国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第11卷第3期　1989年9月　Vol.11 No.3

解非线性振动问题的摄动谐波平衡法

孙世贤　唐乾刚

（航天技术系）

摘　要　本文在谐波平衡法的基础上，引进摄动的思想，得出了用解析法解非线性振动问题的一个新的有效方法——摄动谐波平衡法。该方法无需对解的形式及谐波系数的量级预先有所了解，这是谐波平衡法所不能比拟的。另外，该方法使非线性振动问题的求解过程变得简单，只涉及解线性代数方程的运算，不必求解微分方程，这又比Lindstedt—Poincaré方法、多尺度方法优越。

关键词　摄动；非线性振动，谐波平衡

分类号　O322

1　问题的提出

解非线性振动问题的近似解析方法很多，诸如伽辽金法、等效线性化法、渐近法、Lindstedt—Poincaré 方法、多重尺度法以及谐波平衡法等等。谐波平衡法对于求一阶近似解很方便，但精度不高。为了提高精度，需要对解先验地了解很多，或者在解中取足够多的谐波项，并且要在计算过程中检查所有忽略的谐波系数的量级，否则就会得到不精确的近似解[1]。谐波平衡法的这种致命弱点若不加以克服，很难得到推广应用。

Atadan 和 Huseyin 1984 年曾经提出过对谐波平衡法的一个改进方案[2]。其基本思想是将方程的解设为含参数的谐波级数，原方程对参数的顺序求导得到一系列摄动方程，再将所设的解代入摄动方程后确定谐波系数，从而得到微分方程的解。该方法在理论上是正确的，但摄动方程是一系列微分方程，在将解代入摄动方程时要进行大量繁琐的微分运算，而且繁琐程度将随摄动方程阶的提高而大大增加，致使该方法的推广应用受到很大限制。

2　摄动谐波平衡法的基本思想

如果在谐波平衡法的基础上引进摄动思想，不仅能克服谐波平衡法的弱点，而且解题过程变得特别简单，甚至只需要进行一些初等的代数运算，就可求得非线性振动问题的足够精确的近似分析解。

方法是将解的形式表为

$$u=\varepsilon a^{*}\cos\varphi+\varepsilon^{2}\sum_{i=0}^{\infty}b_{i}\cos i\varphi+\varepsilon^{3}\sum_{i=0}^{\infty}c_{i}\cos i\varphi+o(\varepsilon^{4})\tag{1}$$

1989年元月3日收稿

或将一阶谐波合并，将上式表为

$$u=\varepsilon a\cos\varphi+\varepsilon^2\sum_{i=0}^{\infty}b_i\cos i\varphi+\varepsilon^3\sum_{i=0}^{\infty}c_i\cos i\varphi+o(\varepsilon^4) \tag{2}$$

其中

$$b_1=c_1=\cdots=0 \tag{3}$$

$\varphi=\omega t+\beta_0$，$0<\varepsilon\ll 1$为表示振幅量级的小参数，b_i，c_i，…为待定系数，εa为振幅。所设解中第一项是派生解。这样设解是由于考虑到弱非线性问题中，非线性项是对相应的派生系统的摄动，因而用摄动解去逼近精确解；将各阶摄动项都表为无穷谐波级数，不仅把非线性项对各阶谐波的影响作了充分估计，而且在将(2)式代入运动微分方程后，各阶谐波系数的量级将跃然纸上，只需比较同阶谐波系数和ε同次幂的系数，即可确定待定的各阶谐波系数，从而求得微分方程的解。不必再象谐波平衡法那样，对各阶谐波系数的量级煞费苦心地去作分析比较，更不会出现忽略较低阶的项，而保留较高阶项那样的问题。

下面将分别以保守系统、耗散系统和强迫振动系统为例加以说明。

3 保守系统

考虑由方程

$$\ddot{u}+\alpha_1u+\alpha_2u^2+\alpha_3u^3=0 \tag{4}$$

所控制的系统，其中$\alpha_1>0$. 将解设为(2)式，其中a，b_i，c_i均为常数。代入(4)式后，得

$$\begin{aligned}&\varepsilon a(\alpha_1-\omega^2)\cos\varphi+\varepsilon^2\sum_{i=0}^{\infty}b_i(\alpha_1-i^2\omega^2)\cos i\varphi\\&+\varepsilon^3\sum_{i=0}^{\infty}(\alpha_1-i^2\omega^2)c_i\cos i\varphi+\varepsilon^2\alpha_2\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2\cos2\varphi\right)\\&+\varepsilon^3\alpha_2a\sum_{i=0}^{\infty}[b_i\cos(i-1)\varphi+b_i\cos(i+1)\varphi]\\&+\varepsilon^3\alpha_3a^3\left(\frac{3}{4}\cos\varphi+\frac{1}{4}\cos3\varphi\right)+o(\varepsilon^4)=0\end{aligned} \tag{5}$$

比较(5)式中同阶谐波的系数，得

$$\varepsilon^2b_0\alpha_1+\varepsilon^3c_0\alpha_1+\varepsilon^2\frac{1}{2}\alpha_2a^2=0 \tag{6}$$

$$\varepsilon a(\alpha_1-\omega^2)+\varepsilon^3\alpha_2a(2b_0+b_2)+\varepsilon^3\frac{3}{4}\alpha_3a^3=0 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&(\varepsilon^2b_i+\varepsilon^3c_i)(\alpha_1-i^2\omega^2)+\varepsilon^2\delta_{2i}\frac{\alpha_2}{2}a^2+\varepsilon^3\delta_{3i}\frac{\alpha_3}{4}a^3\\&+\varepsilon^3\alpha_2a(b_{i+1}+b_{i-1})=0\qquad(i=2,3,\cdots)\end{aligned} \tag{8}$$

式中

$$\delta_{2i}=\begin{cases}1&(i=2)\\0&(i\neq2)\end{cases},\qquad\delta_{3i}=\begin{cases}1&(i=3)\\0&(i\neq3)\end{cases} \tag{9}$$

在(6)式中比较 ε 同次幂的系数，得

$$b_0 = -\frac{\alpha_2}{2\alpha_1}a^2 \tag{10}$$

$$c_0 = 0 \tag{11}$$

设

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots \tag{12}$$

(12)式入(7)式，并注意到 $\omega_0^2 = \alpha_1$，比较 ε 同次幂的系数，得

$$2a\omega_0\omega_1 = 0 \tag{13}$$

$$2\omega_0\omega_2 a = \alpha_2 a(2b_0 + b_2) + \frac{3}{4}\alpha_3 a^3 - a\omega_1^2 \tag{14}$$

由(13)式有

$$\omega_1 = 0 \tag{15}$$

由(8)式比较 ε 同次幂系数，得

$$b_i = \frac{\alpha_2}{2(i^2-1)\alpha_1}a^2\delta_{2i} \tag{16}$$

$$c_i = \frac{\alpha_3 a^3}{4(i^2-1)\alpha_1}\delta_{3i} + \frac{\alpha_2 a}{(i^2-1)\alpha_1}(b_{i-1} + b_{i+1}) \tag{17}$$

由该二式解得

$$b_2 = \frac{\alpha_2}{6\alpha_1}a^2,\ b_k = 0\ \ (k = 3, 4, \cdots) \tag{18}$$

$$c_2 = \frac{\alpha_2 a}{3\alpha_1}(b_1 + b_3) = 0 \tag{19}$$

$$c_3 = \frac{3\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2^2}{96\alpha_1^2}a^3 \tag{20}$$

$$c_m = 0\quad (m = 4, 5, \cdots) \tag{21}$$

再由(14)式得

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}\frac{9\alpha_1\alpha_3 - 10\alpha_2^2}{24\alpha_1}a^2 \tag{22}$$

如果只求二阶近似解，则只需把(10)、(18)及(22)式的结果分别代入(2)及(12)式，于是有

$$u = \varepsilon a\cos\varphi + \varepsilon^2\frac{\alpha_2}{2\alpha_1}a^2\left(\frac{1}{3}\cos 2\varphi - 1\right) + o(\varepsilon^3) \tag{23}$$

$$\omega = \sqrt{\alpha_1}\left(1 + \frac{9\alpha_1\alpha_3 - 10\alpha_2^2}{24\alpha_1^2}\varepsilon^2 a^2\right) + o(\varepsilon^3) \tag{24}$$

这与用谐波平衡法、Lindstedt—Poincaré 方法及多重尺度法所得到的结果相符，然而求解过程却简单得多。另外，如果把前面求到的c_i也代入(2)式，则可容易地得到三阶近

似解，而用其它方法来求，其繁琐程度是不言而喻的。

4 非线性正阻尼系统

考虑由方程

$$\ddot{u}+2\bar{\mu}\dot{u}+\alpha_1 u+\alpha_2 u^2+\alpha_3 u^3=0 \tag{25}$$

控制的系统．式中阻尼的量级设为

$$\bar{\mu}=\varepsilon^2\mu \tag{26}$$

这样假设，使阻尼项与立方非线性项具有相同的量级。

仍将(25)式的解设为(2)式，但这里应注意到，由于阻尼的存在，振幅和频率不再是常数。因此，各阶谐波系数应设为时间的函数，故

$$\begin{aligned}\dot{u}=&-\varepsilon a\omega\sin\varphi-\varepsilon^2\sum_{i=2}^{\infty}b_i i\omega\sin i\varphi\\&-\varepsilon^3\sum_{i=2}^{\infty}c_i i\omega\sin i\varphi+\varepsilon\dot{a}\cos\varphi+\varepsilon^2\sum_{i=0}^{\infty}\dot{b}_i\cos i\varphi\\&+\varepsilon^3\sum_{i=0}^{\infty}\dot{c}_i\cos i\varphi+o(\varepsilon^4)\end{aligned} \tag{27}$$

式中 $\omega=\dot{\varphi}$．由于阻尼很小，决定了振幅和频率的变化相当缓慢，故可设相应的二阶导数等于零，即

$$\ddot{a}=\ddot{b}_i=\ddot{c}_i=\ddot{\varphi}=0 \tag{28}$$

以及设

$$\begin{aligned}&\dot{a}=\varepsilon a_1+\varepsilon^2 a_2+\cdots\\&\dot{b}_i=\varepsilon b_{i1}+\varepsilon^2 b_{i2}+\cdots\\&\dot{c}_i=\varepsilon c_{i1}+\varepsilon^2 c_{i2}+\cdots\\&\omega=\omega_0+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\cdots\\&\quad(i=0,2,3,\cdots)\end{aligned} \tag{29}$$

于是有

$$\begin{aligned}\ddot{u}=&2\left[-\varepsilon\dot{a}\omega\sin\varphi-\varepsilon^2\sum_{i=2}^{\infty}\dot{b}_i i\omega\sin i\varphi-\varepsilon^3\sum_{i=2}^{\infty}\dot{c}_i i\omega\sin i\varphi\right]\\&-\varepsilon a\omega^2\cos\varphi-\varepsilon^2\sum_{i=2}^{\infty}b_i i^2\omega^2\cos i\varphi-\varepsilon^3\sum_{i=2}^{\infty}c_i i^2\omega^2\cos i\varphi+o(\varepsilon^4)\end{aligned} \tag{30}$$

将(26)～(30)式代入(25)式，得

$$\begin{aligned}&-2\mu\varepsilon^3 a\omega\sin\varphi-2\varepsilon(\varepsilon a_1+\varepsilon^2 a_2)\omega\sin\varphi-\varepsilon^3\sum_{i=2}^{\infty}b_{i1}i\omega\sin i\varphi\\&+\varepsilon a(\alpha_1-\omega^2)\cos\varphi+\varepsilon^2\sum_{i=0}^{\infty}b_i(\alpha_1-i^2\omega^2)\cos i\varphi+\varepsilon^3\sum_{i=0}^{\infty}(\alpha_1\\&-i^2\omega^2)c_i\cos i\varphi+\varepsilon^2\alpha_2 a^2\cos^2\varphi+\varepsilon^3\alpha_2 a\sum_{i=0}^{\infty}[b_i\cos(i-1)\varphi\\&+b_i\cos(i+1)\varphi]+\varepsilon^3\alpha_3 a^3\left(\frac{3}{4}\cos\varphi+\frac{1}{4}\cos3\varphi\right)+o(\varepsilon^4)=0\end{aligned} \tag{31}$$

比较 $\cos i\varphi$、$\sin i\varphi$ 的系数，得

$$\left.\begin{aligned}&2\mu\varepsilon^3 a+2\varepsilon^3 a_2+2\varepsilon^2 a_1=0\\&-\varepsilon^3 b_{i1} i\omega=0\end{aligned}\right\}\tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned}&b_0=-\frac{1}{2}\frac{a_2}{a_1}a^2\\&c_0=0\\&\omega_1=0\\&\omega_2=\frac{a_2}{2\omega_0}\left[(2b_0+b_2)+\frac{3}{4}a_3 a^2\right]\\&b_i=\frac{a_2}{2(i^2-1)}a^2\delta_{2i}\\&c_i=\frac{a_3 a^3}{4(i^2-1)}\delta_{3i}+\frac{a_2 a^3}{i^2-1}(b_{i-1}+b_{i+1})\\&\qquad(i=2,3,\cdots)\end{aligned}\right\}\tag{33}$$

比较(32)式中 ε 中同次幂的系数，可得

$$\left.\begin{aligned}&a_1=0\\&a_2=-\mu a\\&b_{i1}=0\quad(i=0,2,3,\cdots)\end{aligned}\right\}\tag{34}$$

所以

$$\dot{a}=-\varepsilon^2\mu a=-\hat{\mu}a$$

积分之，得

$$a=a_0 e^{-\hat{\mu}t}\tag{35}$$

(35)式代入(33)式，得

$$b_0=-\frac{a_2}{2a_1}a_0^2 e^{-2\hat{\mu}t}\tag{36}$$

$$b_2=\frac{a_2}{6a_1}a_0^2 e^{-2\hat{\mu}t}\tag{37}$$

$$\omega_2=\frac{1}{\sqrt{a_1}}\frac{9a_1 a_3-10a_2^2}{24a_1}a_0^2 e^{-2\hat{\mu}t}\tag{38}$$

式中a_0为积分常数。将(36)～(38)及(33)式的结果分别代入(2)及(29)式的最后一式，得到该系统的二阶近似解：

$$u=\varepsilon a_0 e^{-\hat{\mu}t}\cos\varphi+\frac{a_2}{2a_1}\varepsilon^2 a_0^2 e^{-2\hat{\mu}t}\left(\frac{1}{3}\cos2\varphi-1\right)+o(\varepsilon^3)\tag{39}$$

$$\omega=\sqrt{a_1}\left(1+\frac{9a_1 a_2-10a_2^2}{24}\varepsilon^2 a_0^2 e^{-2\hat{\mu}t}\right)+o(\varepsilon^3)\tag{40}$$

式中 $\varphi=\omega_0 t+\beta=\omega t+\beta_0$，$\beta_0$为初相位。这一结果也与其它方法 所得 结果一致，而用本方法所涉及的运算要简单得多。

5　强迫振动系统

我们以谐扰力作用下的Duffing系统的主共振情况为例说明之，即考虑受方程

$$\ddot{u}+\omega_0^2u+\alpha u^3=Q\cos\omega t \qquad (\omega\approx\omega_0) \tag{41}$$

控制的系统的共振解。

由于是主共振情况($\omega\approx\omega_0$)，故可将激励幅值Q考虑为小量，可令$Q=\varepsilon^3q$，即激励和立方非线性项在同一量级上相互作用。此外，引入解谐参数，使$\omega=\omega_0+\varepsilon\sigma_1+\varepsilon^2\sigma_2$，将(41)式改写为

$$\ddot{u}+\omega_0^2u+\alpha u^3=\varepsilon^3q\cos\omega t \tag{42}$$

令其稳态解为(2)式，这里$\varphi=\omega t-\gamma$，γ为相位差。由于是稳态解，故谐波系数均为常数。将此解代入(42)式，得

$$\begin{aligned}&\left[\varepsilon a(\omega_0^2-\omega^2)+\frac{3}{4}\alpha\varepsilon^3a^3\right](\cos\omega t\cos\gamma+\sin\omega t\sin\gamma)\\&-\varepsilon^2\sum_{i=2}^{\infty}(i^2\omega^2-\omega_0^2)b_i\cos i\varphi-\varepsilon^3\sum_{i=2}^{\infty}(i^2\omega^2-\omega_0^2)c_i\cos i\varphi\\&+\frac{1}{4}\alpha\varepsilon^3a^3\cos3\varphi=\varepsilon^3q\cos\omega t+o(\varepsilon^4)\end{aligned} \tag{43}$$

比较同阶谐波，可得

$$\left.\begin{aligned}&\left[\varepsilon a(\omega_0^2-\omega^2)+\frac{3}{4}\alpha\varepsilon^3a^3\right]\cos\gamma=\varepsilon^3q\\&\left[\varepsilon a(\omega_0^2-\omega^2)+\frac{3}{4}\alpha\varepsilon^3a^3\right]\sin\gamma=0\\&\varepsilon^2(i^2\omega^2-\omega_0^2)b_i+\varepsilon^3(i^2\omega^2-\omega_0^2)c_i\\&-\frac{1}{4}\alpha\varepsilon^3a^3\delta_{3i}=0 \qquad (i=2,3,\cdots)\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

再考虑到$\omega=\omega_0+\varepsilon\sigma_1+\varepsilon^2\sigma_2$，比较上式中$\varepsilon$同次幂的系数，得

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_1=0\\&\left(\frac{3}{4}\alpha a^3-2\sigma_2\omega_0a\right)\cos\gamma=q\\&\left(\frac{3}{4}\alpha a^3-2\sigma_2\omega_0a\right)\sin\gamma=0\\&b_i=0 \qquad (i=1,2,3,\cdots)\\&c_i=0 \qquad (i\neq3)\\&c_3=\frac{\alpha}{32\omega_0^2}a^2\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

并由此得到频率响应方程：

$$\left(\frac{3}{4}\alpha a^3-2\sigma_2\omega a\right)^2=q^2$$

或

$$\sigma_2=\frac{3\alpha a^2}{8\omega_0}\pm\frac{q}{2\omega_0 a}\tag{46}$$

故

$$\omega^2=(\omega_0+\varepsilon^2\sigma_2)^2=\omega_0^2+\frac{3}{4}\alpha\varepsilon^2 a^2\pm\frac{\varepsilon^2 q}{a}+o(\varepsilon^4)\tag{47}$$

令$\varepsilon a=A$，可得

$$\omega^2\doteq\omega_0^2+\frac{3}{4}\alpha A^2\pm\frac{Q}{A}\tag{48}$$

$$u\doteq A\cos(\omega t-\gamma)+\frac{\alpha A^3}{32\omega_0^2}\cos(3\omega t-3\gamma)\tag{49}$$

这就是系统(42)的三阶近似稳态解。这个结果与用其它摄动方法所得到的相一致[3]，然而这里的计算却简单得多。

6 结　论

摄动谐波平衡法具有以下明显的优点：

1）不需要预先对解的形式及各阶谐波系数的量级有所了解，无论是自由振动，还是强迫振动，一律将解设为(2)式。欲求几阶近似解，就将解取到ε的几次方量级。这恰恰是谐波平衡法的致命弱点。如果微分方程中无偶次非线性项，则(2)式中无漂移项，即$b_0=c_0=0$，正如我们在(43)式中所作的那样。此外，对于非稳态解，诸谐波系数应被视为时间的函数。

2）方法简便，不需要解微分方程，只需进行简单的代数运算，这就比其它摄动方法显得优越；此外，在代数运算中所涉及的都是解线性方程，这又是谐波平衡法所不及的。

如果预先对解的形式及各阶谐波系数的量级有所了解，则该方法显得更为简便。例如可将(42)的解设为

$$u=\varepsilon a\cos\varphi+\varepsilon^3 b\cos3\varphi+o(\varepsilon^4)\tag{50}$$

其中

$$\omega=\omega_0+\varepsilon^2\sigma,\qquad \varphi=\omega t-\gamma$$

代入(42)式，比较同阶谐波系数和ε同次幂的系数，立即可得

$$\left(\frac{3}{4}\alpha a^3-2\sigma\omega a\right)^2=q^2$$

$$b=\frac{\alpha}{32\omega_0^2}a^2$$

这就是前面得到的频率响应方程及系数c_3.

实际上，摄动谐波平衡法的应用不仅限于以上三类问题，因此，是一种很有前途的方法。

参考文献

[1] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear Oscillations. A Wiley—Interscience Publication, New York, 1979: 55～61

[2] Atadan A S, Huseyin K. An Intrinsic Method of Harmonic Analysis for Nonlinear Oscillations. J.Sound and Vibration, 1984; 95(4): 525～530

[3] 张仁述. 振动理论. 国防科大, 1982; 220～222

[4] 陈予恕. 非线性振动. 天津科技出版社, 1982

[5] Nayfeh A H. Introduction to Perturbation Techniques. A Wiley—Interscience, New York, 1981

The Method of Perturbation-Harmonic Balance for Solving Nonlinear Oscillations

Sun Shixian　Tang Qiangang

Abstract

In this paper, perturbation technique is introduced into the method of Harmonic Balance. A new and effective method called Perturbation—Harmonic Balance is obtained. A great deal solutions and the order of harmonic coefficients do not need to be known previously, using the method imcomparable to the method of Harmonic Balance. On the other hand, the procedure of solving nonlinear oscillations becomes very simple. Using the method it is not related to solution of differential equation, and then it is superior to Lindstedt—Poincaré and multiple scales.

Key words: perturbation; nonlinear oscillation, Harmonic Balance