国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第11卷第3期 1989年9月 Vol.11 No.3

S—N曲线拟合的灰色方法

郑荣跃 秦子增
（航天技术系）

摘 要 本文借助于灰色系统理论中GM(1, 1)的直接建模方法，能方便地确定了三参数经验公式$N(S-S_0)^m=D$中的三个参数S_0，m和D，从而为工程上广泛利用三参数经验公式拟合S—N曲线试验数据提供了一个较新的方法。算例表明，本方法简单、实用、精度较高。

关键词 疲劳；S—N曲线，灰色系统，建模
分类号 O346.2

引 言

对于材料疲劳最基本同时也是很有效的研究是S—N图[1]，它相当于循环应力幅S_a（或循环应力范围S_r或最大应力S_m）下到失效的循环数（疲劳寿命）N的相应关系。在设计中，S—N曲线作为结构寿命预测的基础，必须建立在大量的试验数据之上。如何以函数形式将S—N关系较准确的拟合这些数据是人们广泛讨论的问题。至今有关S—N曲线已作过大量工作，其中最常用的是Basquin方程

$$NS^m=c \tag{1}$$

其中m，c为实验常数。然而，根据大量金属材料疲劳性能曲线的研究表明[2]：只有中等寿命区(10^4～10^6)的S—N曲线适合用Basquin方程拟合，它们在双对数$\lg N$—$\lg S$或半对数$\lg N$—S坐标系中基本上是一直线；在中、长寿命区（$>10^6$）S—N曲线不满足Basquin方程。非金属材料中的大多数即使在中等寿命区也不满足Basquin方程。因此应考虑选用三参数经验公式[3]

$$N(S-S_0)^m=D \tag{2}$$

进行曲线拟合。式中S_0为$N\to\infty$时的应力，可近似代表疲劳极限，m，D均为待定常数。以往国内外也都曾用式(2)来拟合金属材料在中、长寿命区的S—N曲线，但因没有找到一个行之有效的参数确定方法而未被普遍应用。最近高镇同等[2]应用他们提出的以线性相关系数r为目标函数确定参数S_0的方法[3]，求得了式(2)中的三个参数。但这种方法需要迭代求解，计算不便，应用受到限制。我们认为，利用灰色系统[4]中GM(1, 1)的直接建模方法[5]，很容易求得式(2)的三个参数。算例表明：

1988年12月1日收稿

该方法免去了迭代步骤，计算简单、精度较高，故可望在工程上推广应用。

1　公式推导

邓聚龙教授提出的灰色系统概念已在社会、经济及工程系统等领域得到了应用[4]，文献[5]又导出了其中GM(1,1)的直接建模法。该文认为：对一般的离散函数 $x(t_k)$，$t_k \in T$，$T=\{t_k|t_k \in R,\ k\in K$，对 $\forall i,j \in K$，若$i<j$，则$t_i<t_j\}$，可直接建立单序列的一阶线性动态模型，

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt}+a\hat{x}(t)=u \tag{3}$$

其中模型参数　$(a\quad u)^T=(B^TB)^{-1}B^TY_N$　　(4)

$$B=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(x(t_1)+x(t_2)) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}(x(t_{n-1})+x(t_n)) & 1 \end{pmatrix} \qquad Y_N=\begin{pmatrix} \frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1} \\ \vdots \\ \frac{x(t_n)-x(t_{n-1})}{t_n-t_{n-1}} \end{pmatrix} \tag{5}$$

解方程(4)得连续的时间响应形式：

$$\hat{x}(t)=ce^{-at}+b \qquad t\in R \tag{6}$$

或离散的时间响应形式：

$$\hat{x}(t_k)=ce^{-at_k}+b \qquad k\in K,\ t_k\in R \tag{7}$$

其中$b=u/a$，c由初始条件确定。为求b，c的最优值，可应用下式

$$(\hat{b}\quad \hat{c})^T=(D^TD)^{-1}D^TY \tag{8}$$

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{-at_1} & e^{-at_2} & \cdots & e^{-at_n} \end{pmatrix}^T \tag{9}$$

$$Y=(x(t_1)\ \ x(t_2)\ \ \cdots\ \ x(t_n))^T \tag{10}$$

于是得到具有两个最优系数的GM(1,1)响应。

对已给出的拟合S—N曲线的三参数公式

$$N(S-S_0)^m=D$$

两边取对数有　$\ln N+m\ln(S-S_0)=\ln D$

转换得　$S=S_0+D^{\frac{1}{m}}e^{-\frac{1}{m}\ln N}$

为与习惯一致将$\ln N$换为$\lg N$得

$$S=S_0+D^{\frac{1}{m}}e^{-\frac{\ln 10}{m}\lg N} \tag{11}$$

显然，若令$S_0=b$，$D^{\frac{1}{m}}=c$，$\frac{\ln 10}{m}=a$，则式(11)与式(6)或(7)一致。这里已把$\lg N$认作自变量t，而把S认作应变量$x(t)$.至此，利用GM(1，1)的直接建模法很容易得到式(3)中的三个参数S_0，m和D，且

$$S_0=b,\ m=\ln 10/a,\ D=c^m$$

具体作法见算例。

2 算 例

为说明方法的有效性，同时也为方便比较，对文献[2]给出的数据进行计算。

某航空有机玻璃S—N曲线试验数据如表1.

表1

组 号 i	$S(\mathrm{kgf/cm^2})$	$t=\lg N$	备注
1	380.0	2.5933	
2	353.6	2.8979	成组试验 t 为疲劳寿命中位数的对数
3	326.4	3.2201	
4	299.2	3.8671	

记lg$N$为 t，S 为$x(t)$，则GM(1,1)模型为

$$\frac{dS}{d\lg N}+aS=u$$

且 $(a\quad u)^T=(B^TB)^{-1}B^TY_N$

而

$$B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}(380+353.6) & 1\\ -\frac{1}{2}(353.6+326.4) & 1\\ -\frac{1}{2}(326.4+299.2) & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-366.8 & 1\\ -340.0 & 1\\ -312.8 & 1\end{bmatrix}$$

$$Y_N=\begin{bmatrix}\dfrac{353.6-380}{2.8979-2.5933}\\ \dfrac{326.4-353.6}{3.2201-2.8979}\\ \dfrac{299.2-326.4}{3.8671-3.2201}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-86.671044\\ -84.41962\\ -42.04018\end{bmatrix}$$

于是有

$$(B^TB)^{-1}B^TY_N=\begin{bmatrix}0.82831707\\ 210.474375\end{bmatrix}$$

则 $a=0.82831707$ $\quad b=\dfrac{u}{a}=\dfrac{210.474375}{0.82831707}=254.0988018$

利用式(8)，(9)，(10)可求得b，c的最优值

$$D^T=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0.1167086 & 0.0906835 & 0.0694420 & 0.00406326\end{pmatrix}$$

$$Y=(380,\quad 353.6,\quad 326.4,\quad 299.2)^T$$

则$(\hat{b}\ \hat{c})^T=(D^TD)^{-1}D^TY=(254.2903\quad 1077.4005)^T$

得到最后结果是：$S_0=b=254.2903$

$$m=\frac{\ln 10}{a}=2.7798$$

$$D=1077.4005^{2.7798}=2.6885\times 10^8$$

将以上结果与文献[2]的结果从两个方面进行比较，一是求出预测的$\hat{S}$值与对应的实测S值之间的相关系数r_1，计算公式见文献[6]；二是求$\lg N$和$\lg(S-S_0)$之间的线性相关系数ρ[2]，比较结果如表2.

表 2

方　法	S_0	m	D	r_1	ρ
本文方法	254.2903	2.7798	2.6885×10^8	0.9984587	-0.9982212
文[2]方法	270.8948	2.1425	9.4445×10^6	0.9984020	-0.9991391

由表2可见，就S值的拟合相关性而言，本文方法精度略高于文献[2]方法；而从$\lg N$—$\lg(S-S_0)$的线性相关性来看，本文方法精度却又略低于文献[2]方法。通过大量的实例计算发现，以S值的拟合接近程度来说明曲线拟合的精确性更可信，在此限于篇幅不再详细讨论。需要指出的是，本文求得的S_0值小于文献[2]求得的S_0值，偏保守，却可信。

3 结　论

由算例结果不难看出，本文方法拟合得到的S—N曲线，与实际材料的S—N曲线较为接近，故可用于外推求得材料的疲劳强度。此外，从计算过程可见，本文计算简单明了，用普通的计算器也可求解。再者，从工程应用角度，求得a，u以后再利用初始条件便可得b和c，很快就得到S_0，m和D，这样得到的结果与求b，c的最优值得到的结果偏差并不大，工程上可接受。综上所述可以说本文方法简单、实用、方便，为工程上广泛应用三参数S—N曲线经验公式提供了一条很好的途径。

本文方法可方便地推广到拟合P—S—N曲线，至于如何进一步提高精度以及如何在本方法的理论指导下安排试验将在以后被讨论。

参 考 文 献

[1] Yao J T P, et.al. Stochastic Fatigue, Fracture and Damage Analysis. Structural Safety, 1986; (3)

[2] 高镇同等. S—N曲线拟合法. 北京航空学院学报，1987；(1)

[3] 高镇同. 疲劳应用统计学. 国防工业出版社，1986

[4] 邓聚龙. 灰色系统（社会经济）。国防工业出版社，1985

[5] 王义闹. GM(1, 1)的直接建模方法及性质. 系统工程理论与实践，1988；(1)

[6] 王森华等. 预测学理论与方法. 吉林省农机所，1983

Grey Method for Fitting S-N Curve

Zheng Rongyue Qin Zizeng

Abstract

In this paper, a new method is provided to fit the fatigue test data of S—N curves using the expression $N(S-S_0)^m=D$ which can be applied to engineering extensively. By means of the direct modelling method of GM(1, 1) in the grey system theory, three parameters S_0, m and D are determined. The calculation shows that this method is accurate, simple and practical.

Key words: fatigue; S—N curve, grey system, modelling