

一种采用应力分离法 的杂交/混合板壳单元

张国安 洪志泉

(航天技术系)

摘要 本文利用一种采用应力分离法的杂交/混合板壳有限元模型分析板壳结构静力学问题。分析表明,该元素在总体水平上没有多余零能模式。而且,该元素通过了薄板的闭锁试验,对薄壳算例也没有观察到闭锁现象。与参考解相比,该元素对各种壳结构均能适用,且收敛性较好,精度也较高。

关键词 闭锁;零能模式,杂交/混合板壳单元

分类号 TV33

引言

退化壳元素虽然忽略了厚度方向的正应力与正应变,但考虑了横向剪切变形,因而可以有一定的厚度适用范围。

Cook^[1]的8节点Serendipity退化壳位移元素用 2×2 降阶 Gauss 积分以避免闭锁,并针对具体问题引入3至5个内部自由度可以使结果得到改善,这些做法却引入了多余零能模式。可以在与内部自由度相对应的元素刚度矩阵对角线系数上乘以一个修正值以消除多余零能模式,但这种做法带有盲目性,因为没有一般结论。

9节点Lagrange退化壳元素在描述壳几何方面更为精确。Belytschko等^[2]指出,使用 2×2 降阶 Gauss 积分可以得到不闭锁的薄壳解,但却带来了多余零能模式^[3]。文献^[4]就构造了一个控制多余零能模式的9节点Lagrange板元素。

既能消除多余零能模式,又能克服闭锁的一般方法是采用杂交/混合公式。

本文基于Hellinger-Reissner原理,构造一个假定应力9节点Lagrange退化壳杂交/混合元素。该元素中,应力场被分成高阶与低阶两部分,大大减少了计算工作量。考虑到公式的简化,不相容位移取为零。

1 有限元列式

一个退化壳杂交/混合元素的Hellinger-Reissner泛函为

$$\pi_{Re} = \int_{V_e} \left[\underline{\underline{\sigma}}^T (\underline{\underline{D}} \underline{\underline{u}}) - \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}^T \underline{\underline{S}} \underline{\underline{\sigma}} \right] dV - W_0 \quad (1)$$

其中, W_0 代表外力功, 下标(\sim)代表矩阵记号。 $\underline{\underline{\sigma}}$ 是应力行向量, $\underline{\underline{u}}$ 是位移行向量, $\underline{\underline{D}}$ 是几何方程微分算子, $\underline{\underline{S}}$ 是柔度矩阵, V_e 是元素体积, π_{Re} 是泛函记号。下同。

为了使最后导出的元素刚度矩阵公式不过于复杂, 不相容位移取为零。于是

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{q}} \quad (2)$$

$$\underline{\underline{D}} \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{q}} \quad (2a)$$

其中, $\underline{\underline{q}}$ 是元素节点位移自由度。

在壳的局部坐标系中, 应变可分为面内、弯曲和横向剪切三部分 $\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{k}}$, $\underline{\underline{\gamma}}$, 即

$$\underline{\underline{D}} \underline{\underline{u}} = \begin{Bmatrix} \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\zeta}} \underline{\underline{k}} \\ \underline{\underline{\gamma}} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

相应地, 应力场假定为

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{Bmatrix} \underline{\underline{\sigma}}_p + \underline{\underline{\zeta}} \underline{\underline{\sigma}}_b \\ \underline{\underline{\sigma}}_s \end{Bmatrix} \quad (4)$$

其中, $\underline{\underline{\zeta}}$ 是厚度方向的参数坐标。

把(4)式和(3)式代入(1)式, 注意到对各向同性材料问题, 有关 $\underline{\underline{\zeta}}$ 一次项的积分为零, 于是

$$\begin{aligned} \pi_{Re} = & \int_{V_e} \left(\underline{\underline{\sigma}}_p^T \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}_p^T \underline{\underline{S}}_1 \underline{\underline{\sigma}}_p \right) dV \\ & + \int_{V_e} \underline{\underline{\zeta}}^2 \left(\underline{\underline{\sigma}}_b^T \underline{\underline{k}} - \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}_b^T \underline{\underline{S}}_1 \underline{\underline{\sigma}}_b \right) dV \\ & + \int_{V_e} \left(\underline{\underline{\sigma}}_s^T \underline{\underline{\gamma}} - \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}_s^T \underline{\underline{S}}_2 \underline{\underline{\sigma}}_s \right) dV - W_0 \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\underline{\underline{S}}_1$ 代表面内柔度矩阵, $\underline{\underline{S}}_2$ 代表横向剪切柔度矩阵。

把应力场分为低阶应力场与高阶应力场之和, 即

$$\underline{\underline{\sigma}}_p = \underline{\underline{\sigma}}_{pL} + \underline{\underline{\sigma}}_{pH} \quad (6)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_b = \underline{\underline{\sigma}}_{bL} + \underline{\underline{\sigma}}_{bH} \quad (7)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_s = \underline{\underline{\sigma}}_{sH} + \underline{\underline{\sigma}}_{sL} \quad (8)$$

其中, 低阶应力场与(3)式的应变在低阶Gauss积分点处满足物理方程, 即

$$\underline{\sigma}_{pL} = \underline{C}_1 \sum_{i=1}^{n_L} \underline{N}_i(\xi, \eta) \underline{e}_i \quad (9)$$

$$\underline{\sigma}_{bL} = \underline{C}_1 \sum_{i=1}^{n_L} \underline{N}_i(\xi, \eta) \underline{k}_i \quad (10)$$

$$\underline{\sigma}_{sL} = \underline{C}_2 \sum_{i=1}^{n_L} \underline{N}_i(\xi, \eta) \underline{\gamma}_i \quad (11)$$

其中, \underline{e}_i , \underline{k}_i , $\underline{\gamma}_i$ 是(3)式的应变在低阶Gauss积分点的值, n_L 是低阶Gauss积分点数。

\underline{C}_1 , \underline{C}_2 分别是 \underline{S}_1 , \underline{S}_2 的逆矩阵。二维插值函数 $\underline{N}_i(\xi, \eta)$ 在第 i 低阶Gauss积分点为

1, 在其它低阶Gauss积分点为零。

高阶应力场由应力参数表出

$$\underline{\sigma}_{pH} = \underline{P}_e \cdot \underline{\alpha} \quad (12)$$

$$\underline{\sigma}_{bH} = \underline{P}_k \cdot \underline{\beta}_k \quad (13)$$

$$\underline{\sigma}_{sH} = \underline{P}_s \cdot \underline{\beta} \quad (14)$$

其中 $\underline{P}_e(\xi, \eta)$, $\underline{P}_k(\xi, \eta)$, $\underline{P}_s(\xi, \eta)$ 是比 $\underline{N}_i(\xi, \eta)$ 更高阶的关于面内参数坐标 ξ , η 的函数, 而 $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}_k$ 和 $\underline{\beta}$ 是应力参数。

比较(2a)式与(3)式, 可得

$$\underline{e} = \underline{B}_e \underline{q} \quad (15)$$

$$\underline{k} = \underline{B}_k \underline{q} \quad (16)$$

$$\underline{\gamma} = \underline{B}_s \underline{q} \quad (17)$$

把(6), (7), (8)式代入(5)式, 可得

$$\begin{aligned} \pi_{R^*} = & \int_{V_e} \left(\underline{\sigma}_{pL}^T \underline{e} - \frac{1}{2} \underline{\sigma}_{pL}^T \underline{S}_1 \underline{\sigma}_{pL} \right) dV \\ & + \int_{V_e} \underline{\sigma}_{pH}^T \underline{e} dV - \int_{V_e} \underline{\sigma}_{pH}^T \underline{S}_1 \underline{\sigma}_{pL} dV \\ & - \frac{1}{2} \int_{V_e} \underline{\sigma}_{pH}^T \underline{S}_1 \underline{\sigma}_{pH} dV \\ & + \int_{V_e} \zeta^2 \left(\underline{\sigma}_{bL}^T \underline{k} - \frac{1}{2} \underline{\sigma}_{bL}^T \underline{S}_1 \underline{\sigma}_{bL} \right) dV \\ & + \int_{V_e} \zeta^2 \underline{\sigma}_{bH}^T \underline{k} dV - \int_{V_e} \zeta^2 \underline{\sigma}_{bH}^T \underline{S}_1 \underline{\sigma}_{bL} dV \\ & - \frac{1}{2} \int_{V_e} \zeta^2 \underline{\sigma}_{bH}^T \underline{S}_1 \underline{\sigma}_{bH} dV \\ & + \int_{V_e} \left(\underline{\sigma}_{sL}^T \underline{\gamma} - \frac{1}{2} \underline{\sigma}_{sL}^T \underline{S}_2 \underline{\sigma}_{sL} \right) dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{V_e} \underline{\underline{\sigma}}_{pH}^T \underline{\underline{\gamma}} dV - \int_{V_e} \underline{\underline{\sigma}}_{sH}^T \underline{\underline{S}}_2 \underline{\underline{\sigma}}_{sL} dV \\
& - \frac{1}{2} \int_{V_e} \underline{\underline{\sigma}}_{sH}^T \underline{\underline{S}}_2 \underline{\underline{\sigma}}_{sH} dV - W_0
\end{aligned} \quad (18)$$

在式(18)的各积分式中,对包含 $\underline{\underline{\sigma}}_{pL}$, $\underline{\underline{\sigma}}_{bL}$, $\underline{\underline{\sigma}}_{sL}$ 的有关各积分式用低阶 Gauss 积分计算,以“ \int_L ”记之,其他各积分式用高阶 Gauss 积分计算,以“ \int_H ”记之。这样,(18)式变为

$$\begin{aligned}
\pi_{Re} = & \int_L \left(\underline{\underline{\sigma}}_{pL}^T \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}_{pL}^T \underline{\underline{S}}_1 \underline{\underline{\sigma}}_{pL} \right) dV \\
& + \int_H \underline{\underline{\sigma}}_{pH}^T \underline{\underline{\varepsilon}} dV - \int_L \underline{\underline{\sigma}}_{pH}^T \underline{\underline{S}}_1 \underline{\underline{\sigma}}_{pL} dV \\
& - \frac{1}{2} \int_H \underline{\underline{\sigma}}_{pH}^T \underline{\underline{S}}_1 \underline{\underline{\sigma}}_{pH} dV \\
& + \int_L \xi^2 \left(\underline{\underline{\sigma}}_{bL}^T \underline{\underline{k}} - \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}_{bL}^T \underline{\underline{S}}_1 \underline{\underline{\sigma}}_{bL} \right) dV \\
& + \int_H \xi^2 \underline{\underline{\sigma}}_{bH}^T \underline{\underline{k}} dV - \int_L \xi^2 \underline{\underline{\sigma}}_{bH}^T \underline{\underline{S}}_1 \underline{\underline{\sigma}}_{bL} dV \\
& - \frac{1}{2} \int_H \xi^2 \underline{\underline{\sigma}}_{bH}^T \underline{\underline{S}}_1 \underline{\underline{\sigma}}_{bH} dV \\
& + \int_L \left(\underline{\underline{\sigma}}_{sL}^T \underline{\underline{\gamma}} - \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}_{sL}^T \underline{\underline{S}}_2 \underline{\underline{\sigma}}_{sL} \right) dV \\
& + \int_H \underline{\underline{\sigma}}_{sH}^T \underline{\underline{\gamma}} dV - \int_L \underline{\underline{\sigma}}_{sH}^T \underline{\underline{S}}_2 \underline{\underline{\sigma}}_{sL} dV \\
& - \frac{1}{2} \int_H \underline{\underline{\sigma}}_{sH}^T \underline{\underline{S}}_2 \underline{\underline{\sigma}}_{sH} dV - W_0
\end{aligned} \quad (19)$$

在低阶积分点,注意到(9)、(10)和(11)式,以及 $\underline{\underline{S}}_1$, $\underline{\underline{S}}_2$ 分别与 $\underline{\underline{C}}_1$, $\underline{\underline{C}}_2$ 互逆,因此

$$\begin{aligned}
\pi_{Re} = & \frac{1}{2} \int_L \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{C}}_1 \underline{\underline{\varepsilon}} dV + \int_H \underline{\underline{\sigma}}_{pH}^T \underline{\underline{\varepsilon}} dV \\
& - \int_L \underline{\underline{\sigma}}_{pH}^T \underline{\underline{\varepsilon}} dV \\
& - \frac{1}{2} \int_H \underline{\underline{\sigma}}_{pH}^T \underline{\underline{S}}_1 \underline{\underline{\sigma}}_{pH} dV \\
& + \int_L \frac{1}{2} \xi^2 \underline{\underline{k}}^T \underline{\underline{C}}_1 \underline{\underline{k}} dV \\
& + \int_H \xi^2 \underline{\underline{\sigma}}_{bH}^T \underline{\underline{k}} dV - \int_L \xi^2 \underline{\underline{\sigma}}_{bH}^T \underline{\underline{k}} dV
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_H \zeta^2 \widetilde{\sigma}_{bH}^T S_1 \widetilde{\sigma}_{sH} dV \\
& + \frac{1}{2} \int_L \widetilde{\gamma}^T C_1 \widetilde{\gamma} dV + \int_H \widetilde{\sigma}_{sH}^T \widetilde{\gamma} dV - \int_L \widetilde{\sigma}_{sH}^T \widetilde{\gamma} dV \\
& - \frac{1}{2} \int_H \widetilde{\sigma}_{sH}^T S_2 \widetilde{\sigma}_{sH} dV - W_0
\end{aligned} \quad (20)$$

把(12)~(17)式代入(20)式, 可得

$$\begin{aligned}
\pi_{re} &= \frac{1}{2} \widetilde{q}^T \widetilde{K}_p \widetilde{q} + \frac{1}{2} \widetilde{q}^T \widetilde{K}_b \widetilde{q} + \frac{1}{2} \widetilde{q}^T \widetilde{K}_s \widetilde{q} \\
& + \widetilde{\alpha}^T \widetilde{G}_e \widetilde{q} - \frac{1}{2} \widetilde{\alpha}^T \widetilde{H}_e \widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}_\kappa^T \widetilde{G}_\kappa \widetilde{q} \\
& - \frac{1}{2} \widetilde{\beta}_\kappa^T \widetilde{H}_\kappa \widetilde{\beta}_\kappa + \widetilde{\beta}^T \widetilde{G}_\gamma \widetilde{q} \\
& - \frac{1}{2} \widetilde{\beta}^T \widetilde{H}_\gamma \widetilde{\beta} - W_0
\end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$\widetilde{K}_p = \int_L \widetilde{B}_c^T C_1 \widetilde{B}_c dV \quad (21a)$$

$$\widetilde{K}_b = \int_L \zeta^2 \widetilde{B}_\kappa C_1 \widetilde{B}_\kappa dV \quad (21b)$$

$$\widetilde{K}_s = \int_L \widetilde{B}_s^T C_2 \widetilde{B}_s dV \quad (21c)$$

$$\widetilde{G}_e = \int_H \widetilde{P}_c^T \widetilde{B}_c dV - \int_L \widetilde{P}_c^T \widetilde{B}_c dV \quad (21d)$$

$$\widetilde{H}_e = \int_H \widetilde{P}_c^T S_1 \widetilde{P}_c dV \quad (21e)$$

$$\widetilde{G}_\kappa = \int_H \zeta^2 \widetilde{P}_\kappa^T \widetilde{B}_\kappa dV - \int_L \zeta^2 \widetilde{P}_\kappa^T \widetilde{B}_\kappa dV \quad (21f)$$

$$\widetilde{H}_\kappa = \int_H \zeta^2 \widetilde{P}_\kappa^T S_1 \widetilde{P}_\kappa dV \quad (21g)$$

$$\widetilde{G}_\gamma = \int_H \widetilde{P}_s^T \widetilde{B}_s dV - \int_L \widetilde{P}_s^T \widetilde{B}_s dV \quad (21h)$$

$$\widetilde{H}_\gamma = \int_H \widetilde{P}_s^T S_2 \widetilde{P}_s dV \quad (21i)$$

令 π_{re} 取驻值, 即

$$\delta \pi_{re} = 0 \quad (22)$$

(21)式分别对 $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}_\kappa$, $\widetilde{\beta}$ 取变分, 可得

$$\underline{\underline{G}}_e \underline{\underline{q}} - \underline{\underline{H}}_e \underline{\underline{\alpha}} = 0; \quad \underline{\underline{G}}_x \underline{\underline{q}} - \underline{\underline{H}}_x \underline{\underline{\beta}}_x = 0; \quad \underline{\underline{G}}_y \underline{\underline{q}} - \underline{\underline{H}}_y \underline{\underline{\beta}} = 0$$

由此可得

$$\underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{H}}_e^{-1} \underline{\underline{G}}_e \underline{\underline{q}} \tag{23}$$

$$\underline{\underline{\beta}}_x = \underline{\underline{H}}_x^{-1} \underline{\underline{G}}_x \underline{\underline{q}} \tag{24}$$

$$\underline{\underline{\beta}} = \underline{\underline{H}}_y^{-1} \underline{\underline{G}}_y \underline{\underline{q}} \tag{25}$$

把(23)、(24)、(25)式代回到(21)式，可得

$$\pi_{Re} = \frac{1}{2} \underline{\underline{q}}^T \underline{\underline{K}}^e \underline{\underline{q}} - \underline{\underline{q}}^T \underline{\underline{Q}} \tag{26}$$

其中，元素刚度矩阵

$$\underline{\underline{K}}^e = \underline{\underline{G}}_e^T \underline{\underline{H}}_e^{-1} \underline{\underline{G}}_e + \underline{\underline{G}}_x^T \underline{\underline{H}}_x^{-1} \underline{\underline{G}}_x + \underline{\underline{G}}_y^T \underline{\underline{H}}_y^{-1} \underline{\underline{G}}_y + \underline{\underline{K}}_p + \underline{\underline{K}}_b + \underline{\underline{K}}_s \tag{27}$$

而外力功

$$\underline{\underline{q}}^T \underline{\underline{Q}} = W_0 \tag{28}$$

$\underline{\underline{Q}}$ 为等效节点载荷。

2 元素构造与分析

1 几何形状

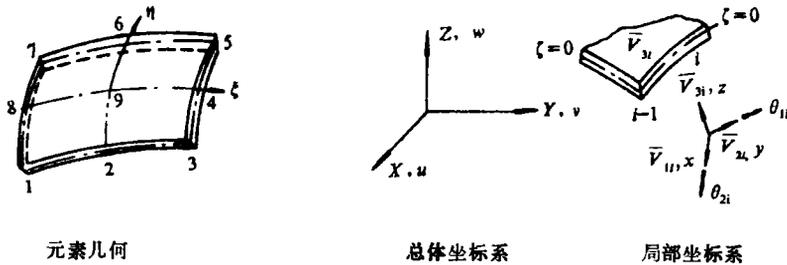


图 1 9 节点 Lagrange 退化壳元素

如图 1 所示，总体坐标系中元素几何为

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \left(\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \frac{\xi t_i}{2} \underline{\underline{n}}_{3i} \right) \tag{29}$$

其中， x_i, y_i, z_i 是 i 节点的总体坐标， ξ, η, ζ 是与总体坐标对应的参数坐标， t_i 是节点 i 处的壳体厚度， $\underline{\underline{n}}_{3i}$ 是 i 节点处的壳体中面单位法向矢量。 $N_i(\xi, \eta)$ 是二维 9 节点 Lagrange 插值函数，其具体形式为

$$N_i = \frac{1}{4} (\xi^2 + \xi_i \xi) (\eta^2 + \eta_i \eta) \quad i = 1, 3, 5, 7$$

$$N'_i = \frac{1}{2} \xi_i^2 (\xi^2 + \xi_i \xi) (1 - \eta^2) \\ + \frac{1}{2} \eta_i^2 (\eta^2 + \eta_i \eta) (1 - \xi^2) \quad i=2, 4, 6, 8 \\ N'_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

元素节点序号见图1.

2 位移场

总体坐标系中, 位移为

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^9 N'_i(\xi, \eta) \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \frac{\xi \xi_i}{2} [n_{1i} - n_{2i}] \cdot \begin{Bmatrix} \theta_{1i} \\ \theta_{2i} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

其中, u_i, v_i, w_i 是 i 节点的总体位移, $\tilde{n}_{1i}, \tilde{n}_{2i}$ 是 i 节点处局部坐标系基矢量, $N'_i(\xi, \eta)$ 与上面相同, θ_{1i}, θ_{2i} 分别是 \tilde{n}_{3i} 在变形后关于 \tilde{n}_{2i} 和 \tilde{n}_{1i} 的转角.

根据上述位移场, 一个节点有 5 个自由度

$$\tilde{\delta}_i = \{u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{1i} \ \theta_{2i}\}^T \quad (31)$$

这样, 一个 9 节点 Lagrange 元素有 45 个自由度

$$\tilde{q} = \{\tilde{\delta}_1 \ \tilde{\delta}_2 \ \dots \ \tilde{\delta}_9\}^T \quad (32)$$

3 应变

仅保留 ξ 的一次项, 可得应变

$$\tilde{E}^G = D \tilde{u} \quad (33)$$

或

$$\tilde{E}^G = \tilde{B}_0^G \tilde{q} + \xi \tilde{B}_\xi^G \tilde{q} \quad (34)$$

\tilde{E}^G 为总体坐标系下的应变

$$\tilde{E}^G = \{E_x E_y E_z E_{xy} E_{yz} E_{zx}\}^T \quad (35)$$

转换到局部坐标系

$$\tilde{E} = \tilde{T}_\xi \cdot \tilde{E}^G \quad (36)$$

或

$$\tilde{E} = \begin{Bmatrix} \tilde{\varepsilon} \\ \tilde{\gamma} \end{Bmatrix} + \xi \begin{Bmatrix} \tilde{\kappa} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (37)$$

其中

$$\tilde{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{xy}\}^T \quad (37a)$$

$$\underline{\kappa} = \{\kappa_{xx} \kappa_{yy} \kappa_{xy}\}^T \quad (37b)$$

$$\underline{\gamma} = \{\gamma_{yz} \gamma_{zx}\}^T \quad (37c)$$

4 应力场

在局部坐标系下考虑应力场是方便的，因为这时法向正应力可看作零，于是

$$\underline{\sigma} = \{\sigma_x \sigma_y \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}\}^T \quad (38)$$

如前所述，应力场分为两部分。低阶应力场由(9)、(10)、(11)式给出，而高阶应力场由(12)、(13)和(14)式给出。具体的形式是

$$\underline{P}_e = \begin{bmatrix} \xi \eta^2 & 0 \\ 0 & \xi^2 \eta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\underline{\alpha} = \{\alpha_1 \alpha_2\}^T \quad (39a)$$

$$\underline{P}_* = \underline{P}_e \quad (40)$$

$$\underline{\beta}_* = \{\beta_{*1} \beta_{*2}\}^T \quad (40a)$$

$$\underline{P}_s = \begin{bmatrix} \xi^2 \eta & 0 \\ 0 & \xi \eta^2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\underline{\beta} = \{\beta_1 \beta_2\}^T \quad (41a)$$

5 元素分析

元素的相容性和满足刚体位移，常应变条件可以与王毅^[5]类似地得到。对于杂交/混合元素，这些条件并不能保证结果收敛。Xue^[6]给出了杂交/混合有限元方法收敛条件，但因其形式复杂，难以进行实际应用。这里研究多余零能模式问题，闭锁问题将在数值算例中给出结论。

注意到在 2×2 低阶Gauss积分点得出的低阶应力场是关于 ξ ， η 的双线性函数，因此

$$\underline{\sigma}_{pL} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} \cdot \{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12}\}^T \quad (42)$$

其中， a_1, \dots, a_{12} 是常系数。因此， $\underline{\sigma}_{pL}$ 有12个独立模式。类似地， $\underline{\sigma}_{bL}$ 和 $\underline{\sigma}_{sL}$ 分别有12个、8个独立模式。这样，低阶应力场共包含32个独立应力模式。但由(30)式可知，位移场共有45个独立位移模式。除6个刚体位移模式外，还有39个独立的非刚体位移模式。因此，如果仅用上述低阶应力场构造元素，将产生7个独立多余零能模式。

假定 $x=\xi$ ， $y=\eta$ ，用特征模态分析可得到这7个多余零能模式

- (i) $u = C_1 x(1 - 3y^2),$
 $v = -C_1 y(1 - 3x^2)$
- (ii) $u = C_2(x^2 + y^2 - 3x^2y^2)$
- (iii) $v = C_3(x^2 + y^2 - 3x^2y^2)$
- (iv) $w = C_4(x^2 + y^2 - 3x^2y^2)$
- (v) $\theta_1 = C_5 x(1 - 3y^2),$
 $\theta_2 = -C_5 y(1 - 3x^2)$
- (vi) $\theta_1 = C_6(x^2 + y^2 - 3x^2y^2)$
- (vii) $\theta_2 = C_7(x^2 + y^2 - 3x^2y^2)$

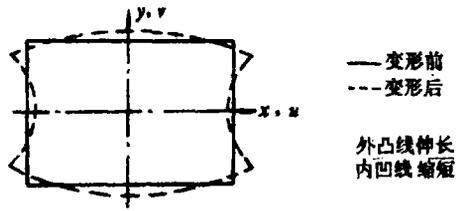


图 2 多余零能模式示意图

其中, C_1, \dots, C_7 是常量。

图 2 表明(i)是一个不相容的多余零能模式, 即它在两个元素之间不协调, 因而元素装配后它们会自动消除。(v)也有类似情况。但形如(ii), (iii), (iv), (vi), (vii)的多余零能模式在文献[1]的9.5节已被判明是相容的, 即不因元素装配而消除。如果边界条件没有约束它们的话, 装配后的结构刚度矩阵仍将是奇异的。

形如(39), (40), (41)式的高阶应力场恰好消除了(ii), (iii), (iv), (vi), (vii)。比如, 对于(ii), 有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = C_2(2x - 6xy^2) \tag{43}$$

它正好被 \tilde{P}_e 中的 $\xi\eta^2$ (现在是 xy^2) 项消除, 其中低阶项已由低阶应力场消除。依此类推。

由上述分析可见, 前面包括低阶和高阶应力场的杂交/混合元素在总体水平上没有多余零能模式。

3 数值算例

为了检验本文前面建立的 9 节点 Lagrange 退化壳杂交 / 混合元素, 作者编制了 FORTRAN 程序, 进行了包括板、单曲、双曲壳的算例分析。计算采用双精度, 是在国防科大计算中心的 VAX-780/11 小型机上完成的。

1 方板闭锁试验

固支正方形板的计算实例有助于说明元素的闭锁性质。承受均布载 q 或中心集中载 P 时, 铁摩辛柯^[7]解析解分别是 $0.00126 \frac{qa^4}{D}$, $0.0056 \frac{Pa^2}{D}$ (中心挠度), 本文解与其之比即无维挠度如表 1 所示。

表 1 固支方板中心无维挠度 (4×4 网格)

荷载	a/t	10^2	10^3	10^4	10^5
均布载		1.00658	1.00489	1.00487	1.00487
集中载		1.0073	1.0024	1.0029	1.0029

从表 1 可见，在各种厚度情况下，本文元素的 4×4 网络计算结果误差不到 1%。而且，即使在边长与厚度之比为 10^5 的极薄情况下，本文元素也不闭锁。

2 自重作用下的屋顶

几何尺寸和材料常数均见于图 3，这个问题的解析解分别由 Forsberg^[8]和 Scordalis

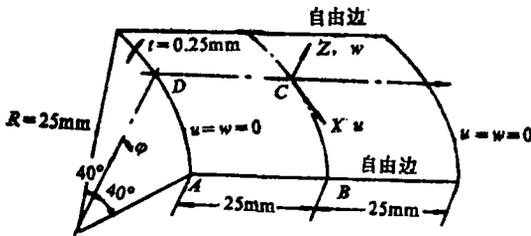


图 3 自重作用下的屋顶

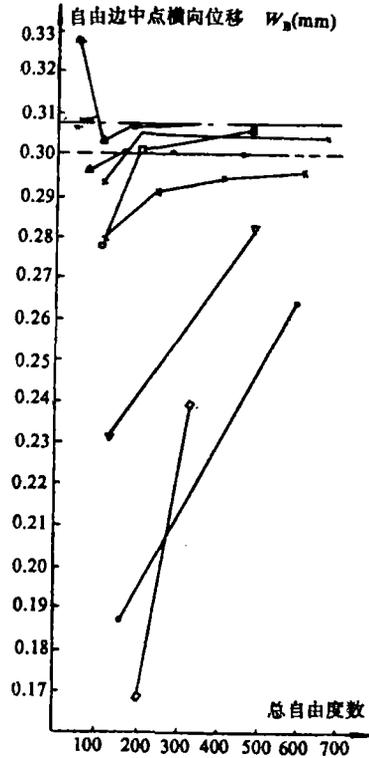


图 4 W_B 计算结果的有限元收敛情况
△退化积分等参元^[10]；△五阶移函数位移元^[11]；
□三角形浅壳元素^[12]；+假定应变元^[11]；○平片元
素^[13]；◇精确积分等参元^[10]；▽TUNC元^[14]；
×本文元素；-·-·-浅壳解析解^[9]；- - -深壳
解析解^[8]

等^[9]得到，前者用了深壳假定，后者则用了浅壳假定。

图 4 比较了自由边中心挠度的本文和其它作者计算结果的收敛情况。本文解收敛于深壳解析解和浅壳解析解之间，这是由于本文的退化壳元素并不依据具体的深壳或浅壳理论而建立，因而较客观地反映了实际情况。由图 4 还可看出，本文解收敛很快。

图 5 表示 CB 截面的横向位移。 W_B 代表 B 点的横向位移，深壳解析解是 0.3008mm，浅壳解析解是 0.3083mm，本文 6×6 网格下的收敛解为 0.3045mm。对 W_A ，深壳和浅壳解析解分别是 0.04506mm，0.046mm；本文 6×6 网格收敛解是 0.04551mm。图 6 表明 AD 截面的轴向位移分布解与文献^[9]吻合较好。

这一算例表明本文元素的精度和收敛性均较好，而且给出了较客观的解。

3 方基球壳中心承受集中载荷

几何尺寸、材料常数和边界约束均如图 7 所示。这是一个双曲壳的算例。Yang^[15]用

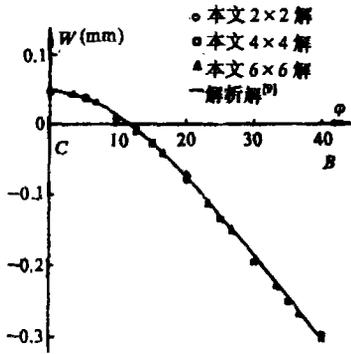


图 5 CB截面的垂直位移分布

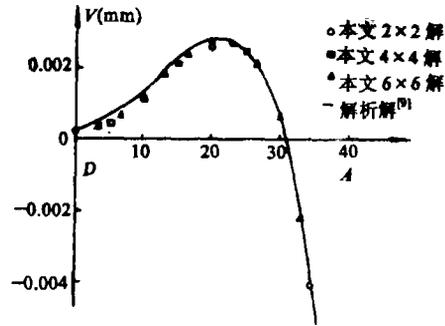


图 6 AD截面的轴向位移

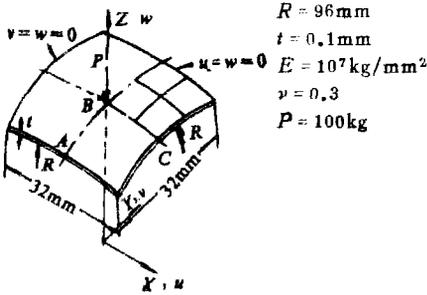


图 7 方基球壳中心承受集中载荷

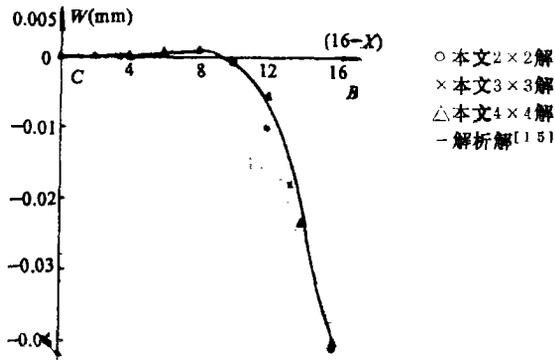


图 8 方基球壳BC截面挠度

级数展开法求得其解析解。由于结构对称，本文取 1/4 球壳计算。图 8 比较了各种网格划分下本文解与解析解的吻合程度。 W_B 的解析解为 0.03956mm，本文在 4×4 平均网格划分下的解为 0.04034mm，吻合较好，图 8 还表明，本文解的收敛性比较好。

4 柱壳受挤压

两端固定柱壳在上、下曲面中心受大小相等、方向相反的集中力，如图 9 所示。由问题的对称性，取 $\frac{1}{8}$ 柱壳计算。

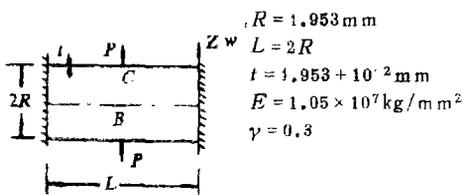


图 9 固定柱壳受挤压

表 2 固定柱壳 C 点无维挠度

元素类型	网格划分	$W_c E t / P$
本文元素	5 × 5	122.16
	6 × 6	134.85
L_{ee} [16]	8 × 6	138.66

表 2 表明, 本文解与 Lee^[16] 的收敛解吻合较好。

上述算例中, 第 3 例是一个薄壳的算例, 其半径与厚度比为 960, 但未观察到闭锁现象。

4 结 论

通过前面的工作, 可以表明:

1. 本文的 9 节点 Lagrange 退化壳杂交/混合元素不仅满足了协调和完备性条件, 而且在总体水平上消除了多余零能模式。
2. 薄板闭锁试验和薄壳算例说明, 本文元素适用于薄的板壳结构而不发生闭锁。
3. 本文元素不依据具体的壳体理论, 因而构造简便, 且计算结果更能反映客观情况。
4. 本文元素比通常使用的位移元素收敛快、精度高, 在较为稀疏的网格划分下一般已得到足够满意的结果。

致 谢

本文的计算工作得到国防科大计算中心的大力协助, 谨此致谢。

参 考 文 献

- [1] R·D·库克. 有限元分析的概念和应用. 科学出版社, 1981
- [2] Belytschko T, Stolarski H, Liu W K, Carpenter N. J. S.-J. Ong. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 1981; 51: 221
- [3] Hugher T J R, Taylor R L, Kanoknuchki W. Int. J. Num. Meth. Engng., 1977; 11: 1529
- [4] Belytschko T, Liu W K. J.S.-J. Ong. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 1984; 44: 269.
- [5] 王毅. 迭层复合材料板壳大挠度有限元分析和非对称铺层复合材料板的室温形状研究. 硕士学位论文, 国防科大研究生院, 1985
- [6] Xue W M. Ph.D. thesis, 1984; G.I.T
- [7] 铁摩辛柯, S·沃诺斯基. 板壳理论. 科学出版社, 1977
- [8] Forsberg K. Int. Conf. on Applied Mech., Liege, 1975
- [9] Scordalis A C, Lo K S. J. Amer. Concr. Inst., 1964; 61(1): 539
- [10] Zienkiewicz O C, Too J M, Taylor R L. Int. J. Num. Meth. Engng., 1971; 3: 275
- [11] Ashwell D G, Gallagher R H. Finite Elements for Thin Shells and Curved Members, Wales, Wiley, 1974
- [12] Cowper G R, Lindberg G M, Olson M D. Int. J. Solids and Structures, 1970; 6: 1133
- [13] Clough R W, Johnson C P. Int. J. Solids and Structures, 1968; 4: 43
- [14] Argyris J, Hasse M, Mlejnek H-P, Schmolz P K. Int. J. Num. Meth. Engng., 1986; 22: 193
- [15] Yang T Y. J. Eng. Mech. Div. ASCE., 1973; EM1, 99: 157
- [16] Lee S W, Wong S C, Rhu J J. Comput. Struct., 1985; 21: 1325

A Hybrid/Mixed Shell Element with Stress Separation

Zhang Guoan Hong Zhiquan

Abstract

A new finite element—9 node degenerate shell hybrid/mixed element with stress separation is presented in this paper. It is based on a modified Hellinger-keissner principle. This element not only possesses following merits, (i) High accurate stress and displacement evaluation; (ii) Free from zero energy or kinematic deformation modes; (iii) Largely weaken the locking effect; (iv) Invariant with reference coordinates, but also improves its efficiency to set against other hybrid/mixed finite elements. Transverse shearing effect is taken into account.

Several numerical examples are solved, and the solutions are compared to the existing ones. The results show that the present element yields accurate solutions for shallow and deep shells.

Key words: locking; zero energy model, hybrid/mixed finite element