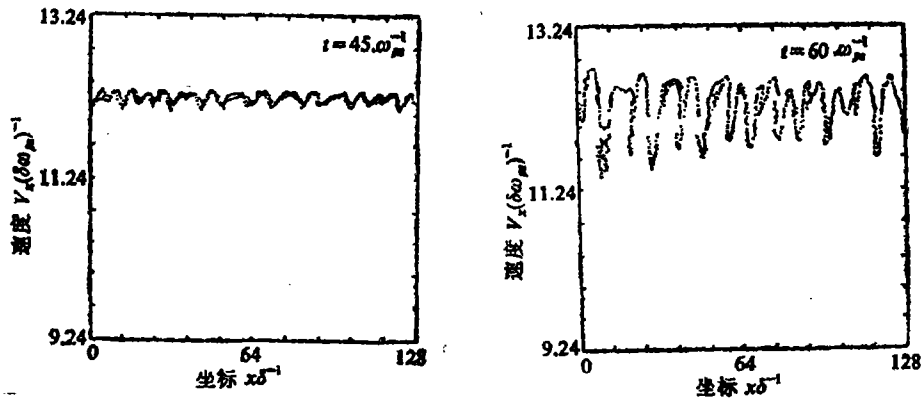


图 4 在不同时刻电子在相空间  $(x, V_x)$  中的分布

它形象而又直观地表明电子被周期性地加速和减速,并能看出存在长波干扰;另外,我们还看到随着不稳定性的发展,电子束纵向速度下降。电子束的速度降低,究其原因电子束的部分能量转化成了辐射能。

### 2.3 非线性饱和现象

在整个模拟过程中,最重要的当然是考虑不稳定波的饱和问题。模拟结果表明:不稳定波饱和是由于电子被静电波俘获所致。在图5中我们给出了在速度空间中电子分布函数的变化。由图中可看出,电子被静电波俘获,速度降低。比较上述图形及图2可以看出电子被静电波俘获导致不稳定性饱和。如果我们假定当高频电磁波饱和时,电子束所损失的能量绝大部分都转化为高频电磁波的能量,这样能量转化效率为

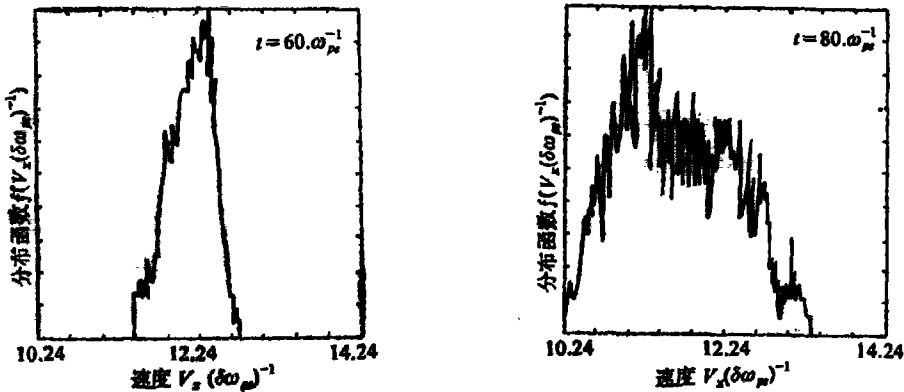


图5 不同时刻电子速度分布函数的变化

$$\eta = \frac{|\Delta W|}{(\gamma_0 - 1)mc^2} = \frac{\gamma_0 - \gamma_{ph}}{\gamma_0 - 1} \quad (29)$$

假设电子束是冷的,有

$$\eta = \frac{\gamma_0^{\frac{1}{2}}(\gamma_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{(\gamma_0 - 1)(k + k_0)c} \cdot \omega_{pe} \quad (30)$$

对上面所给参数,模拟和理论分析所得的能量转换效率都大致为17%

### 3 纵向引导磁场对能量转换效率的影响

在自由电子激光器中,由于电子束的空间电荷场引起的径向外斥力  $eE_r$ ,总是大于电子束自磁场  $B_0$  引起的箍缩力  $eB_0\beta_z$  [15], 故需采用一些方法来箍缩电子束,以免使其发散,其方法之一是加纵向引导磁场 [16]~[18]。为此我们用粒子模拟方法研究了纵向引导磁场对能量转换效率的影响。设所加纵向引导磁场为  $B_{0z}\bar{e}_z$ , 这样所加磁场为

$$\vec{B}_{ext} = B_{0z}\bar{e}_z + \delta B_0(\bar{e}_y \cos k_0 x + \bar{e}_z \sin k_0 x) \quad (31)$$

在此磁场作用下,电子的静态运动解由(4), (6)式给出。改变纵向磁场强度,模拟所得饱和时能量转换效率与纵向引导磁场  $\Omega_{ce}$  的关系如图6所示。由图可看出,随着纵向引导磁场的引入,存在以下三个参数区域:

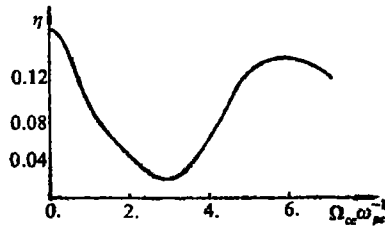


图6 模拟所得能量转换效率与纵向引导磁场的关系

### 3.1 $\Omega_{ce}/\gamma \ll k_0 V_{ox} \sim \omega_{pe}$

此时,在相互作用过程中,引导场所起作用较小,其波与粒子相互作用情形类似于前面介绍的不加引导场的情形,静电模和电磁模通过回旋磁场耦合产生了高频电磁辐射,饱和时能量转换效率较高。

### 3.2 $\Omega_{ce}/\gamma_0 \sim k_0 V_{ox} \sim \omega_{pe}$

从模拟结果中,我们看到在此参数区域,电子回旋模被激化,强烈的波粒相互作用导致能量转换效率降低,当 $\Omega_{ce}$ 非常接近 $k_0 V_{ox}$ 时,回旋模起主要作用,以致电子束很快热化,饱和时能量转换效率降低特别明显。

### 3.3 $\Omega_{ce} \gg k_0 V_{ox} \sim \omega_{pe}$

模拟结果表明:在此参数区域,静电模和电磁模通过磁场耦合产生了高频电磁辐射。当 $\Omega_{ce} > 6.0\omega_{pe}$ 之后,饱和时能量转换效率从峰值逐渐降低。

综观以上模拟结果,我们看到通过选择适当的纵向引导磁场,可以得到最大的能量转换效率。

## 致 谢

作者感谢国家自然科学基金会的支持和等离子体物理协会对本工作的指导。

## 参 考 文 献

- [1] Sprangle P, Tang G M, Maheimer W M. Phys Rev, 1980, A21:301
- [2] Sprangle P, Smith R A. Phys Rev, 1980, A21:293
- [3] Friedland L. Phys Fluids, 1980, 23(12): 2376
- [4] Kwan K T, et al. Phys Fluids, 1979, 22(6): 1089
- [5] Kwan K T, et al. Phys Fluids, 1977, 20(4):581
- [6] Elias L R, et al. Phys Rev Lett, 1976, 36:717
- [7] Deacon D A G, et al. Phys Rev Lett, 1977, 38:892
- [8] Moore G T, Scully M O. Phys Rev, 1980, A21: 2000
- [9] Bonifacio, Meystre P, Moore G T, Scully M O. Phys Rev, 1980, A21:2009
- [10] Prosnitz D, Szoke A, Neil V K. Lawrence Livermore Nation Laboratory Rep. 1980; UCRL-84799
- [11] Lin A T, Dawson J M. In: Jacobs S F, Pilloff H S, Sargent III M, Scully M O,



- Spitzer R. *Free Electron Generator of Coherent Radiation*. London: Addison-Wesley Publishing Company, 1980: 20
- [12] Dawson J M. *Reviews of Modern Physics*, 1983, 55(2): 403
- [13] Birdsall C K, Dieter Fuss. *J Comput Phys*, 1969, 3: 394
- [14] Birdsall C K, Langdon A B. in Press. *Plasma Physics via Computer Simulation* (Mcgraw-Hill-New York)
- [15] Miller R B. *An Introduction to the Physics of Intence Charged Partule Beams*. New York: Plenum, 1982: 193
- [16] Parker R K, et al. *Phys Rev Lett*, 1982, 48: 238
- [17] Liu A T, et al. *Phys Fluids*, 1983, 26(1): 3

## The Particle Simulation of Free Electron Laser

Shao Fuqiu Chang Wenwei Zhang Lifu

### Abstract

The paper briefly describes the method of particle simulation of a free electron laser. By passing a relativistic electron beam over a rippled static-magnetic field, high frequency electromagnetic radiation is generated. This process is simulated through a one and two-halves fully relativistic electromagnetic program. Some relevant theoretical explanations are also represented. The influence of the axial guide magnetic field on the saturation energy conversion efficiency is studied.

**Key words:** free electron laser, electron beam, particle simulation, rippled magnetic field