

微结构连续损伤理论

杨光松

(航天技术系)

摘要 本文从微结构理论^[1]出发,用相对变形描述微结构之间的微空隙和微裂纹引起的材料损伤的影响,得到用损伤张量描述的各向异性损伤的微结构连续损伤力学理论。该微结构损伤模型可简化为目前公认的几种主要损伤模型:如J.P.Cordebois和F.Sidoroff的弹性各向异性损伤模型^[2],D.Krajcinovic和G.U.Fonseka的脆性材料平面裂纹损伤模型^[3],J.Lemaitre的各向同性损伤理论^[4]及Kachanov的以面积减少为变量的损伤模型^[5]等。作者运用这一理论对混凝土材料的单向拉、压基本受载情形进行了数值分析,并与D.Krajcinovic的损伤模型计算结果及实验结果作了比较,所得结果与实验值比较吻合,特别是在失稳后阶段给出了较好描述,初步表明了本理论的有效性和实用性。

关键词 微结构损伤;相对变形,损伤力学

分类号 O346

1 微结构损伤模型及其基本公式

工程材料的力学性质及极限强度在很大程度上受制于其组成结构的微空隙。损伤力学研究材料内部微空隙和微裂纹在外因作用下其本身扩展及其对应力、应变状态和构件刚度,强度的影响,从而估算工程结构的寿命,拟定合理设计方案或提供有关的性能改进措施。L.M.Kachanov(1958)首先在材料的本构关系中引入了一种表示损伤的变量,对脆性蠕变断裂进行了有成效的研究。由此发展起来的连续介质损伤力学^[6,7,8]大都以实际材料的净截面作为抵抗外力的有效面积。然而,正如文献^[4]中J.Lemaitre指出的那样,由于微空隙引起材料不连续,微孔隙之间的相互作用及微裂纹处应力集中的影响,有效面积 \bar{S} 实际上小于抵抗外力的“真实”面积。即

$$\bar{S} < S - S_D \quad (1)$$

其中 S 为材料受载的截面积, S_D 为该表面上的微空隙和微裂纹面积。此方向的损伤变量可定义为:

$$D = \frac{S - \bar{S}}{S} \quad (2)$$

由此可见, 直接测试微缺陷面积定义损伤变量, 并不能完全描述材料的损伤状态。

下面我们试图通过微观结构的分析方法^[1], 利用损伤内变量描述材料的损伤状态。

设变形前物体内一点的坐标为 X_i , 变形后其坐标为 x_i , 该点的宏观位移为

$$u_i = x_i - X_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (3)$$

假定在连续介质中的每一个宏观质点处嵌入一个微细胞物质单元, 以 X'_i , x'_i 分别表示微物质质点在以宏观质点为原点的坐标系中变形前后的坐标。其微观位移为

$$u'_i = x'_i - X'_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (4)$$

假定位移梯度均为小量, 即

$$\left| \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\partial u'_j}{\partial X'_i} \right| \ll 1 \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (5)$$

因此, 可近似取

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial X_i} &\approx \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \partial_i u_j \\ \frac{\partial u'_j}{\partial X'_i} &\approx \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} = \partial'_i u'_j \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中 $u_j = u_j(x_i, t)$, $u'_j = u'_j(x'_i, x'_i, t)$ 。

对于小微变形, 可进一步假定微位移是 x'_i 的线性函数。即设

$$u'_j = x'_k \psi_{kj}(x_i, t) \quad (i, j, k=1, 2, 3) \quad (7)$$

在(7)式及以后的公式中, 均采用爱因斯坦求和约定。

$$\text{微观变形} \quad \partial'_i u'_j = \psi_{ij}$$

$$\text{微观应变} \quad \psi_{(ij)} = \frac{1}{2}(\psi_{ij} + \psi_{ji})$$

$$\text{微观转动} \quad \psi_{[ij]} = \frac{1}{2}(\psi_{ij} - \psi_{ji})$$

$$\text{宏观应变} \quad \varepsilon_{ij} = \partial_{(i} u_{j)} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (8)$$

$$\text{宏观转动} \quad \varphi_{ij} = \partial_{[i} u_{j]} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j - \partial_j u_i)$$

$$\text{相对变形} \quad \gamma_{ij} = \partial_i u_j - \psi_{ij}$$

$$\text{相对应应变} \quad \gamma_{(ij)} = \varepsilon_{ij} - \psi_{(ij)}$$

$$\text{相对转动} \quad \gamma_{[ij]} = \varphi_{ij} - \psi_{[ij]}$$

如果材料分布均匀, 不考虑高阶变形梯度的影响, 则内能密度 $\Pi(\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij})$ 可取为 ε_{ij} 和 γ_{ij} 的二次函数。即

$$W(\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} b_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} + g_{ijkl} \gamma_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (9)$$

根据对称性质:

$$\left. \begin{aligned} c_{ijkl} &= c_{klij} = c_{jikl} & 9 \times 9 - 60 &= 21 \\ b_{ijkl} &= b_{klij} & 9 \times 9 - 36 &= 15 \\ g_{ijkl} &= g_{jikl} & 9 \times 9 - 27 &= 54 \\ & & 243 - 123 &= 120 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

即243个能量密度系数中只有120个系数是独立的。

显然, 从公式(8), (9)可知, 即使没有宏观应变 ε_{ij} 和相对应变 $\gamma_{(ij)}$, 由于有相对转动 $\gamma_{[ij]}$, 内能密度也不为零, 从而存在内应力。而当相对转动为零时, 即微观转动与宏观转动相等时, 并不影响内能密度。这样的运动为

$$u_j = x_k \varphi_{kj}, \quad u'_j = x'_k \psi_{[kj]} \quad (j, k=1, 2, 3) \quad (11)$$

图1给出了几种特殊的相对变形 γ_{ij} 的图形范例。

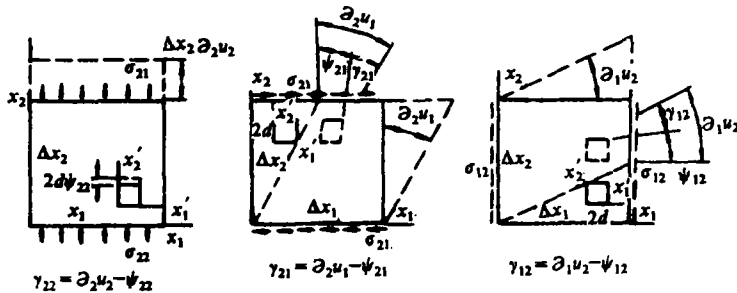


图1 几种特殊的相对变形图

根据实验观察^[6~9]所知, 材料的微缺陷如孔洞、裂纹等首先是在微观结构如晶粒结构之间产生和发展起来, 然后逐步扩展、聚集直至松散毁坏或成为宏观裂纹, 最后导致材料的破坏。因此, 可假定相对变形是由材料的损伤引起的(当然与内应力、温度、位错、滑移等现象有关)。对于小变形情形有

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^0 + \Omega_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \dots \quad (12)$$

其中 γ_{ij}^0 为宏观应变 ε_{ij} 为零时的初始相对变形, 它与材料的初始损伤、残余应力、热应力等有关, Ω_{ijkl} 是一个与损伤状态有关的四阶张量。

如果材料的初始状态无损伤, 不考虑残余应力、热应力等影响, 且忽略宏观应变 ε_{ij} 二次项以上的影响, 则相对变形与宏观应变成线性关系。

$$\gamma_{ij} = \Omega_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (13)$$

其中 $\Omega_{ijkl}(w_{mn})$ 是损伤张量内变量 w_{mn} 的函数, 无损时

$$w_{mn} = 0, \quad \Omega_{ijkl}(0) = 0, \quad \gamma_{ij} = 0 \quad (14)$$

现在, 可把内能密度改写成应变和损伤变量的函数形式。即

$$W(\varepsilon_{ij}, w_{mn}) = \frac{1}{2} \bar{c}_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (15)$$

$$\text{其中 } \bar{c}_{ijkl} = c_{ijkl} + b_{mnpq} \Omega_{mnij} \Omega_{pqkl} + g_{mnij} \Omega_{mnkl} + g_{mnkl} \Omega_{mnij} \quad (16)$$

c_{ijkl} 表示有损材料的等效弹性常数张量, 无损时即为通常的弹性常数张量。

其应力应变关系为

$$\sigma_{ij} = \bar{c}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (17)$$

由(16)、(17)式知, 即使相对变形不对称, 但若相对变形与宏观应变成线性关系时, 柯西应力仍是对称的。

其损伤应变能释放率为

$$Y_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \omega_{ij}} = [b_{mnpq} \Omega_{pqkl} + g_{mnkl}] \frac{\partial \Omega_{mnst}}{\partial \omega_{ij}} \varepsilon_{st} \varepsilon_{kl} \quad (18)$$

设损伤强化准则为^[9]

$$F_d(Y, B) = Y_{\mathbf{I}}^{1/2} - [B_0 + B(\beta)] = 0 \quad (19)$$

$$\text{其中 } Y_{\mathbf{I}} = \frac{1}{2} Y : J : Y \quad (20)$$

Y 为损伤应变释放率的第二不变量, J 为对称四阶张量, B_0 为损伤强化初始阈值, $B(\beta)$ 为损伤阈值增量, β 为总损伤量。且

$$B = \frac{\partial \psi_d(\beta)}{\partial \beta} \quad (21)$$

$\psi_d(\beta)$ 为总损伤强化自由能。

如果取损伤耗散势为 $F_d(Y, B)$, 它应为凸函数, 且在 $Y=0$ 时取极小值。根据不可逆热力学正交条件, 有

$$\dot{\omega}_{mn} = \lambda_d \frac{\partial F_d}{\partial (-Y_{mn})}, \quad \dot{\beta} = \lambda_d \frac{\partial F_d}{\partial (-B)} \quad (22)$$

其中标量函数 $\lambda_d > 0$, 保证损伤率垂直指向耗散势曲面 $F_d = \text{const}$ 外。

当满足(19)式时, 有

$$\frac{\partial F_d}{\partial Y} : \dot{Y} + \frac{\partial F_d}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial \beta} \left(-\lambda_d \frac{\partial F_d}{\partial B} \right) = 0$$

则

$$\lambda_d = \begin{cases} \frac{\frac{\partial F_d}{\partial Y} : \dot{Y}}{\frac{\partial F_d}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial \beta} \frac{\partial F_d}{\partial B}} > 0 & \text{若 } F_d = 0, \text{ 且 } \frac{\partial F_d}{\partial Y} : \dot{Y} > 0 \\ 0 & \text{若 } F_d < 0, \text{ 或 } F_d = 0 \text{ 但 } \frac{\partial F_d}{\partial Y} : \dot{Y} < 0 \end{cases} \quad (23)$$

$$\text{故 } \dot{\omega}_{mn} = \frac{\lambda_d}{2Y_{\mathbf{I}}^{1/2}} J : Y, \quad \dot{\beta} = \lambda_d = \frac{1}{2Y_{\mathbf{I}}^{1/2}} \frac{\partial B}{\partial \beta} \mathbf{1} : J : \dot{Y} \quad (24)$$

$$\text{且 } \dot{\beta} = 2\dot{\omega}_{\mathbf{I}}^{-1/2}, \quad \dot{\omega}_{\mathbf{I}} = \frac{1}{2} \dot{\omega} : J^{-1} : \dot{\omega} \quad (25)$$

其中 J^{-1} 为 J 的广义逆, 满足 $J: J^{-1}: J = J$.

为方便下面的公式推导, 我们采用 voigt (矢量) 记号, 把 e_{ij}, σ_{ij} 写成矢量形式 $\varepsilon_i, \sigma_i (i=1, \dots, 6)$ 。但由于 $\omega_{ij}, \gamma_{ij}, Y_{ij}$ 不一定对称, 仍记成矢量形式 $\omega_I, \gamma_I, Y_I (I=1, \dots, 9)$, 此时独立变量为 9 个。当损伤存在正交的主方向时, I 变为 i , 只有 6 个独立变量。 J_{IJ} 为二阶对称张量。

$$\gamma_I = \Omega_{Ij} \varepsilon_j \quad (I=1, \dots, 9; j=1, \dots, 6) \quad (26)$$

$$\sigma_i = \bar{c}_{ij} \varepsilon_j \quad (i, j=1, \dots, 6) \quad (27)$$

$$\text{其中 } c_{ij} = \bar{c}_{ij} + b_{MN} \Omega_{Mi} \Omega_{Nj} + g_{Mi} \Omega_{Mj} + g_{Mj} \Omega_{Ni} \quad (28)$$

$$d\sigma_i = \bar{c}_{ij} d\varepsilon_j + \frac{\partial \bar{c}_{ij}}{\partial \omega_M} \varepsilon_j d\omega_M \quad (29)$$

$$\text{又 } Y_I = -\frac{\partial W}{\partial \omega_I} = -(b_{MN} \Omega_{Ni} + g_{Mi}) \frac{\partial \Omega_{Mj}}{\partial \omega_I} \varepsilon_i \varepsilon_j \quad (30)$$

$$dY_I = M_{IJ} d\omega_J + N_{Ij} d\varepsilon_j \quad (31)$$

$$\text{其中 } M_{IJ} = -\left[b_{MN} \frac{\partial \Omega_{Mk}}{\partial \omega_I} \frac{\partial \Omega_{Nl}}{\partial \omega_J} + (b_{MN} \Omega_{Mk} + g_{Nk}) \frac{\partial^2 \Omega_{Nl}}{\partial \omega_I \partial \omega_J} \right] \varepsilon_k \varepsilon_l$$

$$N_{Ij} = -\left[(b_{MN} \Omega_{Mk} + g_{Nk}) \frac{\partial \Omega_{Nj}}{\partial \omega_I} + (b_{MN} \Omega_{Mj} + g_{Nj}) \frac{\partial \Omega_{Nk}}{\partial \omega_I} \right] \varepsilon_k \quad (32)$$

$$d\omega_I = -\frac{\lambda_d}{2Y_{\mathbf{I}}^{1/2}} J_{IJ} Y_J = A_{IJ} dY_J = D_{Ij} d\varepsilon_j \quad (33)$$

$$\text{其中 } A_{IJ} = -\frac{1}{4Y_{\mathbf{I}} \frac{\partial B}{\partial \beta}} J_{IM} J_{JN} Y_M Y_N \quad (34)$$

$$D_{Ij} = (\delta_{IM} - A_{ML} M_{LI})^{-1} A_{MN} N_{Nj} \quad (35)$$

$$\therefore d\sigma_i = \bar{c}_{ij} d\varepsilon_j \quad (36)$$

$$\text{其中 } \bar{c}_{ij} = \bar{c}_{ij} + \frac{\partial \bar{c}_{ik}}{\partial \omega_L} \varepsilon_k D_{Lj} \quad (37)$$

至此, 得到了损伤材料的微分形式本构关系。

材料的损伤破坏仍可按文献 [9] 的定义: 当总损伤 β 达到其临界值 β_c 时, 材料开始出现损伤失稳。即

$$\beta = \int_0^t 2\omega_{\mathbf{I}}^{1/2} dt = \beta_c \quad (38)$$

以上各公式中 $\Omega_{IJ}, b_{MN}, g_{ML}, J_{IJ}$ 均可由实验确定, 其下标大写字母取值 $1 \sim 9$, 小写字母取值 $1 \sim 6$ 。当相对变形对称时, 大写字母下标成为小写字母下标, 且取值 $1 \sim 6$ 。

2 从微结构损伤模型的化简考察现有的几种主要损伤模型

1 J.P. Cordebois 和 F. Sidoroff 的弹性各向异性损伤模型 [2]

该损伤模型是把柯西应力换成有效应力

$$\sigma = M(D) : \sigma \quad (39)$$

其中 $M(D)$ 为四阶张量表示的线性算子, 无损时 $M(D)$ 为恒等张量。

根据弹性能等效假设, 有效弹性常数张量为

$$\bar{c} = M^{-1} : c : M^{-T} \quad (40)$$

在微结构损伤模型中, 令

$$b_{mnpq} = c_{mnpq}, \quad g_{mnl} = -c_{mnl} \quad (41)$$

$$\text{得} \quad c_{ijkl} = c_{mnpq} (\delta_{mi} \delta_{nj} - \Omega_{mnlj}) (\delta_{pk} \delta_{ql} - \Omega_{pqkl}) \quad (42)$$

式中 δ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) 为单位张量算子。

如果取

$$\Omega_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} - M_{ij}^{-1}{}_{kl}, \quad \omega_{mn} = D_{mn} \quad (43)$$

则微结构损伤模型化为 J.P. Cordebois 和 F. Sidoroff 的弹性各向异性损伤模型。

当损伤主轴与应力主轴共轴时, 记 M 为二阶张量形式, 则

$$M(D) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-D_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-D_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-D_3} \end{pmatrix} \quad (44)$$

$$\Omega(\omega) = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\text{则损伤主变量一致, } \omega_i = D_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (46)$$

2 J.Lemaitre 的各向同性韧性损伤模型^[4]

J.Lemaitre 认为材料的应变能可分解为弹性部分和塑性部分, 其弹性应变能密度为

$$\rho \psi_e = \frac{1}{2} c : \varepsilon^e : \varepsilon^e (1 - D) \quad (47)$$

在微结构损伤模型中, 忽略弹性应变能密度中相对变形的二次式, 且取

$$g_{mnpq} = -\frac{1}{2} c_{mnpq}, \quad \Omega_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} D \quad (48)$$

得 J.Lemaitre 各向同性韧性材料损伤模型。

3 D.Krajcinovic 脆性材料平面裂纹损伤模型^[3]

对于各向同性材料,

$$\left. \begin{aligned} c_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ b_{ijkl} &= b_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + b_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + b_3 \delta_{il} \delta_{jk} \\ g_{ijkl} &= g_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + g_2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

此时只有 7 个独立系数, 弹性系数张量为

$$\begin{aligned} \bar{c}_{ijkl} = & \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + b_1 \Omega_{ppij} \Omega_{qqkl} \\ & + b_2 \Omega_{mni j} \Omega_{mnkl} + b_3 \Omega_{mni j} \Omega_{nmkl} \\ & + g_1 (\delta_{ij} \Omega_{ppkl} + \delta_{kl} \Omega_{ppij}) + g_2 (\Omega_{ijkl} + \Omega_{jikl}) \end{aligned} \quad (50)$$

$$\text{令} \quad \Omega_{ijkl} = \delta_{il} \omega_{jk} = \delta_{il} \frac{\omega_j \omega_k}{\sqrt{\omega_p \omega_p}} \quad (51)$$

其中 ω_l 为D.Krajcinovic平面裂纹损伤模型的矢量损伤张量。从而有

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + g_1 (\omega_p \omega_p)^{-\frac{1}{2}} \omega_k \omega_l \varepsilon_{kl} \varepsilon_{jj} \\ & + g_2 (\omega_p \omega_p)^{-\frac{1}{2}} \omega_k \omega_l \varepsilon_{km} \varepsilon_{km} + \frac{1}{2} (b_1 + b_3) \left(\frac{\omega_k \omega_l}{\sqrt{\omega_p \omega_p}} \varepsilon_{kl} \right)^2 \\ & + \frac{1}{2} b_2 \omega_k \omega_l \varepsilon_{km} \varepsilon_{lm} \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \bar{c}_{ijkl} = & \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + g_1 (\omega_p \omega_p)^{-\frac{1}{2}} (\delta_{ij} \omega_k \omega_l + \delta_{kl} \omega_i \omega_j) \\ & + g_2 (\omega_p \omega_p)^{-\frac{1}{2}} (\delta_{ij} \omega_j \omega_k + \delta_{jk} \omega_i \omega_l) + (b_1 + b_3) (\omega_p \omega_p)^{-1} \omega_i \omega_j \omega_k \omega_l \\ & + b_2 (\delta_{il} \omega_j \omega_k + \delta_{jk} \omega_i \omega_l) \end{aligned} \quad (53)$$

这即得到D.Krajcinovic平面裂纹损伤模型, 其中第四项和第五项为高阶损伤变量的影响项。

在D.Krajcinovic损伤模型中, 由于仅限于平面裂纹损伤模型, ω_1 为主要损伤变量, 而

$$\omega_2 = \omega_3 = 0, \quad d\omega_2 = \omega_1 d\theta, \quad d\omega_3 = 0 \quad (54)$$

其中 θ 为平面裂纹扩展过程中绕 x_3 轴的转角。

L.M.Kachnov损伤模型为 $\nu=0$ 时D.Krajcinovic损伤模型。

3 正交各向异性微结构损伤模型

正交各向异性损伤的损伤张量 ω_{ij} 为对称张量, 从而损伤应变能释放率也为对称张量。

根据Rivlin和Ericksen表现定理^[10]

$$\begin{aligned} \Omega_{ijkl}(\omega_{mn}) = & \alpha \delta_{ij} \omega_{kl} + \beta \delta_{kl} \omega_{ij} + \rho (\delta_{ik} \omega_{jl} + \delta_{il} \omega_{jk} + \delta_{jk} \omega_{il} + \delta_{jl} \omega_{ik}) \\ & + A \omega_{ij} \omega_{kl} + B \delta_{ij} \psi_{kl} + c \delta_{kl} \psi_{ij} + D (\delta_{ik} \psi_{jl} + \delta_{il} \psi_{jk} \\ & + \delta_{jk} \psi_{il} + \delta_{jl} \psi_{ik}) \\ & + G \omega_{ij} \psi_{kl} + H \omega_{ik} \psi_{jl} + K \psi_{ij} \psi_{kl} \end{aligned} \quad (55)$$

$$\text{其中} \quad \psi_{ij} = \omega_{ip} \omega_{jp} \quad (56)$$

(55)式中第一项为宏观应变引起的球形相对变形, 第二项为球形宏观应变引起的相对变形, 第四项及以后各项为损伤变量 ω_{ij} 的高于一次的乘积影响项。

若不考虑偶极应力, 由实验结果知, 相对变形为对称变形, 则可取 $\rho=1/4$, 并忽略其它各项。

$$\Omega_{ijkl} = \frac{1}{4} (\delta_{ik}\omega_{jl} + \delta_{il}\omega_{jk} + \delta_{jk}\omega_{il} + \delta_{jl}\omega_{ik}) \quad (57)$$

$$\text{则 } \gamma_{ij} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{il}\omega_{jl} + \omega_{il}\varepsilon_{jl}) \quad (58)$$

因此, 在损伤主轴坐标系中, 有

$$\Omega_{ij} = \text{diag} \left\{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \frac{\omega_2 + \omega_3}{2}, \frac{\omega_3 + \omega_1}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right\} \quad (59)$$

如果相对变形为非对称变形时, 则可取

$$\Omega_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik}\omega_{jl} + \delta_{il}\omega_{jk}) \quad (60)$$

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{il}\omega_{jl} \quad (61)$$

$$\omega_{ij} = \varepsilon_{il}^{-1}\gamma_{jl} = (\delta_{ij} - \varepsilon_{il}^{-1}\psi_{jl}) \quad (62)$$

上式表明, 如果能用实验手段测得微变形 ψ_{ij} , 则可直接得到损伤张量及其演变规律, 能更加真实地描述材料的损伤状态。当暂时欠缺这种有效的测试手段时, 用损伤内变量来描述材料的损伤状态是合理的, 它满足热力学本构关系所需的热力学条件。

若取坐标轴为损伤主轴, 记

$$\omega_{ij} = \sigma_{ij}\omega_{j_0} \quad (63)$$

这里 j_0 表示随 j 变, 但不求和。

$$\Omega_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\omega_{j_0} \quad (64)$$

弹性常数张量为

$$\begin{aligned} c_{ijkl} = & c_{ijkl} + \frac{1}{2} g_{ijkl}(\omega_{i_0} + \omega_{j_0}) + \frac{1}{2} g_{klij}(\omega_{k_0} + \omega_{l_0}) \\ & + \frac{1}{4} b_{ijkl}(\omega_{i_0} + \omega_{j_0})(\omega_{k_0} + \omega_{l_0}) \end{aligned} \quad (65)$$

对于各向同性材料, 有

$$\begin{aligned} c_{ijkl} = & [\lambda + g_1(\omega_{i_0} + \omega_{k_0}) + b_1\omega_{i_0}\omega_{k_0}]\delta_{ij}\delta_{kl} \\ & + [\mu + g_2(\omega_{i_0} + \omega_{j_0})](\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \\ & + \frac{(\omega_{i_0} + \omega_{j_0})^2}{4}(b_2\delta_{ik}\delta_{jl} + b_3\delta_{il}\delta_{jk}) \end{aligned} \quad (66)$$

4 混凝土材料拉、压加载的数值分析及与实验值^[3]的比较

1 单向拉伸情形

$$\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \leq 0, \omega_1 = \omega > 0, \omega_2 = \omega_3 = 0 \quad (67)$$

$$c_{ij} = EK \begin{bmatrix} 1 + 2c_1\omega + c_2\omega^2 & \bar{\nu} + c_3\omega & \bar{\nu} + c_3\omega \\ \bar{\nu} + c_3\omega & 1 & \bar{\nu} \\ \nu + c_3\omega & \bar{\nu} & 1 \end{bmatrix} \quad (68)$$

这里 $E K = \lambda + 2\mu$, E 为 Young 氏模量, $K = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, ν 为波松比, $\bar{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu}$,

$$c_1 = \frac{1}{E K} (g_1 + 2g_2), \quad c_2 = \frac{1}{E K} (b_1 + b_2 + b_3), \quad c_3 = \frac{1}{E K} g_1.$$

$$\sigma_1 = E K [(1 + 2c_1\omega + c_2\omega^2) - 2(\bar{\nu} + c_3\omega)\nu_t] \varepsilon_1 \tag{69}$$

$$\nu_t = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\bar{\nu} + c_3\omega}{1 + \bar{\nu}} = \nu + (1 - \nu)c_3\omega \tag{70}$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= -E K [c_1 + c_2\omega - 2c_3\nu_t] \varepsilon_1^2 \\ &= -E K \left[c_1 + c_2\omega - \frac{2c_3(\bar{\nu} + c_3\omega)}{1 + \bar{\nu}} \right] \varepsilon_1^2 \end{aligned} \tag{71}$$

当 $c_1 \leq \frac{2\bar{\nu}}{1 + \bar{\nu}} c_3 = 2\nu c_3, \quad c_2 \leq \frac{2}{1 + \bar{\nu}} c_3 = 2(1 - \nu)c_3$ (72)

$$Y d\omega \geq 0 \tag{73}$$

假设损伤强化为最简单的线性关系

$$B = a\beta \quad (a \geq 0) \tag{74}$$

若取 $J_{11} = 1$, 有

$$d\omega = \frac{d\beta}{\sqrt{2}}, \quad \omega = \frac{\beta}{\sqrt{2}}, \quad d\omega = \frac{dY}{2a} \tag{75}$$

$\therefore d\omega = D_t d\varepsilon_1$ (76)

$$D_t = -\frac{2[c_1 + c_2\omega - 2c_3\nu_t] \varepsilon_1}{\frac{2a}{E K} + \left(c_2 - \frac{2c_3^2}{1 + \bar{\nu}}\right) \varepsilon_1^2} \tag{77}$$

得 $\omega = -\frac{\left(c_1 - \frac{2\bar{\nu}}{1 + \bar{\nu}} c_3\right) (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_0^2)}{\frac{2a}{E K} + \left(c_2 - \frac{2c_3^2}{1 + \bar{\nu}}\right) \varepsilon_1^2}$ (78)

这里 $\omega = 0$ 时 $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ (79)

$$d\sigma_1 = E_t d\varepsilon_1 \tag{80}$$

$$d\varepsilon_2 = -n_t d\varepsilon_1 \tag{81}$$

$$E_t = E K [1 + 2c_1\omega + c_2\omega^2 - 2(\bar{\nu} + c_3\omega)n_t + 2(c_1 + c_2\omega - c_3\nu_t)D_t \varepsilon_1] \tag{82}$$

$$n_t = \nu_t + \frac{c_3}{1 + \bar{\nu}} D_t \varepsilon_1 \tag{83}$$

2 单向压缩情形

$$\varepsilon_1 < 0, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \geq 0, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \omega_3 = \omega > 0 \tag{84}$$

$$\bar{c}_{ij} = E K \begin{bmatrix} 1 & \bar{\nu} + c_3\omega & \bar{\nu} + c_3\omega \\ \bar{\nu} + c_3\omega & 1 + 2c_1\omega + c_2\omega^2 & \bar{\nu} + 2c_3\omega + c_4\omega^2 \\ \bar{\nu} + c_3\omega & \bar{\nu} + 2c_3\omega + c_4\omega^2 & 1 + 2c_1\omega + c_2\omega^2 \end{bmatrix} \tag{85}$$

其中 $c_4 = \frac{b_1}{EK}$.

$$\sigma_1 = EK[1 - 2(\bar{v} + c_3\omega)v_c]\varepsilon_1 \quad (86)$$

$$v_c = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\bar{v} + c_3\omega}{1 + \bar{v} + 2(c_1 + c_3)\omega + (c_2 + c_4)\omega^2} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= -2EK^2c_3\varepsilon_1 + [(c_1 + c_3) + (c_2 + c_4)\omega]\varepsilon_2 + \varepsilon_2 \\ &= 2EK^2c_3 - [(c_1 + c_3) + (c_2 + c_4)\omega]v_c + v_c\varepsilon_1^2 \\ &= 2EK^2(c_3 - \bar{v}c_1) + \frac{[(c_1 + c_3)c_3 - \bar{v}(c_2 + c_4)]\omega}{v + c_3\omega} \varepsilon_2^2 \end{aligned} \quad (88)$$

当 $v_c \leq c_3$, $v(c_2 + c_4) \leq c_3(c_1 + c_3)$ 时, (88)式满足热力学条件. 由(72)和(88)式, 得热力学限制条件

$$c_1 \leq v^*c_3, \quad \left(v^* = \min\left(\frac{1-v}{v}, 2v\right)\right) \quad c_2 \leq \frac{2}{1+\bar{v}}c_3 = 2(1-v)c_3$$

$$c_4 \leq \left[c_1 + \frac{1-\bar{v}}{1+\bar{v}}c_3\right] \frac{c_3}{\bar{v}} \quad (89)$$

损伤强化准则仍取(74), (75)式,

$$d\omega = D_c d\varepsilon_1 \quad (90)$$

$$d\varepsilon_2 = -n_c d\varepsilon_1 \quad (91)$$

$$d\sigma_1 = E_c d\varepsilon_1 \quad (92)$$

$$\begin{aligned} D_c &= \{2(\bar{v} + c_3\omega)[(c_1 + c_3) + (c_2 + c_4)\omega]v_c\varepsilon_1\} / \left\{ [2((c_1 + c_3) + (c_2 + c_4)\omega)v_c \right. \\ &\quad \left. - c_3]^2\varepsilon_1^2 - [1 + \bar{v} + 2(c_1 + c_3)\omega + (c_2 + c_4)\omega^2] \left[\frac{a}{EK} + (c_2 + c_4)v_c^2\varepsilon_1^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (93)$$

$$\begin{aligned} n_c &= \left\{ [2((c_1 + c_3) + (c_2 + c_4)\omega)v_c - c_3]c_3v_c\varepsilon_1^2 - (\bar{v} + c_3\omega) \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{a}{EK} + (c_2 + c_4)v_c^2\varepsilon_1^2 \right] \right\} / \left\{ [2((c_1 + c_3) + (c_2 + c_4)\omega)v_c - c_3]^2\varepsilon_1^2 \right. \\ &\quad \left. - [1 + \bar{v} + 2(c_1 + c_3)\omega + (c_2 + c_4)\omega^2] \left[\frac{a}{EK} + (c_2 + c_4)v_c^2\varepsilon_1^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (94)$$

$$E_c = EK\{1 - 2(\bar{v} + c_3\omega)n_c - 2c_3v_cD_c\varepsilon_1\} \quad (95)$$

且
$$\omega = \frac{[c_3 - (c_1 + c_3)v_c]v_c\varepsilon_1^2 - [c_3 - (c_1 + c_3)v_{c0}]v_{c0}\varepsilon_{10}^2}{\frac{a}{EK} + (c_2 + c_4)v_c^2\varepsilon_1^2} \quad (96)$$

式中
$$v_{c0} = v_c|_{\omega=0} = \frac{\bar{v}}{1+\bar{v}} = v. \quad (97)$$

3 数值分析及与实验值的比较

为了便于比较, 采用文献[3]中混凝土材料单向拉、压的实验数据. 初始值 σ_1^0 , ε_1^0 , 应力最大处 σ_1^m , ε_1^m 及材料破断处 σ_1^f , ε_1^f 均可由实验测得.

在损伤初始处 $B_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_0$ (98)

在应力最大处

$\sigma_t = \sigma_t^m, E_t = 0$ (99)

$\sigma_c = \sigma_c^m, E_c = 0$ (100)

在材料破坏处

$\sigma_t = \sigma_t^f, \sigma_c = \sigma_c^f$ (101)

$\beta = \beta_c = 1$ (102)

由此可确定 c_1, c_2, c_3 和 c_4 .

经计算, 其基本数据为:

$$\begin{aligned}
 S_m &= \frac{\sigma^m}{E K \varepsilon_m} = 0.70 & S_f &= \frac{\sigma_f}{E K \varepsilon_f} = 0.48 \\
 A_m &= \frac{a}{E K \varepsilon_m^2} = 0.84 & A_f &= \frac{a}{E K \varepsilon_f^2} = 0.55 \\
 c_1 &= -0.677 & c_2 &= 0.048 \\
 c_3 &= 0.500 + 0.207 \text{sign}(\varepsilon_1) & c_4 &= 0.313 \\
 \omega_m &= 0.269 & \omega_f &= 0.489 \\
 \nu_t^m &= 0.341 & \nu_t^f &= 0.436
 \end{aligned}
 \tag{103}$$

图2~图4分别为单向拉伸的应力应变曲线、泊松比及体积应变曲线。
图5~图7分别为单向压缩的应力应变曲线、泊松比及体积应变曲线。

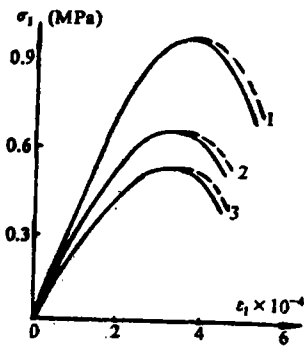


图2

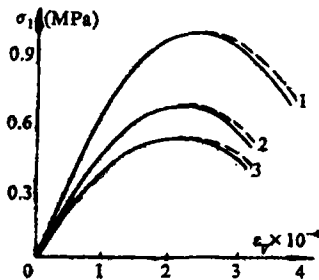


图4

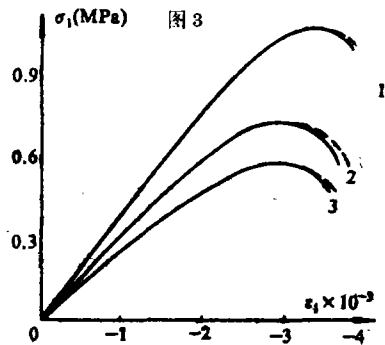
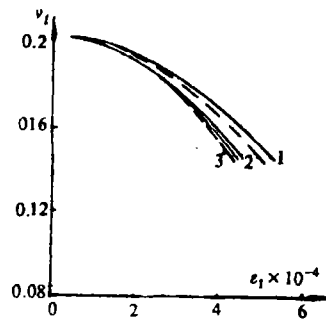


图5

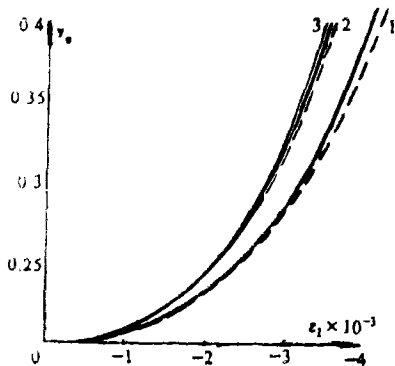


图6

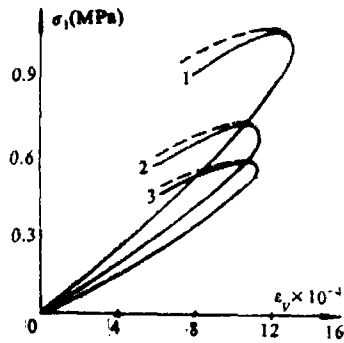


图7

如图所示, 1, 2, 3 分别表示三组不同的实验结果(点)和计算结果。与实验值比较, 本文的计算结果(实线)比D.Krajcinovic模型(虚线)能更好地描述失稳后部分的规律。

5 结 论

1. 本文提出的微结构损伤理论, 物理机制比较清楚, 相对变形描述微缺陷引起的材料损伤比较合理。在暂时欠缺有效的测试手段测定微结构变形时, 用损伤内变量来描述材料损伤是合理的, 它满足热力学本构关系所需的热力学条件。若用对称张量描述各向异性损伤场, 得到正交各向异性损伤理论。

2. 微结构损伤理论可把目前公认的几种主要损伤模型联系起来, 后者可看成前者的一些特例。只要对微结构理论中的一些能量密度系数加以某种限制, 给出相应损伤模型, 就可分别化简成为J.P.Cordebois和F.Sidoroff弹性各向异性损伤模型; D.Krajcinovic脆性材料平面裂纹损伤模型, J.Lemaitre各向同性损伤模型及Kachanov损伤模型。通过对现有损伤模型的共性、差别和局限性的研究, 可望在深入研究和充实微结构理论的进程中得到一个统一的连续损伤力学理论。

3. 以混凝土材料为例的计算结果表明, 该损伤模型的计算结果与实验数据相当吻合, 说明了该模型的有效性和实用性。

4. 微结构损伤理论的提出是作者的一个初步尝试, 还有待于对各种材料在不同的加载条件和环境下的具体分析, 以及进一步的实验和数值验证。

参 考 文 献

- [1] Mindlin R D. Micro-structure in Linear Elasticity. Arch. Rational Mech. Anal., 1964; 16: 51~78
- [2] Cordebois J P, Sidoroff F. Damage Induced Elastic Anisotropy. Colloque Euromech 115, Villard de lans, 1979
- [3] Krajcinovic D, Fonseka G U. The Continuous Damage Theory of Brittle Materials. ASME, J. Appl. Mech., 1981; 49: 809~824
- [4] Lemaitre J. A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture,

- J. Eng. Mat. and Mech., Jan 1985, 107:83~89
- [5] Kachanov L. M. On the Creep Fracture Time. Izv ANSSR, Otd Tekhn Nauk, No.8, 1958, 26~31, (in Russian)
- [6] 郝松林, 陈铸曾. 关于损伤力学. 国防科技大学学报, 1984, 6(2)
- [7] 村上澄男. 损伤力学——材料损伤与断裂的连续介质力学处理. 材料第31卷, 第340号, 1~13, 1982
- [8] Krajcinovic D. Continuum Damage Mechanics. ASME J. Appl. Mech., Vol.37, No.1, Jan. 1984, 1~6
- [9] 李灏, 王军, 彭柯. 材料形变失稳的各向异性损伤准则及其在成形极限中的作用. 华中工学院, 力学专辑1985, 1~14
- [10] Rivlin R S, Ericksen J L. Stress-deformation Relations for Isotropic Materials. J. Rat. Mech. Anal., 1955, 4: 323~425

Microstructural Continuous Damage Theory

Yang Guangsong

Abstract

In this paper, the microstructural continuous damage theory describing an anisotropic damage field is formulated. With various simplifications, this damage model can be reduced to a few major models well known at present, such as the elastic anisotropic damage tensor model presented by J.P. Cordebois and F. Sidoroff; the planar micro-cracks damage vector model for brittle materials by D. Krajcinovic; the isotropic damage scalar model by J. Lemaitre, and the unidimensional damage model by L. M. Kachanov. By means of a tentative test for the present theory, the author uses it for the analysis of the concrete specimen under uni-axial tension and compression, as exemplified by D. Krajcinovic. The numerical results obtained show good agreement with the experimental values.

Key words: microstructure damage; relative deformation, damage mechanics