

样条函数康特诺维奇法在复合材料板 和圆柱曲板弯曲及线性 稳定性分析中的应用

徐后华 陈广南

(航天技术系)

摘要 样条函数康特诺维奇法是作者首先提出的一种结构数值计算方法。它实质上是一种离散形式的康特诺维奇法,将二维问题化为一维问题,使问题的自由度大幅度减少。在本文中,基于Mindlin假设,将样条函数康特诺维奇法应用于金属、复合材料单层板及圆柱曲板的弯曲及线性稳定性分析。

关键词 样条函数, 线性分析; Mindlin假设, 特征值问题

分类号 TV33

前 言

样条函数法是新近发展起来的一类结构分析数值方法,自1979年石钟慈^[1]首次提出样条有限元的概念至今,样条函数法不断发展和逐渐广泛应用。到目前为止已发展了样条有限元,样条有限条及有限层法,样条加权残数,样条边界元等结构静力、振动和稳定性分析方法^[2-6]。在以往的文献中,对静力问题位移函数的表达式,通常在 x, y 两个方向同时采用样条函数,或在一个方向采用样条函数而另一方向采用梁的振型函数,对振动和稳定问题,位移函数的表达式在一个方向上采用样条函数另一方向采用梁的振型函数。在文献^[7]中,首次提出了样条函数康特诺维奇法,并求解了复合材料板的弯曲问题,它实质上是一种离散形式的康特诺维奇法,能将二维问题化为一维问题,使问题的自由度大幅度减少。该法收敛快,精度高,且具备一般样条函数法的全部优点。在本文中,将样条函数康特诺维奇法推广到特征值问题,并基于Mindlin假设,对金属、复合材料单层板及圆柱曲板的弯曲及稳定性问题进行分析,是样条函数康特诺维奇法的进一步发展和应用。

1 公式推导

圆柱曲板的坐标系统及结点划分情况如图1所示。当半径 R 为无限大时, 圆柱曲板便退化为平板, 因此公式推导按圆柱曲板进行。位移假设为:

$$\left. \begin{aligned} u^* &= u(x, y) + z\theta_y(x, y) \\ v^* &= v(x, y) - z\theta_x(x, y) \\ w^* &= w(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $u, v, w, \theta_x, \theta_y$ 为中面位移及转角, 展开成三次 B 样条函数的线性组合。

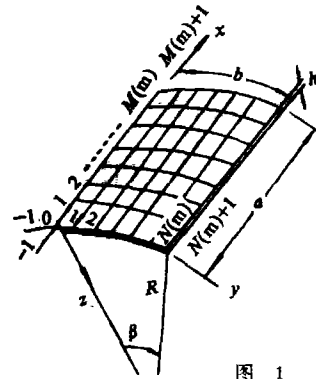


图 1

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{M_p} A_{1m}(x) B_{1m}(y) = \sum_{m=1}^{M_p} \left[\sum_{i=-1}^{M(m)+1} \alpha_{mi} \Phi_{im}^{(1)}(x) \right] \left[\sum_{i=-1}^{N(m)+1} \xi_{mi} \psi_{im}^{(1)}(y) \right] \\ &= \sum_{m=1}^{M_p} \{\alpha_m\}^T \{\Phi_{1m}\} \cdot \{\xi_m\}^T \{\psi_{1m}\} \\ v &= \sum_{m=1}^{M_p} A_{2m}(x) B_{2m}(y) = \sum_{m=1}^{M_p} \{\beta_m\}^T \{\Phi_{2m}\} \cdot \{\eta_m\}^T \{\psi_{2m}\} \\ w &= \sum_{m=1}^{M_p} A_{3m}(x) B_{3m}(y) = \sum_{m=1}^{M_p} \{\gamma_m\}^T \{\Phi_{3m}\} \cdot \{\zeta_m\}^T \{\psi_{3m}\} \\ \theta_x &= \sum_{m=1}^{M_p} A_{4m}(x) B_{4m}(y) = \sum_{m=1}^{M_p} \{L_m\}^T \{\Phi_{4m}\} \cdot \{\lambda_m\}^T \{\psi_{4m}\} \\ \theta_y &= \sum_{m=1}^{M_p} A_{5m}(x) B_{5m}(y) = \sum_{m=1}^{M_p} \{K_m\}^T \{\Phi_{5m}\} \cdot \{\mu_m\}^T \{\psi_{5m}\} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 $\{\alpha_m\}, \{\beta_m\}, \{\gamma_m\}, \{L_m\}, \{K_m\}$ 和 $\{\xi_m\}, \{\eta_m\}, \{\zeta_m\}, \{\lambda_m\}, \{\mu_m\}$ 为位移及转角在 x 和 y 方向上的系数列阵。 $\{\Phi_{im}\}, \{\psi_{im}\}$ 为 x, y 方向上的样条基函数列阵:

$$\left. \begin{aligned} \{\Phi_{im}\} &= [I]_i \{\varphi(x)\} \\ \{\psi_{im}\} &= [J]_i \{\varphi(y)\} \end{aligned} \quad (i=1, 2, \dots, 5) \right\} \quad (3)$$

上式中: $\varphi(x), \varphi(y)$ 为三次 B 样条函数列阵, $[I]_i, [J]_i$ 为 x 和 y 方向上的边界条件及内部约束条件参数矩阵, 具体形式为:

总势能 Π 为应变能 U 与外力势能 W 之和:

$$\Pi = U + W = \iiint_V \{\varepsilon\}^T [Q] \{\varepsilon\} dV - \iint_S (P_x u^* + P_y v^* + P_z w^*) ds \quad (7)$$

设三次 B 样条函数的积分矩阵为:

$$\begin{aligned} F_{mn} &= \int_0^a \{\varphi(x)\}_{M^{(m)+3}} \{\varphi(x)\}_{M^{(n)+3}}^T dx \\ F_{mn}^* &= \int_0^b \{\varphi(y)\}_{N^{(m)+3}} \{\varphi(y)\}_{N^{(n)+3}}^T dy \\ G_{mn} &= \int_0^a \{\varphi'(x)\}_{M^{(m)+3}} \{\varphi'(x)\}_{M^{(n)+3}}^T dx \\ G_{mn}^* &= \int_0^b \{\varphi'(y)\}_{N^{(m)+3}} \{\varphi'(y)\}_{N^{(n)+3}}^T dy \\ R_{mn} &= \int_0^a \{\varphi'(x)\}_{M^{(m)+3}} \{\varphi'(x)\}_{M^{(n)+3}}^T dx \\ R_{mn}^* &= \int_0^b \{\varphi'(y)\}_{N^{(m)+3}} \{\varphi'(y)\}_{N^{(n)+3}}^T dy \\ Q_{mn} &= \int_0^a \{\varphi'(x)\}_{M^{(m)+3}} \{\varphi(x)\}_{M^{(n)+3}}^T dx \\ Q_{mn}^* &= \int_0^b \{\varphi'(y)\}_{N^{(m)+3}} \{\varphi(y)\}_{N^{(n)+3}}^T dy \end{aligned} \quad (8)$$

将 (1), (5), (6) 式代入 (7) 式, 可得总势能 Π 的具体表达式。由于系数 $\alpha_m, \beta_m, \dots, \mu_m$ 相互独立, 根据最小势能原理, Π 对它们的变分皆为零。由 Π 对 $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m, L_m, K_m$ 分别变分为零可得 (9) 式, Π 对 $\xi_m, \eta_m, \zeta_m, \lambda_m, \mu_m$ 分别变分为零可得 (10) 式。

$$[K_x(\xi_m, \eta_m, \zeta_m, \lambda_m, \mu_m)] \{\delta x\} = \{P_x(\xi_m, \eta_m, \zeta_m)\} \quad (9)$$

$$[K_y(\alpha_m, \beta_m, \gamma_m, L_m, K_m)] \{\delta y\} = \{P_y(\alpha_m, \beta_m, \gamma_m)\} \quad (10)$$

其中 $\{\delta x\}, \{\delta y\}$ 分别是 x, y 方向上的位移系数、转角系数列阵, $[K_x], [K_y]$ 为刚度矩阵, $\{P_x\}, \{P_y\}$ 为相应的载荷列阵。(9), (10) 式为弯曲问题的基本方程。

根据稳定性问题的 Euler 方法, 如果在物体原始平衡位形很邻近的区域存在另一平衡位形, 则原始平衡是不稳定的。考虑一带初始应力的物体, 其初应力为 $K\sigma_i^{(0)}$, 在应力边界上受面力 $K F_i^{(0)}$ 作用, K 是单调递增因子。当 K 很小时物体是稳定的, 随着 K 增加到一定值物体达到不稳定的临界状态。在线性稳定性分析中, 把物体的临界状态作为原始平衡状态, $K\sigma_i^{(0)}$ 为临界应力, $K F_i^{(0)}$ 为临界载荷。建立邻近区域内的另一平衡状态的平衡方程, 从而得出稳定问题的控制方程。在一般曲线坐标系下的控制方程^[11]为:

$$\delta \iiint_V [\tau^{\lambda\mu} L_{\lambda\mu} + K \tau^{(0)\lambda\mu} v_{k;\lambda} v^k_{;\mu}] dV = 0 \quad (11)$$

在图 1 坐标系下, 上式具体化为:

$$\begin{aligned} \delta \iiint_V \left[\tau^{\lambda\mu} \varepsilon_{\lambda\mu} + K \left(\sigma^{(0)\lambda\mu} u_{k;\lambda} u^k_{;\mu} + 2\tau_{yz}^{(0)} v^* \frac{w^*_{,z}}{R(z)} \right. \right. \\ \left. \left. + 2\sigma_{yz}^{(0)} v^* \frac{w^*_{,y}}{R(z)} - 2\tau_{xz}^{(0)} v^* \frac{w^*_{,x}}{R(z)} + \sigma_{yy}^{(0)} \frac{v^{*2}}{R^2(z)} \right) \right] dx dy dz = 0 \quad (12) \end{aligned}$$

$$\text{或写成 } \delta(2U + KG) = 0 \tag{13}$$

其中 U 为失稳时产生的应变能, G 相当于初应力势能。将 (1) 式代入 (13) 式, 计算出 $(2U + KG)$ 对位移及转角系数的变分。由于这些位移及转角系数相互独立, 故对它们的变分皆为零。 $(2U + KG)$ 对 $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m, L_m, K_m$ 变分为零得 (14) 式, $(2U + KG)$ 对 $\xi_m, \eta_m, \zeta_m, \lambda_m, \mu_m$ 的变分为零可得 (15) 式。

$$(2[K_x] + K[G_x])\{\delta_x\} = 0 \tag{14}$$

$$(2[K_y] + K[G_y])\{\delta_y\} = 0 \tag{15}$$

其中 $[G_x], [G_y]$ 为几何刚度矩阵, K 为特征值。(14), (15) 为线性稳定性问题的基本方程。

弯曲或稳定问题的基本方程按照广义康特诺维奇法迭代求解, 即先给出某方向, 如 x 方向上的位移及转角系数的初始值 $\{\delta_x\}$ 代入 (10) 或 (15) 式, 求出另一方向上的位移及转角系数 $\{\delta_y\}$ 代入 (9) 或 (14) 式求出 $\{\delta_x\}$, 如此进行迭代, 直到所求的挠度或特征值收敛到要求的精度。

2 数值计算

1 金属平板弯曲

金属平板为四边简支和四边固支的方板, 承受均布载荷, 结果与厚板解, 经典解, 有限元解比较, 见表 1。

表 1 简支、固支方板中心挠度系数 $\alpha = \frac{\omega_{\max} E h^3}{q_0 a^4} (v=0.3)$

h/a	简 支				固 支			
	本文	有限元 ^[10]	厚板解 ^[10]	经典解	本文	有限元 ^[10]	厚板解 ^[10]	经典解
0.01	0.04440	0.04438	0.04439	0.04437	0.01390	0.0137		0.0138
0.10	0.04621	0.04628	0.04632	0.04437	0.01597	0.0180	0.01634	0.0138
0.20	0.05191	0.05202	0.05217	0.04437	0.02267	0.0221	0.02331	0.0138
0.30	0.06141	0.06180	0.06192	0.04437	0.03180	0.0320		0.0138
0.40	0.07471	0.07500	0.07557	0.04437	0.04524	0.0455		0.0138

2 金属圆柱壳层顶在自重作用下变形

如图 2 所示, 金属层顶两边简支, 两边自由。几何尺寸及材料常数为: $h = 0.25\text{m}, a = 50\text{m}, R = 25\text{m}, \beta = 80^\circ$, 自重 $q_0 = 3.6\text{kg/m}^2, E = 4.32 \times 10^6 \text{ kN/m}^2, \mu = 0$

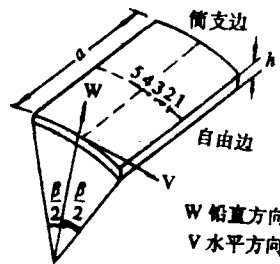


图 2

表 2 圆柱壳层顶在自重作用下变形

	W					V				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
本文	-0.3121	-0.1984	-0.0789	0.0128	0.0473	-0.1653	-0.0858	-0.0296	-0.0041	0
有限元 ^[10]	-0.301	-0.190	-0.078	0.012	0.045	-0.160	-0.082	-0.028	-0.004	0

3 复合材料平板弯曲

复合材料单层方板纤维沿 x 方向铺设, 四边简支, 承受均布载荷, 对不同的厚度进行计算。 $a=b=100$; $E_L=40 \times 10^6$; $E_T=1 \times 10^6$; $G_{LT}=0.5 \times 10^6$; $G_{TT}=0.2 \times 10^6$; $\nu_{LT}=\nu_{TT}=0.25$.

表 3 复合材料单层板中心挠度

h	1	3	5	10	20
本文	0.41783	1.6242×10^{-2}	3.8482×10^{-3}	6.7693×10^{-4}	1.7808×10^{-4}
经典 ^[8]	0.41060	1.5207×10^{-2}	3.2848×10^{-3}	4.1060×10^{-4}	5.1325×10^{-5}
(本文/经典-1) $\times 100$	1.712	6.806	17.15	64.86	246.9

4 金属板单向压缩

金属板四边简支, 在 x 方向受均匀轴压。计算时假设初应力 $\sigma_x^{(0)}$ 在板内均匀分布。

表 4 简支矩形板临界应力系数 $k=\sigma_{cr} b^2 h / \pi^2 D$, $\gamma=0.3$, $h/b=0.01$

a/b	0.2	0.5	1.0	1.5	2.0	$\sqrt{6}$
本文	26.8206	6.2417	4.0000	4.3370	3.9988	4.1650
经典 ^[9]	27.04	6.25	4	4.3402	4	4.1667
纵向半波数	1	1	1	2	2	2

5 金属曲板单轴压缩

金属曲板四边简支, 在 x 方向单向受压。计算时假设 $\sigma_x^{(0)}$ 在曲板内均匀分布。

表 5 金属圆柱曲板临界应力 σ_{cr} , $R=100$, $h=1$, $a=R\beta$

β	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{\pi}{15}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$
本文	1.3640×10^4	8.4677×10^3	5.7318×10^3	5.7693×10^3
经典解 ^[9]	1.3958×10^4	8.6111×10^3	5.8333×10^3	5.7735×10^3
纵向半波数	1	1	1	1

6 复合材料单层板单向压缩

复合材料单层板四边简支，纤维沿 x 方向铺设，在 x 方向单向受压，对不同厚度进行计算。 $E_L=30 \times 10^6$ ； $E_T=0.75 \times 10^6$ ； $G_{LT}=0.375 \times 10^6$ ； $G_{TT}=0.3 \times 10^6$ ； $V_{LT}=V_{TT}=0.25$ ； $a=b=100$ 。

表 6 复合材料单层板单向变压临界应力 σ_{cr}

h	1	2	3	4
本文	2.6698×10^3	1.0472×10^4	2.2826×10^4	3.8884×10^4
经典解 ^[8]	2.6873×10^3	1.0749×10^4	2.4186×10^4	4.2997×10^4
本文/经典	0.9935	0.9742	0.9438	0.9043

7 复合材料圆柱曲板单向压缩

复合材料单层圆柱曲板四边简支，在 x 方向受压，就不同的纤维铺设角 θ （与 x 轴夹角）计算。结果表明最大临界应力发生在 $\theta = 45^\circ$ 左右。材料常数与上例相同，几何尺寸为： $R=100$ ， $\beta = \pi/10$ ， $a=R\beta$ 。

表 7 复合材料单层曲板临界应力

θ	0°	30°	45°	60°	75°
σ_{cr}	2.7851×10^4	5.4982×10^4	6.2046×10^4	4.9847×10^4	3.0015×10^4

3 结 论

通过以上的数值计算证明：

(1) 样条函数康特诺维奇法不仅能适用于解微分方程边值问题，而且也适用于特征值问题求解。该法能使二维问题化为一维问题求解。故大大地减少了问题的总自由度和计算工作量。虽然该法要经过迭代才能获得最后结果，但自由度增加时，计算量要成指数地增加，所以总工作量还是要少得多。例如设一维问题的自由度数为 M ，则二维问题为 M^2 ，若计算量与自由度数平方成正比，样条函数康特诺维奇法的迭代次数为 3，则一维问题与二维问题计算量之比大致为 $(M^2)^2/3M^2 = M^2/3$ 。对自由度数较大的问题，这确实是一个很高的比率。

(2) 理论上只要假设自变函数取足够多的项和经过足够多次的迭代，总能逼近正确解，事实上对能分离变量的问题取一级近似 ($MP=1$) 就可获得与精确解一样的结果（若不考虑计算误差），对一般问题只需取 $MP=2, 3$ 即可。结点划分一般沿 x, y 方向取 5, 6 等分。样条函数康特诺维奇法收敛快，精度高，经三、四次迭代前后两次结果相差便在 $1/10000$ 以内。

(3) 该法能方便地处理各种边界条件，并且平板曲板通用。在此之前对结构的振

动与稳定分析的样条函数方法,是将位移表示成样条函数与梁的振型函数乘积的形式,因而缺乏灵活处理边界条件的能力。

(3) 计算表明横向剪切变形对复合材料板的弯曲及临界载荷影响显著,因此在复合材料板壳分析中应充分重视。

参 考 文 献

- [1] 石钟慈. 样条有限元. 计算数学, 1979; 1(1)
- [2] 何广乾. 等样条函数法在板壳中应用. 建筑结构学报, 1981; (2)
- [3] 王建国. 样条函数法解圆柱壳问题. 土木工程学报, 1984; 17(2)
- [4] 张佑启等. 结构分析样条有限条法. 中山大学计算机科学系印
- [5] 秦霖. 结构力学的样条函数法. 广西人民出版社, 1985
- [6] 蒋咏秋. 用样条元分析纤维增强复合材料复合薄板的弯曲. 第四届全国复合材料学术会议文集, 1986
- [7] 何广南, 徐后华. 样条函数康特诺维奇法在复合材料板弯曲问题中的应用. 第四届全国复合材料学术会议文集, 1986
- [8] R·M·琼斯. 复合材料力学. 上海科技出版社, 1981
- [9] 铁摩辛柯. 弹性稳定理论. 科学出版社, 第2版, 1965
- [10] 陶贻权等. 弹性和塑性力学中的有限单元法. 机械工业出版社, 1981
- [11] 何广南. 用样条有限元法和样条函数康特诺维奇法对复合材料板和圆柱曲板的弯曲线性稳定性分析. 国防科技大学航天技术系硕士论文, 1987

The Application of Spline Kantorovich Method in Bending and Linear Stability Analysis of Anisotropic Plates and Cylindrical Shells

Xu Houhua Chen Guangnan

Abstract

Spline Kantorovich method is a numerical method for structural analysis which is lately put forward. It is essentially a discrete kantorovich method. This method can transfer two-dimensional problems to one-dimensional problems

and reduce the total number of unknowns greatly. In this paper, based on the Mindlin assumption, spline kantorovich method is applied to bending and linear stability analysis of isotropic or anisotropic plates and cylindrical shells.

Key words: spline function, linear analysis; Mindlin assumption, problems of eigenvalue