国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第11卷第3期 1989年9月 Vol.11 No.3

厚 薄梁和板的通用动力有限单元

周 科 健

（航天技术系）

摘 要 本文以位移模式，从研究通用于厚/薄梁的动力有限单元入手，得到了通用于薄板和中厚板的九个自由度三角形和十二个自由度矩形动力有限单元。

关键词 动力有限单元，板的自由振动，有限单元

分类号 TV33

胡海昌先生在文献[1]中指出，研究通用于板的两种理论的通用有限单元是很有意义的工作。本文以位移模式，从研究通用于厚/薄梁的动力有限单元入手，得到了通用于薄板和中厚板的九个自由度三角形和十二个自由度矩形动力有限单元。

1 厚/薄梁的动力有限单元

单元刚度矩阵与单元质量矩阵从应变能（考虑剪切变形）与动能（考虑转动惯性）的积分公式求出，即

$$V_b=\frac{1}{2}\int_0^l\frac{M^2}{D}dx \tag{1}$$

$$V_{sh}=\frac{1}{2}\int_0^l\frac{Q^2}{C}dx \tag{2}$$

$$T_{tr}=\frac{1}{2}\int_0^l\rho A\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2dx \tag{3}$$

$$T_{rot}=\frac{1}{2}\int_0^l\rho I\left(\frac{\partial\beta_b}{\partial t}\right)^2dx \tag{4}$$

式中$D=EI$是梁的弯曲刚度，M是纯弯曲的弯矩，Q是横向剪切力，$C=GAk$是剪切

1989年2月20日收稿

刚度，其中 k 考虑由于剪切变形使截面翘曲的无量纲参数，称为剪切系数，对矩形截面取5/6或0.85，对圆薄壁管取0.5，v 是总线位移，β_b是纯弯曲转角

$$\beta_b=\frac{\partial v}{\partial x}-\gamma \tag{5}$$

式中 γ 是剪切角

$$\gamma=-\frac{Q}{C} \tag{6}$$

则

$$\beta_b=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{Q}{C} \tag{7}$$

平面梁的位移函数取为坐标 x 的三次函数，即

$$v=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3=\underset{\sim}{X}^T\underset{\sim}{a} \tag{8}$$

式中 $\underset{\sim}{X}^T=[1 \quad x \quad x^2 \quad x^3]$

$$\underset{\sim}{a}=[a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4]^T$$

梁单元的结点自由度是总线位移v_i和纯弯曲转角$\beta_{b_1 i}$（$i=1,2$），共四个自由度。从剪切力 $Q=\partial M/\partial x=D\partial^3 v/\partial x^3=6a_4D=const.$ 即采用了常剪力假定，对于存在有均布惯性力的动力问题，常剪力假定是近似的假定，当单元数量合适时，精度是可以保证的。由式(7)可得

$$M=D\frac{\partial \beta_b}{\partial x}=D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{9}$$

$$Q=D\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \tag{10}$$

$$\beta_b=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{D}{C}\ \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \tag{11}$$

显然当薄梁时，$h\to 0$，$D/C\to 0$，$\beta_b=\partial v/\partial x$符合直法线假说。当厚梁时，考虑了剪切变形的影响。结点位移（自由度）与待定常数$\underset{\sim}{a}$的关系为

$$\underset{\sim}{v}_{e\,4\times 1}=\begin{Bmatrix} v_1 \\ \beta_{b_1}=\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{D}{C}\ \dfrac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_1 \\ v_2 \\ \beta_{b_2}=\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{D}{C}\ \dfrac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_2 \end{Bmatrix}=\underset{-}{L}_{4\times 4}\ \underset{\sim}{a}_{4\times 1} \tag{12}$$

将$\underset{\sim}{a}=\underset{-}{L}^{-1}\underset{\sim}{v}_e$代入式(8)得

$$v=\underset{\sim}{X}^T\underset{-}{L}^{-1}\underset{\sim}{v}_e \tag{13}$$

将式(9)代入式(1)，式(10)代入式(2)，式(11)代入式(4)，再将式(13)代入式(1)～

(4)，就可得到单元的刚度矩阵和单元的一致质量矩阵。

例如有一长细比为3.61，$I/AL^2=(0.08)^2$的自由厚梁，其泊松比为0.3，剪切系数$k=0.85$. 其前四阶振动特性的计算结果（表1中未列出振型，下同）与文献[2]Timoshenko梁理论的解析解作了百分误差比较。

表 1

单元数	总自由度数	1	2	3	4
7	16	0.47	2.04	4.86	6.96
13	28	0.14	0.62	1.51	2.20

2 厚/薄板的三角形动力有限元[3]

与厚/薄梁的通用单元相类似，采用常剪力单元。得出了九个自由度三角形板的通用单元，是结点自由度最少的通用单元。

两个纯弯曲转角为

$$\beta_x=\frac{\partial w}{\partial x}-\gamma_x=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{Q_x}{C} \tag{19a}$$

$$\beta_y=\frac{\partial w}{\partial y}-\gamma_y=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{Q_y}{C} \tag{20a}$$

式中w是垂直于中面的总线位移，$C=Ghk$，其中h为板厚，剪切系数取5/6. 显然，由于Q=const，则

$$M_x=D\left(\frac{\partial\beta_x}{\partial x}+\mu\frac{\partial\beta_y}{\partial y}\right)=D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{14}$$

$$M_y=D\left(\frac{\partial\beta_y}{\partial y}+\mu\frac{\partial\beta_x}{\partial x}\right)=D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{15}$$

$$M_{xy}=\frac{1}{2}(1-\mu)D\left(\frac{\partial\beta_x}{\partial y}+\frac{\partial\beta_y}{\partial x}\right)=(1-\mu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{16}$$

式中μ是泊松比，D是圆柱弯曲刚度。而

$$Q_x=\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}=D\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 w) \tag{17}$$

$$Q_y=\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}=D\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 w) \tag{18}$$

则

$$\beta_x=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{D}{C}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 w) \tag{19}$$

$$\beta_y=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{D}{C}\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 w) \tag{20}$$

当薄板时，$\lim\limits_{h\to 0} D/C=0$，符合Kirchhoff假设，因此通用于厚/薄板。

根据单元为三结点九自由度常剪力 Q_x与Q_y 的假定，位移函数w采用面积坐标的三次式，即

$$w=\underset{\sim}{H}^T\underset{\sim}{a} \tag{21}$$

式中

$$\underset{\sim}{H}^T=[\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3\ \ \eta_1^2\eta_2+\eta_0^3\ \ \eta_1^2\eta_3+\eta_0^3\ \ \eta_2^2\eta_1+\eta_0^3\ \ \eta_2^2\eta_3+\eta_0^3\ \ \eta_3^2\eta_1+\eta_0^3\ \ \eta_3^2\eta_2+\eta_0^3]$$

其中　$\eta_0^3=\frac{1}{2}\eta_1\eta_2\eta_3$,

$\underset{\sim}{a}=[a_1a_2\cdots a_9]^T$

由于单元的弯曲和剪切的应变能公式为

$$V_b=\frac{1}{2}\iint\left(M_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2M_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+M_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)dxdy \tag{22}$$

和

$$V_{sh}=\frac{1}{2}\iint\left(\frac{Q_x^2}{C}+\frac{Q_y^2}{C}\right)dxdy \tag{23}$$

而单元的平动和转动动能公式为

$$T_{tr}=\frac{1}{2}\iint\rho h\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2dxdy \tag{24}$$

和

$$T_{rot}=\frac{1}{2}\iint\rho I\left[\left(\frac{\partial\beta_x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta_y}{\partial t}\right)^2\right]dxdy \tag{25}$$

因此，要建立Cartesian坐标x，y与面积坐标η_i（$i=1,2,3$）及其一、二[1]和三阶导数的关系。本通用单元（式(17)～(20)）要用到w对x，y的四个三阶导数，现将三阶导数的关系列出如下：

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial y^3}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial x^2\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial x\partial y^2}\end{Bmatrix}_{4\times1}=\underset{-}{A}^3\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial^3}{\partial\eta_1^3}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial^3}{\partial\eta_3^2\partial\eta_2}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial^3}{\partial\eta_1\partial\eta_2\partial\eta_3}\end{Bmatrix}_{10\times1} \tag{26}$$

对两种坐标系中的一阶导数关系式连续用三次便可得矩阵$\underset{\sim}{A}^3$. 因三项之和的立方共有十项，矩阵$\underset{\sim}{A}^3$的阶为4×10，相应的w对面积坐标的三阶导数向量的阶为10×1.

三角形单元三个结点位移（自由度）由式(21)，(19)和(20)得到，

$$\underset{\sim 9\times1}{w_e}=[w_{e1}^T\ w_{e2}^T\ w_{e3}^T]^T_{9\times1}=\underset{9\times9}{\underset{\sim}{L}_3}\ \underset{\sim 9\times1}{a} \tag{27}$$

将式(27)代入式(21)，得

$$w=\underset{1\times9}{\underset{\sim}{H}^T}\ \underset{9\times9}{\underset{\sim}{L}_3^{-1}}\ \underset{9\times1}{\underset{\sim}{w}_e} \tag{28}$$

将两种坐标系一阶和二阶[1]导数关系式以及式(26)代入式(22)～(25)，然后再将式(28)代入. 可以求出单元的刚度矩阵和质量矩阵，其阶为9×9. 例如四边固支方板，取四分之一板计算，长边斜率为正的三角形划分单元，共十八个单元。当板厚h与边长a之比为0.002时，就是此种单元不计及剪切变形和转动惯性影响的经典有限单元解。第一阶频率的经典解析解[4]的降低系数，$h/a=0.1$时，文献[5]为0.88，本文为0.89，文献[6]为0.90；$h/a=0.2$时分别为0.69，0.73，0.74；$h/a=0.3$时，分别为0.55，0.57，0.60. 第二阶到六阶频率，$h/a=0.1$和0.2时，本文的计算结果比文献[6]低1～3%. 第七阶频率的降低系数，$h/a=0.1$时，本文计算结果为0.76；$h/a=0.2$时，为0.49. 第七阶振型在文献[4]中，以及引用它结果的其他文献中，均多了一条水平节线。

3 厚/薄板的矩形动力有限单元

假定剪力Q_x是y的线性函数，Q_y随x线性变化。得到了通用于薄板和中厚板的十二个自由度矩形有限单元，也是结点自由度最少的通用单元。由式(19a)和(20a)，M_x M_y的计算公式(14)和(15)仍成立，而

$$M_{xy}=\frac{1}{2}(1-\mu)D\left(\frac{\partial\beta_x}{\partial y}+\frac{\partial\beta_y}{\partial x}\right) \tag{29}$$

Q_x和Q_y的计算公式仍为式(17)和(18)，β_x和β_y也与式(19)和(20)相同。由于

$$\frac{\partial\beta_x}{\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{D}{C}\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\nabla^2 w) \tag{30}$$

$$\frac{\partial\beta_y}{\partial x}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{D}{C}\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\nabla^2 w) \tag{31}$$

因此，式(29)成为

$$M_{xy}=D(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{D}{C}\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\nabla^2 w)\right] \tag{29b}$$

根据剪力线性变化的假定，位移函数w只能选取坐标x和y的全三次式再加$a_{11}x^3y$和$a_{12}xy^3$，可以写为

$$w=\underset{\sim}{X}_4^T\underset{\sim}{a} \tag{32}$$

式中

$$\underset{\sim}{X}_4^T=[1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3$$

$$\underset{\sim}{a}=[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{11} \quad a_{12}]^T$$

弯曲应变能积分公式(22)应写成

$$V_b=\frac{1}{2}\iint\left[M_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+M_{xy}\left(\frac{\partial\beta_x}{\partial y}+\frac{\partial\beta_y}{\partial x}\right)+M_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]dxdy \tag{22b}$$

剪切应变能以及平动和转动能积分公式仍为式(23)～(25)。矩形单元四个结点位移由式(32)，(19)和(20)得到

$$\underset{\sim}{w}_{e\,12\times1}=[\underset{\sim}{w}_{e1}^T\ \underset{\sim}{w}_{e2}^T\ w_{e3}^T\ w_{e4}^T]^T_{12\times1}=\underline{L}_{4\,12\times12}\ \underset{\sim}{a}_{12\times1} \tag{27b}$$

将式(27b)代入式(32)，得到单元内位移w与结点位移的关系式，

$$w=\underset{\sim}{X}_4^T\underline{L}_4^{-1}\underset{\sim}{w}_e \tag{33}$$

将式(33)代入式(17)～(20)，并代入式(22b)，(23)～(25)，可以得到厚/薄板矩形单元的刚度和质量矩阵。例如四边固支方板，取四分之一板计算，共十六个单元。第一阶频率降低系数，$h/a=0.1$时为0.86，$h/a=0.2$时为0.73．第二阶到第六阶频率降低系数与常剪力三角形单元的计算结果相差±(1～3)%．

第三节内容收集在文献[3]中前，曾蒙周鸣鸿教授仔细审阅，并提出了宝贵意见，作者表示衷心的感谢。也要感谢89001部队龚克同志完成了该节中多个算例。

参 考 文 献

[1] 胡海昌．弹性力学的变分原理及其应用．北京：科学出版社，1981：488
[2] Huang T C. Journal of Applied Mechanics, 1961; 28(3):579
[3] Zhou Kejian, Gong Ke. Proceedings of the International Conference on Vibration Problems in Engineering. Du Qinghua, Xian Jiaotong Univ.,1986;214
[4] Young D. Journal of Applied Mechanics, 1950; 17 (2): 448
[5] 曹志远，杨昇田．厚板动力学理论及其应用．北京：科学出版社，1983：176
[6] 侯志坤．上海力学，1982；3(1)：31

The Dynamic Finite Element of Interchanged Thick/Thin Beams and Plates

Zhou Kejian

Abstract

In the paper we start with study of the dynamic finite element of interchanged thick/thin beams by using the displacement model. Then the triangle 9 DOF (degree of freedom) and rectangular 12 DOF dynamic finite elements of interchanged thick/thin plates are decided.

Key words: dynamic finite element,free vibration of plates, finite element