

## 机构运动弹性动力学普遍方程的研究

李栋成 金芝英 张启先

(国防科技大学) (北京航空航天大学)

**摘要** 本文首次采用等参有限单元, 建立了一个为一般机构广泛适用的运动弹性动力学普遍方程。在不附加任何“运动学”假设的情况下, 作为自然的结果, 方程的质量阵是正定、协调的常数阵; 方程中不存在两类时变的非对称系数项, 即所谓的“陀螺阻尼”项和“离心刚度”项。因此, 该方程无论在形式上还是在生成及求解方面, 都要较其它同类型方程简单。此外, 基于一维等参梁单元, 本文还具体导出了具有杆状构件的平面连杆机构的弹性动力学模型, 并给出了一个铰链四杆机构的算例。

**关键词** 机构; 运动弹性动力学, 普遍方程, 等参单元, 几何不变性

**分类号** TH112

## 引言

机构运动弹性动力学(KED)模型的建立, 是一个十分重要的问题<sup>[1]</sup>。自Winfrey在文献[2]中首次把结构分析中的有限元技术引入机构的运动弹性动力分析中来之后, 国内外许多研究者都在这方面作了大量的工作, 并提出了多种数学模型<sup>[2~6]</sup>。

作为其中的集大成者, 文献[4]的方程最具有代表性:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{Q_{ex}\} - [M]\{\ddot{U}_0\} - 2[[M_d] + [M_{vei}]]\{\dot{U}\} - [[M_{dd}] + 2[M_{d_{vei}}] + [M_{acc}]]\{U\} \quad (1)$$

这是一个广泛适用于各种平面及空间机构的运动弹性动力学普遍方程。它综合考虑了机构的多种变形型式及刚弹耦合运动的影响, 在线弹性有限元分析的范畴内, 不存在任何忽略或简化。但遗憾的是, 或许作者太刻意追求方程的“普遍”适用性, 因而未能充分利用某些单元的特殊性质; 在思想方法上, 也未能脱出传统思维模式的窠臼(表现在构件刚性运动的处理上仍不够自然), 从而使得该方程尽管适用广泛但未必真正实用——因为它实在是过于复杂了。

有鉴于此, 本文试图引入一类新的有限单元——等参有限单元, 利用其特有的几何不变性(或称空间的各向同性<sup>[8]</sup>), 并结合机构运动的新式分解, 导出一个既简洁适

用、又便于推广的机构运动弹性动力学普遍方程,从而达到简化方程、方便求解的目的。

## 1 等参有限单元简介

等参有限单元(Isoparametric Finite Element)是在固体力学领域被广泛采用的一种十分有效的单元<sup>[8]</sup>,它具有很多明显的优点,详细可参阅有关文献,限于篇幅,这里只着重介绍一下等参单元的几何不变性,或称空间的各向同性。

不失一般性,考虑一在三维空间中运动的构件*i*,在其上确定一具有*m*个节点的等参单元体 $\Omega$ ,如图1所示

图中,局部坐标系 $O'X_1Y_1Z_1$ 固接在构件*i*上;它与整体坐标系 $OXYZ$ 间的坐标变换阵(即方向余弦阵<sup>[9]</sup>)为 $[T]$ , $[T]$ 是一 $3 \times 3$ 阶的正交阵。

单元 $\Omega$ 内任一点*A*,在某时刻 $t_0$ ,由于自身及其它构件的弹性,它实际运动到*A'*点,故由图1可知

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'} \quad (2)$$

$\overrightarrow{OA}$ 及 $\overrightarrow{OA'}$ 分别为*A*点变形前后的位置矢径, $\overrightarrow{OA}$ 可由刚性机构运动学预先确定; $\overrightarrow{AA'}$ 为*A*点的弹性变形。用 $\{R\}$ 、 $\{R'\}$ 及 $\{f\}$ 分别表示上述三个矢量在整体坐标系 $OXYZ$ 中的坐标分向量,则有

$$\{R'\} = \{R\} + \{f\} \quad (3)$$

记 $\{R_0^e\}$ 及 $\{\delta^e\}$ 分别为单元 $\Omega$ 的节点在整体坐标系 $OXYZ$ 中的位置坐标向量及弹性变形向量(维数均为 $3m$ ),则由等参单元的定义<sup>[8]</sup>,有

$$\{R\} = [N]\{R_0^e\} \quad (4a)$$

$$\{f\} = [N]\{\delta^e\} \quad (4b)$$

其中 $[N]$ 是形函数阵,对三维等参单元

$$[N] = [N_1 I_{33} \quad N_2 I_{33} \cdots N_m I_{33}]$$

$I_{33}$ 为 $3 \times 3$ 阶单位阵, $N_1, N_2, \dots, N_m$ 均为自然坐标 $(r, s, \tau)$ 的函数<sup>[8]</sup>。

在通常情况下,弹性变形都是在局部坐标系 $O'X_1Y_1Z_1$ 中分解的,因此,若记 $\{d\}$ 及 $\{g^e\}$ 分别为 $\overrightarrow{AA'}$ 及单元节点的弹性变形在局部坐标系 $O'X_1Y_1Z_1$ 中的分向量,则有

$$\{f\} = [T]\{d\} \quad (5a)$$

$$\{\delta^e\} = [T_m]\{g^e\} \quad (5b)$$

其中 $[T_m] = \begin{bmatrix} T & & \\ & T & \\ & & \ddots \\ & & & T \end{bmatrix}$ 为 $3m \times 3m$ 阶准对角正交阵。

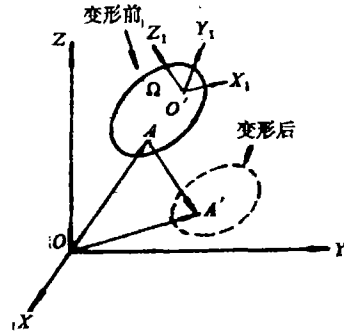


图1 在三维空间运动的单元体 $\Omega$

对式(4b)两边同乘  $[T]^H$  (上标  $H$  表示矩阵的转置, 下同), 有

$$\begin{aligned} [T]^H\{f\} &= [T]^H[N]\{\delta^e\} = [T]^H[N_1I_{33}N_2I_{33}\cdots N_mI_{33}]\{\delta^e\} \\ &= [N_1[T]^HN_2[T]^H\cdots N_m[T]^H]\{\delta^e\} \\ &= [N_1I_{33}N_2I_{33}\cdots N_mI_{33}]\begin{bmatrix} T & & \\ & \ddots & \\ & & T \end{bmatrix}^H\{\delta^e\} \\ &= [N][T_m]^H\{\delta^e\} \end{aligned} \tag{6a}$$

故有:  $\{d\} = [N]\{g^e\}$  (6b)

式(4b)及(6b)表明: 在等参单元中, 单元的位移分布与坐标系的选择无关; 即无论是在整体坐标系还是在局部坐标系中, 形函数  $[N]$  都是一样的。这就是等参单元的几何不变性。

由于等参单元的几何不变性, 因此有可能直接在整体坐标系下进行单元的位移插值, 从而避开单元广义坐标与整体(系统)广义坐标间的转换, 使系统方程的推导更为简单。

## 2 一般机构的弹性动力学普遍方程

具有任意形状构件的一般机构, 应采用三维等参单元来进行分析。

先把整个机构离散化, 从构件  $i$  上取出一等参单元体  $\Omega$ , 参看图1。

由上节可知, 单元体  $\Omega$  内任一点  $A$  的绝对矢径为

$$\{R'\} = \{R\} + \{f\} = [N](\{R_0^e\} + \{\delta^e\}) \tag{7}$$

对上式求一次导, 并注意  $[N]$  是不随时间变化的函数阵, 有

$$\{\dot{R}'\} = [N](\{\dot{R}_0^e\} + \{\dot{\delta}^e\}) \tag{8}$$

式中“ $\cdot$ ”表示对时间求导, 下同。

设单元体  $\Omega$  的密度为  $\rho$ , 则单元体  $\Omega$  的动能  $T_e$  为

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \{\dot{R}'\}^H \{\dot{R}'\} dv \\ &= \frac{1}{2} \{\dot{\delta}^e\}^H [M^e] \{\dot{\delta}^e\} + \{\dot{\delta}^e\}^H [M^e] \{\dot{R}_0^e\} + \frac{1}{2} \{\dot{R}_0^e\}^H [M^e] \{\dot{R}_0^e\} \end{aligned} \tag{9}$$

式中  $[M^e] = \int_{\Omega} \rho [N]^H [N] dv = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho [N]^H [N] \det(J) dr ds d\tau$ , 它为单元体  $\Omega$  的质量阵;  $\det(J)$  为雅可比阵  $[J]$  的行列式

$$[J] = \begin{bmatrix} X_{,r} & X_{,s} & X_{,\tau} \\ Y_{,r} & Y_{,s} & Y_{,\tau} \\ Z_{,r} & Z_{,s} & Z_{,\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_m \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_m \\ Z_1 & Z_2 & \cdots & Z_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,r} & N_{1,s} & N_{1,\tau} \\ N_{2,r} & N_{2,s} & N_{2,\tau} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{m,r} & N_{m,s} & N_{m,\tau} \end{bmatrix} \tag{10}$$

其中“ $,$ ”表示求偏导, 下同。

由于  $\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} (i=1, 2, \dots, m)$  为单元节点  $i$  的刚性位置坐标, 随着单元体  $\Omega$  在整体坐

标系  $OXYZ$  中的运动,  $\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$  也将随之发生变化, 因此  $[J]$  是随时间变化的函数阵。

但可以证明: 尽管  $[J]$  是随时间变化的, 其行列式  $\det(J)$  却与时间无关, 它只决定于自然坐标  $(r, s, \tau)$ , 证明可参看附录 A。

由此可知:  $[M^e]$  是一正定、协调的常数阵, 进一步把  $[M^e]$  展开, 还有

$$[M^e] = \begin{bmatrix} M_{11}^e & M_{12}^e & \cdots & M_{1m}^e \\ M_{21}^e & M_{22}^e & \cdots & M_{2m}^e \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{m1}^e & M_{m2}^e & \cdots & M_{mm}^e \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中  $[M_{ij}^e] = \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho N_i N_j \det(J) dr ds d\tau \right) \times I_{33}$ , ( $i, j=1, 2, \dots, m$ ), 它为一  $3 \times 3$  阶对角阵, 故由上节可知

$$[M^e] = [T_m][M^e][T_m]^H \quad (12)$$

此式表明: 等参单元的质量阵在各个坐标系中的表示都是一样的; 即它不依赖于坐标系方位的选择。

单元体  $\Omega$  的弹性势能  $\mathbb{I}_e$  为:

$$\mathbb{I}_e = \frac{1}{2} \{\delta^e\}^H [K^e] \{\delta^e\} \quad (13)$$

$[K^e]$  为  $\Omega$  在整体坐标系  $OXYZ$  中的刚度阵, 它可以这样计算: 先根据等参单元的几何不变性, 计算出  $\Omega$  在局部坐标系  $O'X_1Y_1Z_1$  中的刚度阵  $[K_0^e]$ , 然后由虚功原理, 把它转化到整体坐标系  $OXYZ$  中来, 这样

$$[K^e] = [T_m][K_0^e][T_m]^H \quad (14)$$

$[K_0^e]$  为一半正定的常数阵, 其具体推导可看文献[8]。

下面计算广义力  $P^e$ 。设单元体  $\Omega$  上分布有体力  $\{Q^e\}$ , 外表面力  $\{\phi^e\}$  及外集中力  $F_i^e$  ( $i=1, 2, \dots, L$ )。由于单元体最后还要进行拼装, 因而单元与单元之间的相互作用力可不必计算<sup>[8]</sup>, 由虚功原理, 有

$$\begin{aligned} P^e &= \int_{\Omega} [N]^H \{Q^e\} dv + \int_A [N]^H \{\phi^e\} dA + \sum_{i=1}^L [N]^H \{F_i^e\} \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^H \{Q^e\} \det(J) dr ds d\tau + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^H \{\phi^e\} \sqrt{a_r a_s - a_\tau^2} dr ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^L [N]^H \{F_i^e\} \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\begin{cases} a_r = X_{,r}^2 + Y_{,r}^2 + Z_{,r}^2 \\ a_s = X_{,s}^2 + Y_{,s}^2 + Z_{,s}^2 \\ a_{r,s} = X_{,r} X_{,s} + Y_{,r} Y_{,s} + Z_{,r} Z_{,s} \end{cases} \quad (16)$$

$[N]_i$  为在集中力作用点  $i$  处计算的形函数。

由拉氏方程  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_e}{\partial \dot{\delta}^e} \right) - \frac{\partial T_e}{\partial \delta^e} + \frac{\partial \mathbf{I}_e}{\partial \delta^e} = \{P^e\}$ ，将式(9)~(15)代入，有

$$[M^e] \{\ddot{\delta}^e\} + [K^e] \{\delta^e\} = \{P^e\} - [M^e] \{\ddot{R}_0\} \quad (17)$$

此即为单元体  $\Omega$  在整体坐标系  $OXYZ$  中的弹性动力学方程。

对构件  $i$ ，假定其上有  $s^i$  个单元， $m^i$  个节点，其总的广义坐标向量记为  $\{\delta^i\}$ ；由于同一构件上单元之间的协调性及相容性自然满足，故可按一般的有限元拼装技术生成构件  $i$  的弹性动力学方程

$$[M^i] \{\ddot{\delta}^i\} + [K^i] \{\delta^i\} = \{P^i\} - [M^i] \{\ddot{R}_0\} \quad (18)$$

其中  $[M^i]$  为正定、协调的常数阵， $[K^i]$  为半正定的时变阵；若记  $[T_i]$  为由  $m^i$  个  $[T]$  阵组成的  $3m^i \times 3m^i$  阶准对角正交阵，则还有

$$\begin{aligned} [M^i] &= [T_i] [M^i] [T_i]^H \\ [K^i] &= [T_i] [K_0^i] [T_i]^H \end{aligned}$$

其中  $[K_0^i]$  为构件  $i$  的局部刚度阵，它是一半正定的常数阵。

假定整个机构有  $n$  个构件，由于所有单元的广义坐标都是在同一个整体坐标系  $OXYZ$  中度量的，因而构件间广义坐标的相容性自然满足；同时，构件之间的运动付联接，也保证了联结节点上的位移协调，故可得系统的弹性动力学方程为

$$[M] \{\ddot{\delta}\} + [K] \{\delta\} = \{P\} - [M] \{\ddot{R}_0\} \quad (19)$$

引入结构阻尼（一般由实验确定<sup>[2~5]</sup>）后，机构系统完整的动力学方程为

$$[M] \{\ddot{\delta}\} + [C] \{\dot{\delta}\} + [K] \{\delta\} = \{P\} - [M] \{\ddot{R}_0\} \quad (20)$$

此即为一般机构的运动弹性动力学普遍方程，式中

$[M]$  为正定、协调的常数阵； $[C]$  为引入的结构阻尼阵； $[K]$  为随机构位形变化的半正定阵； $\{\delta\}$  为系统的广义坐标列向量； $\{P\}$  为系统的广义节点力； $\{\ddot{R}_0\}$  为系统节点的刚性加速度列向量。

### 3 平面杆状机构的运动弹性动力学普遍方程

杆状构件一般都作为梁来考虑<sup>[10]</sup>，由于梁是一维的，故可采用一维等参梁单元来进行分析。

以平面机构为例（空间机构稍为复杂些，限于篇幅，这里不加讨论，请参阅[7]）。从第  $i$  个构件上取出一直梁单元  $\Omega$ ，单元节点数为  $m$ ，如图 2 所示。

在整体坐标系  $OXY$  中，梁单元任一截面  $A-A$  的方位可由三个分量来确定，即质心坐标  $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$  及截面法线与  $X$  轴的夹角  $\theta$ 。考

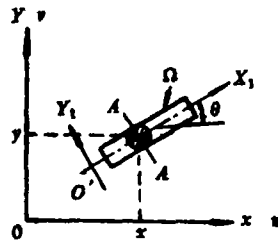


图 2 作平面一般运动的梁  $\Omega$

考虑到梁存在较大的剪切变形, 因此其变形也可视为三个独立的广义坐标: 质心线位移  $\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$  及法线偏转角  $\psi$ .

$$\text{记 } R = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{Bmatrix}, \{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \psi \end{Bmatrix}; \text{ 同样, 由等参单元的定义}^{[10]}, \text{ 有}$$

$$\{R\} = [N]\{R_0^e\}, \{f\} = [N]\{\delta^e\}$$

$\{R_0^e\}$ ,  $\{\delta^e\}$  及  $[N]$  的意义同前。不过在这里形函数阵  $[N]$  中的  $N_1, N_2, \dots, N_m$  只是自然坐标  $r$  的函数。

仿上节推导, 可得梁单元  $\Omega$  的弹性动力学方程为

$$[M^e]\{\ddot{\delta}^e\} + [K^e]\{\delta^e\} = \{P^e\} - [M]\{\dot{R}_0^e\} \quad (21)$$

$$[M^e] = \int_L [N]^H \begin{bmatrix} \rho A & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & JA \end{bmatrix} [N] dl = \int_{-1}^1 [N]^H \begin{bmatrix} \rho A & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & JA \end{bmatrix} [N] \det(J) dr,$$

其中  $\rho A, JA$  分别为梁单元截面的分布质量及分布转动惯量;  $\det(J) = \sqrt{X_r^2 + Y_r^2} =$  常数, 故  $[M^e]$  是一正定协调的常数阵。

$$\text{记 } [T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 它是局部坐标 } O'X_1Y_1 \text{ 与整体坐标 } OXY \text{ 间的坐标}$$

变换阵。 $[T_m]$  定义同前, 则还有

$$[M^e] = [T_m][M^e][T_m]^H, [K^e] = [T_m][K_0^e][T_m]^H$$

$[K_0^e]$  为梁单元  $\Omega$  的局部刚度阵, 它是一半正定的常数阵 (参阅文献[7])。

由于所有单元的广义坐标的相容性自然满足, 同一构件上单元的协调性全部满足; 两两以转动付相联的构件间线位移协调、转角独立, 故可采用一般的有限元拼装技术, 最后生成平面连杆机构的运动弹性动力学方程为

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{P\} - [M]\{\dot{R}_0\} \quad (22)$$

式中各项意义同前, 不再赘述。

作为应用, 下面给出一铰链四杆机构的算例 (取自文献[3])。

如图3, 已知曲柄  $L_{AB} = 0.3048\text{m}$ , 连杆  $L_{BC} = 0.9144\text{m}$ , 摇杆  $L_{CD} = 0.762\text{m}$ , 机架  $L_{AD} = 0.9144\text{m}$ ; 构件材料均为铝合金, 密度  $\rho = 2.796 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ , 弹性模量  $E = 7.03 \times 10^{10} \text{N/m}^2$ , 剪切弹性模量  $G = 2.712 \times 10^{10} \text{N/m}^2$ ; 各杆件截面均为  $2.54 \times 2.54 \text{cm}^2$  的正方形, 摇杆输出轴带有一转动惯量为  $8.065 \times 10^{-2} \text{kg} \cdot \text{m}^2$  的飞轮, 曲柄以匀角速度  $\omega = 600 \text{rpm}$  转动。

把每根杆件当作一个二次等参梁单元, 由此得到一个广义坐标数为18的机构运动弹性动力学方程; 采用加权余量法在 MC6800 机上进行计算, 最后得出了摇杆中点  $P$  外侧的弯曲应力在机构运转一周的变化曲线, 见图4 (具体参见文献[7])。

同文献[3]及文献[6]结果相比较, 可清楚地看出, 三者的曲线都很接近, 从而证明了本文的可行性及正确性。

## 4 结 论

本文所建立的机构运动弹性动力学普遍方程(20)及(22)同目前所有其它同类型方程相比, 具有如下优点:

1. 方程质量阵 $[M]$ 是正定、协调的常数阵。
2. 方程中不存在两类时变的非对称系数项——“陀螺阻尼项”(Gyroscopic Damping Term)和“离心刚度项”(Centrifugal stiffness Term)<sup>[5]</sup>。
3. 方程形式简洁, 便于生成、求解。

此外, 该方程还特别适宜采用现有的有限元程序库去分析大型复杂的机械系统。有关这方面的问题拟另文介绍, 这里不再详述。

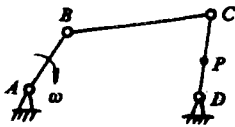


图3 铰链四杆机构

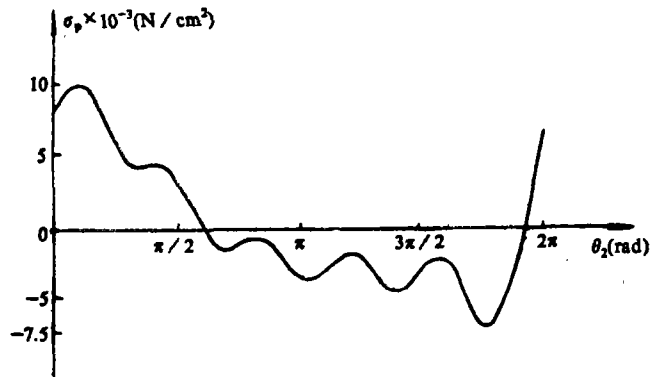


图4 摇杆中点外侧弯曲应力

## 参 考 文 献

- [1] Thompson B S, Sung C K. A Survey of Finite Element Techniques for Mechanism Design. MMT, 1986, 21(4): 351~359
- [2] Winfrey R C. Elastic Link Mechanism Dynamics. ASME, Jour. of Eng. for Ind., 1971, 97: 268~272
- [3] Nath P K, Ghosh A. Kineto-Elastodynamic Analysis of Mechanisms by Finite Element Method. MMT, 1980, 15(3): 179~197
- [4] Turcic D A, Midha A. Generalized Equation of Motion for the Dynamic Analysis of Elastic Mechanism Systems. ASME, Jour. Dyna. Sys. Measu. and Contr., 1984, (4): 243~248
- [5] Sunada W, Dubowsky S. The Application of Finite Element Methods to the Dynamic Analysis of Flexible Spatial and Co-planar Linkages Systems. ASME, Jour. Mech. Desi., 1981, 103: 643~651
- [6] 高晓春等. 建立高速弹性连杆机构数学模型的一种高效方法. 北航科研报告, BH-B1797
- [7] 李栋成. 机构的运动弹性动力分析研究. 北京航空学院硕士论文, 1987: 3
- [8] Bathe K J, Wilson E L. Numerical Method in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, 1976

191 张启先. 空间机构的分析与综合. 上册, 机械工业出版社, 1984

1102 E. 歌顿, D. R. J. 歌文. 有限元程序设计. 新时代出版社, 1982

## 附录 A

$$[J] = \begin{bmatrix} X_{,r} & X_{,s} & X_{,\tau} \\ Y_{,r} & Y_{,s} & Y_{,\tau} \\ Z_{,r} & Z_{,s} & Z_{,\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma N_{i,r} X_i & \Sigma N_{i,s} X_i & \Sigma N_{i,\tau} X_i \\ \Sigma N_{i,r} Y_i & \Sigma N_{i,s} Y_i & \Sigma N_{i,\tau} Y_i \\ \Sigma N_{i,r} Z_i & \Sigma N_{i,s} Z_i & \Sigma N_{i,\tau} Z_i \end{bmatrix} \quad (A1)$$

其中:  $\Sigma$  表示对节点  $i=1, 2, \dots, m$  求和; “ $,$ ” 表示求偏导, 下同。

$\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}$  为单元节点  $i$  在整体坐标系  $OXYZ$  中的坐标 (参看图 1)

$$\begin{aligned} \text{故 } \frac{d}{dt}(\det(J)) &= \begin{vmatrix} \Sigma N_{i,r} \dot{X}_i & \Sigma N_{i,s} \dot{X}_i & \Sigma N_{i,\tau} \dot{X}_i \\ \Sigma N_{i,r} \dot{Y}_i & \Sigma N_{i,s} \dot{Y}_i & \Sigma N_{i,\tau} \dot{Y}_i \\ \Sigma N_{i,r} \dot{Z}_i & \Sigma N_{i,s} \dot{Z}_i & \Sigma N_{i,\tau} \dot{Z}_i \end{vmatrix} + \\ & \begin{vmatrix} \Sigma N_{i,r} X_i & \Sigma N_{i,s} X_i & \Sigma N_{i,\tau} X_i \\ \Sigma N_{i,r} \dot{Y}_i & \Sigma N_{i,s} \dot{Y}_i & \Sigma N_{i,\tau} \dot{Y}_i \\ \Sigma N_{i,r} Z_i & \Sigma N_{i,s} Z_i & \Sigma N_{i,\tau} Z_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Sigma N_{i,r} X_i & \Sigma N_{i,s} X_i & \Sigma N_{i,\tau} X_i \\ \Sigma N_{i,r} Y_i & \Sigma N_{i,s} Y_i & \Sigma N_{i,\tau} Y_i \\ \Sigma N_{i,r} \dot{Z}_i & \Sigma N_{i,s} \dot{Z}_i & \Sigma N_{i,\tau} \dot{Z}_i \end{vmatrix} \\ & = |A| + |B| + |C| \end{aligned} \quad (A2)$$

式中  $\dot{X}_i, \dot{Y}_i, \dot{Z}_i$  分别为单元节点  $i$  的三个刚性运动速度分量。

根据刚体运动学原理: 任何一个刚体运动都可看作是随刚体某点的平动及绕该点转动的合成。对单元体  $\Omega$ , 不妨设这个参考点为节点 1, 另记单元体的三个刚性运动角度分量为  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , 则

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_i &= \dot{X}_1 + \omega_y(Z_i - Z_1) - \omega_z(Y_i - Y_1) \\ \dot{Y}_i &= \dot{Y}_1 + \omega_z(X_i - X_1) - \omega_x(Z_i - Z_1) \quad (i=2, 3, \dots, m) \\ \dot{Z}_i &= \dot{Z}_1 + \omega_x(Y_i - Y_1) - \omega_y(X_i - X_1) \end{aligned} \right\} \quad (A3)$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \Sigma N_{i,r} \dot{X}_i &= \Sigma N_{i,r} \dot{X}_1 + \omega_y \Sigma N_{i,r} (Z_i - Z_1) - \omega_z \Sigma N_{i,r} (Y_i - Y_1) \\ &= (\dot{X}_1 - \omega_y Z_1 + \omega_z Y_1) \Sigma N_{i,r} + \omega_y \Sigma N_{i,r} Z_i - \omega_z \Sigma N_{i,r} Y_i \end{aligned} \quad (A4)$$

由  $\Sigma N_i = 1$ , 得

$$\Sigma N_{i,r} = \Sigma N_{i,s} = \Sigma N_{i,\tau} = 0$$

$$\text{故 } \Sigma N_{i,r} \dot{X}_i = \omega_y \Sigma N_{i,r} Z_i - \omega_z \Sigma N_{i,r} Y_i \quad (A5)$$

$$\text{同理: } \Sigma N_{i,s} \dot{X}_i = \omega_r \Sigma N_{i,s} Z_i - \omega_z \Sigma N_{i,s} Y_i \quad (A6)$$

$$\Sigma N_{i,\tau} \dot{X}_i = \omega_r \Sigma N_{i,\tau} Z_i - \omega_z \Sigma N_{i,\tau} Y_i \quad (A7)$$

$$\begin{aligned} \text{故 } |A| &= \omega_y \begin{vmatrix} \Sigma N_{i,r} Z_i & \Sigma N_{i,s} Z_i & \Sigma N_{i,\tau} Z_i \\ \Sigma N_{i,r} Y_i & \Sigma N_{i,s} Y_i & \Sigma N_{i,\tau} Y_i \\ \Sigma N_{i,r} Z_i & \Sigma N_{i,s} Z_i & \Sigma N_{i,\tau} Z_i \end{vmatrix} - \\ & \omega_z \begin{vmatrix} \Sigma N_{i,r} Y_i & \Sigma N_{i,s} Y_i & \Sigma N_{i,\tau} Y_i \\ \Sigma N_{i,r} Y_i & \Sigma N_{i,s} Y_i & \Sigma N_{i,\tau} Y_i \\ \Sigma N_{i,r} Z_i & \Sigma N_{i,s} Z_i & \Sigma N_{i,\tau} Z_i \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$



同理： $|B| = |C| = |A| = 0$

故  $\frac{d}{dt}(\det(J)) = 0$ ，因而： $\det(J)$ 是不随时间变化的函数，它仅依赖于自然坐标  $(r, s, \tau)$ 。证毕。

## Investigation of the Generalized Equation of Motion for KED Analysis of Flexible Mechanisms

Li Dongcheng Jin Zhiying Zhang Qixian

### Abstract

A generalized equation of motion for KED analysis of general flexible mechanisms has been developed by utilizing newly isoparametric finite element theory in this paper. As a natural result, the mass matrix is a positive definite consistent and time-independent one, and the two time-dependent and nonsymmetric matrices, that is, the "gyroscopic damping" and "centrifugal stiffness" ones, don't exist in the equation. Thus the equation with concise form may be derived and solved easily. Also based on the one-dimensional isoparametric beam elements, the equation for some flexible planar linkages has been derived in detail, and a numerical result of a planar four-bar linkage is presented in the paper.

**Key Words:** mechanisms; KED, generalized equation, isoparametric finite element, geometric invariance