

矩形薄板弹性稳定性的解析解法

黄炎

(航天技术系)

摘要 本文求得了矩形薄板临界状态时的平衡屈曲挠度微分方程的一般解。可以求解任意边界条件下矩形薄板的临界载荷。以四边自由的正方形板为例求解了四边均匀受压的临界载荷及其屈曲波形。

关键词 稳定性, 屈曲, 临界载荷

分类号 O343

引言

薄板在工程结构中常因失稳而导致破坏, 甚至造成危害, 故精确地求解薄板的稳定性问题, 是十分重要的。通常用精确的解析解法仅能求得四边简支的双正弦级数解或两对边简支、其它二边为其它边界条件的单正弦级数解^[1]。G.I.Taylor^[2]用迭加法, S.Iguchi^[3]用位移法仅求得了四边平夹的解析解。对各种不同边界的板虽然可以采用能量法, 但如何选好挠度函数则难于掌握, 故建立适用于各种边界条件的一般解析解来精确地求解临界载荷实属必要。

1 微分方程的解

如图1所示, 矩形薄板均匀受压临界状态时的平衡微分方程为

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + \frac{P_x}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{P_y}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

式中 P_x 和 P_y 分别为沿 x 和 y 方向的均匀压力, D 为抗弯刚度。采用分离变量法, 设 $W = XY$, 代入(1)式得

$$Y \frac{\partial^4 X}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + X \frac{\partial^4 Y}{\partial y^4} + \frac{P_x}{D} Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{P_y}{D} X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

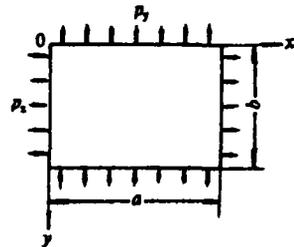


图 1

将上式除以 XY ，然后对 y 微分一次得

$$\frac{X''}{X} - \frac{1}{2} \left(\frac{Y''}{Y} \right)' / \left(\frac{Y''}{Y} \right)' - \frac{P_y}{2D}$$

上式两边必为一常数，设为 $-\alpha^2$ ，故有

$$X'' + \alpha^2 X = 0 \quad (3)$$

上式的解分两种：(1) 当 α 为零时可得

$$X = A_1 + A_2 x \quad (4)$$

将上式代入(2)式得

$$Y'' + \frac{P_y}{D} Y'' = 0$$

上式的一般解为

$$Y = B_1 - B_2 y + B_3 \sin \sqrt{\frac{P_y}{D}} y + B_4 \cos \sqrt{\frac{P_y}{D}} y \quad (5)$$

(2) 当 α 不为零时可得

$$X = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x \quad (6)$$

将上式代入(2)式得

$$Y'' + \left(\frac{P_y}{D} - 2\alpha^2 \right) Y'' + \left(\alpha^4 - \frac{P_x}{D} \right) Y = 0$$

令 $Y = e^{Sy}$ ，代入上式可以解得

$$S = \pm \sqrt{\alpha^2 - \frac{P_y}{2D}} \pm \sqrt{\frac{P_y}{2D} \left(\frac{P_y}{2D} - 2\alpha^2 \right) + \frac{P_x}{D} \alpha^2} \quad (7)$$

对于不同的 P_x 和 P_y ， S 将是实数，或虚数，或复数。此外将(2)式除以 XY ，然后对 x 微分一次，又可得到相似的各种解。适当选取各种解的组合，可以求解各种不同边界矩形板的稳定性问题。

2 一般解的建立

为简单起见，设 $P_x = P_y = P$ ，则 $S = \pm \alpha$ 以及 $\pm \sqrt{\alpha^2 - P/D}$ ，欲满足四边以及四角为任意边界的矩形板的稳定性问题本文取

$$\begin{aligned} W = & \sum_m \left[A_m \frac{\text{sh} \alpha (b-y)}{\text{sh} \alpha b} + B_m \frac{\text{sh} \alpha y}{\text{sh} \alpha b} \right] \sin \alpha x \\ & + \sum_{m=1}^{m < M} \left(C_m \frac{\sin \alpha' (b-y)}{\sin \alpha' b} + D_m \frac{\sin \alpha' y}{\sin \alpha' b} \right) \sin \alpha x \\ & + \sum_{m > M} \left[C_m \frac{\text{sh} \alpha'' (b-y)}{\text{sh} \alpha'' b} + D_m \frac{\text{sh} \alpha'' y}{\text{sh} \alpha'' b} \right] \sin \alpha x \\ & + \sum_n \left[E_n \frac{\text{sh} \beta (a-x)}{\text{sh} \beta a} + F_n \frac{\text{sh} \beta x}{\text{sh} \beta a} \right] \sin \beta y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{n < N} \left[G_n \frac{\sin \beta' (a-x)}{\sin \beta' a} + H_n \frac{\sin \beta' x}{\sin \beta' a} \right] \sin \beta y \\
& + \sum_{n=N}^{\infty} \left[G_n \frac{\operatorname{sh} \beta'' (a-x)}{\operatorname{sh} \beta'' a} + H_n \frac{\operatorname{sh} \beta'' x}{\operatorname{sh} \beta'' a} \right] \sin \beta y \\
& + \left[A \frac{\sin \gamma (b-y)}{\sin \gamma b} + B \frac{\sin \gamma y}{\sin \gamma b} \right] \frac{a-x}{a} \\
& + \left[C \frac{\sin \gamma (b-y)}{\sin \gamma b} + D \frac{\sin \gamma y}{\sin \gamma b} \right] \frac{x}{a} \\
& + \left[E \frac{\sin \gamma (a-x)}{\sin \gamma a} + F \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma a} \right] \frac{b-y}{b} \\
& + \left[G \frac{\sin \gamma (a-x)}{\sin \gamma a} + H \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma a} \right] \frac{y}{b} \\
& + I \frac{b-y}{b} \frac{a-x}{a} + J \frac{b-y}{b} \frac{x}{a} \\
& + K \frac{y}{b} \frac{a-x}{a} + L \frac{y}{b} \frac{x}{a}
\end{aligned} \tag{8}$$

式中

$$a = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, \dots \tag{9}$$

$$\beta = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{10}$$

$$\alpha' = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}, \quad \alpha'' = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} \tag{11}$$

$$\beta' = \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}, \quad \beta'' = \sqrt{\beta^2 - \gamma^2} \tag{12}$$

$$\gamma = \sqrt{P/D}, \quad M = \frac{\gamma a}{\pi}, \quad N = \frac{\gamma b}{\pi} \tag{13}$$

(8)式含有 $4m+4n+12$ 个积分常数, 其中第一部分能满足 $y=0$ 和 $y=b$ 两个边为任意边界条件的问题。第二部分能满足 $x=0$ 和 $x=a$ 两个边为任意边界条件的问题。第三部分能满足四个角为任意角点条件的问题。由于每个边界有挠度或等效剪力, 斜度或弯矩两个边界条件, 将每个边界条件所建立的方程中的非正弦级数均展成如下的正弦级数:

$$\frac{\operatorname{sh} \alpha_1 (b-y)}{\operatorname{sh} \alpha_1 b} = \sum_n \frac{2n\pi}{(n\pi)^2 + (\alpha_1 b)^2} \sin \beta y \tag{14}$$

$$\frac{\operatorname{sh} \alpha_1 y}{\operatorname{sh} \alpha_1 b} = - \sum_n \frac{2n\pi \cos n\pi}{(n\pi)^2 + (\alpha_1 b)^2} \sin \beta y \tag{15}$$

$$\frac{\sin \alpha_1 (b-y)}{\sin \alpha_1 b} = \sum_n \frac{2n\pi}{(n\pi)^2 - (\alpha_1 b)^2} \sin \beta y \tag{16}$$

$$\frac{\sin \alpha_1 y}{\sin \alpha_1 b} = - \sum_n \frac{2n\pi \cos n\pi}{(n\pi)^2 - (\alpha_1 b)^2} \sin \beta y \quad (17)$$

$$\frac{b-y}{b} = \sum_n \frac{2}{n\pi} \sin \beta y \quad (18)$$

$$\frac{y}{b} = - \sum_n \frac{2 \cos n\pi}{n\pi} \sin \beta y \quad (19)$$

则利用正弦级数的正交性, 四个边可得 $4m+4n$ 个方程式, 加上每个角有挠度或反力, 角的两边的斜度或弯矩共三个条件, 总共可得 $4m+4n+4 \times 3$ 个条件方程式. 恰好可以求解全部积分常数问题。

3 计算例

如图2所示, 以四边自由的矩形板为例, 边界条件是:

$$(M_x)_{x=0} = 0, (M_x)_{x=a} = 0 \quad (20)$$

$$(M_y)_{y=0} = 0, (M_y)_{y=b} = 0 \quad (21)$$

$$(V_x)_{x=0} = 0, (V_x)_{x=a} = 0 \quad (22)$$

$$(V_y)_{y=0} = 0, (V_y)_{y=b} = 0 \quad (23)$$

式中

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right),$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)$$

$$V_x = -D \left[\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right] - P_x \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$V_y = -D \left[\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right] - P_y \frac{\partial W}{\partial y}$$

角点条件是:

$$R_{(0,0)} = 0, R_{(a,0)} = 0, R_{(0,b)} = 0, R_{(a,b)} = 0 \quad (24)$$

式中

$$R = 2D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

$$M_{x(0,0)} = 0, M_{x(a,0)} = 0, M_{x(0,b)} = 0, M_{x(a,b)} = 0 \quad (25)$$

$$M_{y(0,0)} = 0, M_{y(a,0)} = 0, M_{y(0,b)} = 0, M_{y(a,b)} = 0 \quad (26)$$

利用对称和反对称条件可使求解临界载荷的问题大大简化, 对于 $x=a/2$ 和 $y=b/2$ 为对称或反对称屈曲位形应有

$$W_{x=0} = \pm W_{x=a}; W_{y=0} = \pm W_{y=b} \quad (27)$$

$$W_{(0,0)} = \pm W_{(a,0)} = \pm W_{(0,b)} = W_{(a,b)} \quad (28)$$

正负号同时书写时, 上号为对称情形, 下号为反对称情形。为简单起见, 设 $a=b$ 即正方

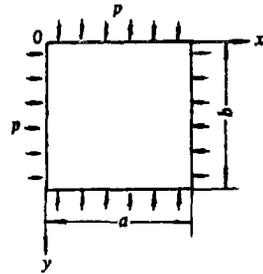


图 2

形板的情形, 由直线 $x=y$ 的对称和反对称条件又有:

$$W_{x=0} = \pm W_{y=0} \quad (29)$$

将(8)式代入以上各式, 首先由(25)和(26)式可得

$$A = B = C = D = E = F = G = H = 0 \quad (30)$$

由(28)式可得

$$I = \pm J = \pm K = L \quad (31)$$

应用以上各式, 则由(20)和(21)式并应用到(11)和(12)式以及利用正弦级数的正交性可得

$$G_n = E_n \frac{(1-\nu)\beta^2}{\gamma^2 - (1-\nu)\beta^2}, \quad H_n = F_n \frac{(1-\nu)\beta^2}{\gamma^2 - (1-\nu)\beta^2} \quad (32)$$

$$C_m = A_m \frac{(1-\nu)\alpha^2}{\gamma^2 - (1-\nu)\alpha^2}, \quad D_m = B_m \frac{(1-\nu)\alpha^2}{\gamma^2 - (1-\nu)\alpha^2} \quad (33)$$

同样由(27)式可得

$$A_m = \pm B_m, \quad E_n = \pm F_n \quad (34)$$

由方程(22)的第一式和方程(24)的第一式, 并应用到(14)~(19)式可得

$$\begin{aligned} & \sum_m A_m \left\{ \alpha [\gamma^2 + (1-\nu)\alpha^2] \frac{2n\pi(1 \mp \cos n\pi)}{(n\pi)^2 + (\alpha b)^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{(1-\nu)^2 \alpha^3 (\gamma^2 - \alpha^2)}{\gamma^2 - (1-\nu)\alpha^2} \frac{2n\pi(1 \mp \cos n\pi)}{(n\pi)^2 - (\alpha' b)^2} \right\} \\ & \quad + E_n \left\{ \beta [(1-\nu)\beta^2 - \gamma^2] \left(\operatorname{cth} \beta a \mp \frac{1}{\operatorname{sh} \beta a} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{(1-\nu)^2 \beta^4}{\gamma^2 - (1-\nu)\beta^2} \left[\begin{array}{l} \beta' \left(\operatorname{ctg} \beta' a \mp \frac{1}{\sin \beta' a} \right), \text{ 当 } n < N \\ \beta'' \left(\operatorname{cth} \beta'' a \mp \frac{1}{\operatorname{sh} \beta'' a} \right), \text{ 当 } n > N \end{array} \right] \right\} \\ & \quad - I(1 \mp 1) \frac{2\gamma^2(1 \mp \cos n\pi)}{n\pi a} = 0 \quad (35) \\ & \sum_m A_m \left\{ \alpha^2 \left(\operatorname{cth} \alpha b \mp \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha b} \right) + \frac{(1-\nu)\alpha^3}{\gamma^2 - (1-\nu)\alpha^2} \left[\begin{array}{l} \alpha' (\operatorname{ctg} \alpha' b \mp \frac{1}{\sin \alpha' b}), \text{ 当 } m < M \\ \alpha'' (\operatorname{cth} \alpha'' b \mp \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha'' b}), \text{ 当 } m > M \end{array} \right] \right\} \\ & + \sum_n E_n \left\{ \beta^2 \left(\operatorname{cth} \beta a \mp \frac{1}{\operatorname{sh} \beta a} \right) + \frac{(1-\nu)\beta^3}{\gamma^2 - (1-\nu)\beta^2} \left[\begin{array}{l} \beta' (\operatorname{ctg} \beta' b \mp \frac{1}{\sin \beta' b}), \text{ 当 } n < N \\ \beta'' (\operatorname{cth} \beta'' b \mp \frac{1}{\operatorname{sh} \beta'' b}), \text{ 当 } n > N \end{array} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$-I \frac{2(1 \mp 1)}{ab} = 0 \quad (36)$$

如果再应用方程(23)的第一式,还可以求得和(35)式相似的等式,则连同(36)式可以求解 A_m 、 E_m 和 I 的问题,相应地可以求得对 $x=a/2$ 和 $y=b/2$ 分别为对称或反对称共四种情形的解。又由以上二式可知,对称时 I 项的系数为零,即 I 可以取任意值,这是可以理解的,因为它表示刚性位移。故令 $I=0$,即四角的挠度为零。此外反对称时也可令 $I=0$,即还可求得四角支承时的情形。现在我们仅求解对 $x=a/2$ 和 $y=b/2$ 均为对称或均为反对称的情形,同时令 $a=b$,则再由(29)式,并取 m 和 n 的总项数相等可得

$$E_n = (\pm) A_n \quad (37)$$

上式中加一括号是为了区别另外两种情形,故总共仍有四种情形。最后将(36)式代入(35)式,并应用到上式以及(9)~(13)式可以求得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} A_n \left\{ 1 m n \left[\frac{M^2 + (1-\nu) m^2}{m^2 + n^2} - \frac{m^2}{m^2 + n^2 - M^2} \frac{(1-\nu)^2 (M^2 - m^2)}{M^2 - (1-\nu) n^2} \right] \right. \\ & - (1 \mp 1) \frac{2 M^2 m}{n} \left\{ m \pi \left(\operatorname{cth} m \pi + \frac{1}{\operatorname{sh} m \pi} \right) \right. \\ & \left. \left. \left[\frac{(1-\nu) m^2}{M^2 - (1-\nu) m^2} \left\{ \begin{array}{l} m' \pi \left(\operatorname{ctg} m' \pi + \frac{1}{\sin m' \pi} \right), \quad \text{当 } m < M \\ m'' \pi \left(\operatorname{cth} m'' \pi + \frac{1}{\operatorname{sh} m'' \pi} \right), \quad \text{当 } m > M \end{array} \right\} \right] \right\} \right. \\ & \left. (1 \mp 1) A_n \left[(1-\nu) n^2 - M^2 \right] n \pi \left(\operatorname{cth} n \pi \mp \frac{1}{\operatorname{sh} n \pi} \right) \right. \\ & \left. - \frac{(1-\nu)^2 n^4}{(1-\nu) n^2 - M^2} \left[\begin{array}{l} n' \pi \left(\operatorname{ctg} n' \pi \mp \frac{1}{\sin n' \pi} \right), \quad \text{当 } n < M \\ n'' \pi \left(\operatorname{cth} n'' \pi \mp \frac{1}{\operatorname{sh} n'' \pi} \right), \quad \text{当 } n > M \end{array} \right] \right\} = 0 \quad (38) \end{aligned}$$

式中

$$m' = \sqrt{M^2 - m^2}, \quad m'' = \sqrt{m^2 - M^2} \quad (39)$$

$$n' = \sqrt{M^2 - n^2}, \quad n'' = \sqrt{n^2 - M^2} \quad (40)$$

对 $x=a/2$ 和 $y=a/2$ 均为对称时 m 和 n 仅取奇数值;均为反对称时仅取偶数值。此外对 $x=a/2$ 和 $y=a/2$ 均为反对称时 $(1 \mp 1) = 2$,均为对称时以及四角支承的反对称时 $(1 \mp 1) = 0$,

令(38)式中 A_m 的系数行列式等于零，可以求得各种 M 值。此外利用(38)式的前 $n-1$ 个等式可以求得比值 A_m/A_1 ，然后将(30)~(34)式及(37)式代入(8)式可以求得沿边界 $y=0$ 和对角线 $x=y$ 的屈曲挠度曲线分别为

$$W_{y=0} = \sum_m A_m \frac{M^2}{M^2 - (1-\nu)m^2} \sin m\pi \frac{x}{a} + I \left(1 - \frac{2x}{a}\right) \tag{41}$$

$$W_{x=y} = [1(\pm)1] \sum_m A_m \left\{ \frac{\text{sh}m\pi(1-x/a)}{\text{sh}m\pi} \pm \frac{\text{sh}m\pi x/a}{\text{sh}m\pi} \right. \\ \left. + \frac{(1-\nu)m^2}{M^2 - (1-\nu)m^2} \left[\frac{\sin m'\pi(1-x/a) \pm \sin m'\pi x/a}{\sin m'\pi} , \text{当 } m < M \right] \right. \\ \left. \left[\frac{\text{sh}m''\pi(1-x/a) \pm \text{sh}m''\pi x/a}{\text{sh}m''\pi} , \text{当 } m > M \right] \right\} \\ \cdot \sin m\pi \frac{x}{a} + I \left(1 - \frac{2x}{a}\right)^2 \tag{42}$$

式中

$$I = (1 \mp 1) \sum_m A_m m\pi \left\{ m\pi \left(\text{cth}m\pi + \frac{1}{\text{sh}m\pi} \right) \right. \\ \left. + \frac{(1-\nu)m^2}{M^2 - (1-\nu)m^2} \left[m'\pi \left(\text{ctg}m'\pi + \frac{1}{\sin m'\pi} \right) , \text{当 } m < M \right] \right. \\ \left. \left[m''\pi \left(\text{cth}m''\pi + \frac{1}{\text{sh}m''\pi} \right) , \text{当 } m > M \right] \right\}$$

对每种情形， m 和 n 均各取 8 项， $\nu=0.3$ ，由(38)式采用反逆解法求得 M ，然后由(41)和(42)式求挠度曲线，求出下列八种类型的结果见表 1，2，3。

- (1) 第一个对 $x=a/2$ 和 $y=a/2$ 均为对称，对 $x=y$ 为对称；
- (2) 第二个对 $x=a/2$ 和 $y=a/2$ 均为对称，对 $x=y$ 为对称；
- (3) 第一个对 $x=a/2$ 和 $y=a/2$ 均为对称，对 $x=y$ 为反对称；
- (4) 第二个对 $x=a/2$ 和 $y=a/2$ 均为对称，对 $x=y$ 为反对称；
- (5) 第一个对 $x=a/2$ 和 $y=a/2$ 均为反对称，对 $x=y$ 为对称；
- (6) 第二个对 $x=a/2$ 和 $y=a/2$ 均为反对称，对 $x=y$ 为对称；
- (7) 第一个对 $x=a/2$ 和 $y=a/2$ 均为反对称，对 $x=y$ 为对称，但角点被支承；
- (8) 第二个对 $x=a/2$ 和 $y=a/2$ 均为反对称，对 $x=y$ 为对称，但角点被支承。

表 1 边界自由的正方形板的 M 值

类型	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
M 值	1.1043	2.1040	0.8597	2.8711	0.9566	2.4397	2.1931	3.1733

表 2 板边 $y=0$ 的挠度值 (单位为 A_1)

x/a	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
0	0	0	0	0	-9.4575	-2.7332	0	0
1/16	0.4401	0.1688	-3.7366	-3.3665	-8.4902	-1.8027	0.8537	0.3968
1/8	0.8726	0.3603	-7.3087	-5.0778	-7.4682	-0.8678	1.6231	0.8206
3/16	1.2804	0.5693	-10.5773	-5.1144	-6.3757	-0.4682	2.1749	1.1888
1/4	1.6453	0.7817	-13.4225	-3.2665	-5.2088	0.5435	2.4043	1.4039
5/16	1.9497	0.9770	-15.7439	-0.1396	-3.9740	0.6220	2.2571	1.3871
3/8	2.1787	1.1350	-17.4610	3.2690	-2.6827	0.7764	1.7473	1.1137
7/16	2.3209	1.2376	-18.5151	5.8704	-1.3517	0.4633	0.9519	0.6200
1/2	2.3692	1.2734	-18.8704	6.8408	0	0	0	0

表 3 对角线 $x=y$ 的挠度值 (单位 A_1)

x/a	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
0	0	0			-9.4575	-2.7332	0	0
1/16	0.8712	0.3065			-7.5578	-0.9376	1.4684	0.4664
1/8	1.7053	0.5389			-5.7412	0.5396	2.3336	0.3218
3/16	2.4699	0.6646			-4.0906	1.4342	2.5566	-0.1996
1/4	3.1391	0.6847	0	0	-2.6688	1.6648	2.2312	-0.6814
5/16	3.6887	0.6271			-1.5220	1.3467	1.5584	-0.8065
3/8	4.0978	0.5361			-0.6827	0.7522	0.8005	-0.5519
7/16	4.3502	0.4581			-0.1716	0.2137	0.2176	-0.1744
1/2	4.4355	0.4278			0	0	0	0

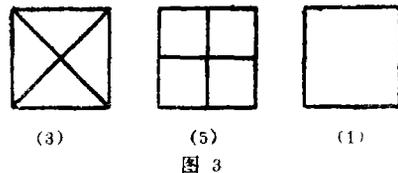
采用能量法可以求得 M 值的上限, 能量法的公式为^[1]

$$\frac{1}{2} \iint \left[P_x \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + P_y \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

$$- \frac{D}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy$$

取 $W = \sin \pi x/a + \sin \pi y/a$ 求得类型(1)的 $M = \sqrt{1+8\nu/\pi^2} = 1.1150 > 1.1043$; 取 $W = \sin \pi x/a - \sin \pi y/a$ 求得类型(3)的 $M = \sqrt{1-8\nu/\pi^2} = 0.8699 > 0.8597$; 取 $W = (1-2x/a)(1-2y/a)$ 求得类型(5)的 $M = 2\sqrt{3(1-\nu^2)}/\pi = 1.0518 > 0.9566$, 说明本文的方法是正确的。

从表 1 中可以看出, 确定最小临界载荷的前三个 M 值的类型依次是(3)、(5)、(1), 相应的屈曲挠度为零的节线位置如图 3 所示, 这和四边自由的正方形板自由振动的前三个最低



基频的振型节线图有共同之处,但后者的类型次序是(5), (3), (1), 且类型(1)的中间有一近似圆形的节线[4]。如果前者类型(1)的 $I \neq 0$, 而等于板四边中点的挠度和板中点的挠度之间的任一负值, 即从表2和表3中的类型(1)取 $-4.4355A_1 < I < -2.3692A_1$, 则图形的中间亦有一近似圆形的节线。

用本文的方法求得各种边界正方形板均匀受压的最小 M 值和换算成临界压力 P 与 a^2/D 的比值见表4, 从表中可以看出, 两邻自由, 另两邻简支的正方形板是均匀受压最容易屈曲的边界情形。

表4 各种边界正方形板均匀受压的最小临界压力比值

边界情形	四边自由	四边平夹	四边简支	两邻自由两邻简支	两邻平夹两邻简支
最小 M 值	0.8597	2.3029	1.4142	0.4783	1.8021
最小 Pa^2/D	7.2945	52.342	19.739	2.2578	32.052

本文的理论分析简单明瞭, 计算方法容易掌握, 便于工程实际应用。

本文的计算得到研究生朱一凡同志的帮助, 深表感谢。

参 考 文 献

- [1] Timoshenko S P, Gere J M. Theory of Elastic stability. McGraw-Hill, 1961
- [2] Taylor G I. The Buckling Load for Rectangular Plate with Four Clamped Edges. *z. angew. Math. u. Mech.*, 1933, 13: 147
- [3] Iguchi S. Allgemeine Lösung der Knickugsaufgabe für Rechteckige Ptatten, *Ingenieur Archiv*, VII, Band 4 Heft, 1936: 207~215
- [4] Timoshenko S P. Vibration Problems in Engineering. Mc Graw-Hill, 1955: 446

An Analytical Method for Solving Elastic Stability of Rectangular Thin Plates

Huang Yan

Abstract

A general solution of the differential equation of deflection surface for the rectangular thin plate in stability study is obtained in this paper. It can

be used to determine the critical load of rectangular plate with arbitrary boundaries. As an example, the critical load and buckling mode of a square plate with four edges free and subjected to uniform compression along four edges have been calculated.

Key words: stability, buckling, critical load