

在非高斯马尔可夫噪声中的Robust检测

高志勇

(电子技术系)

摘要 文中探讨了在仅已知噪声边缘分布族和相关系数的条件下非高斯马尔可夫噪声中确知信号的Robust检测问题。设噪声样本可表示为一阶AR过程： $n_i = \rho n_{i-1} + Y_i$, ($i=1, 2, \dots, N$), 其中 Y_i 为独立同分布的随机序列。当 ρ 较小时, 以检测器效验为性能指标并对 ρ 取一级和二级近似, 分别得到了对应的有记忆和无记忆Robust检测器的结构。

关键词 信号检测, 马尔可夫噪声, 非高斯, Robust检测

分类号 TN911

在近20多年来发展起来的Robust信号检测理论中, 经常假设噪声样本是统计独立的。这显然与大多数实际情况不符。随着高速采样器的发展和信号环境的复杂化, 噪声样本的相关性已成为一个不可忽视的问题。八十年代以来在非高斯有色噪声中的信号检测理论有了一系列进展。在非高斯干扰条件下, 一般很难确知噪声的多维分布, 因此研究在仅已知噪声一维分布和二阶矩条件下的Robust检测是有重大实用意义的。在噪声相关性较弱时, Poor^[1]和刘渝^[2]用Protony提出的MA模型和在估计问题中的结果, 对近高斯分布族和 p -点分布族分别得到了邻近有限相关噪声中的Robust检测器的闭式解。它们都仅与噪声的边缘分布和二阶矩有关。

然而许多实际噪声过程都不是有限相关的, 如限带过程和一大类马尔可夫过程都是无穷相关的。其中最常见的是具有指数型相关函数的马尔可夫过程, 它可用一个一阶AR过程来描述。本文用类似Protony的方法。在相关性较弱的情况下, 对这类马尔可夫干扰过程导出了驱动噪声为近高斯噪声和 p -点分布族噪声中的Robust检测器。

设噪声序列 $\{n_i\}$ 为具有对称分布密度函数 $f(x)$ 的一阶AR过程:

$$n_i = \rho n_{i-1} + Y_i \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

其中 $\{Y_i\}$ 为独立同分布的随机序列, 具有对称概率密度函数 $g(x)$ 。显然当 $k \geq 0$ 时

$$E\{n_i n_{i+k}\} = \sigma_n^2 \rho^k \quad |\rho| \leq 1 \quad (2)$$

当 ρ 较小时, 对 n_i 的密度函数 f 和 Y_i 的密度函数 g 有下列定理^[3]。

定理 1 设 f 对称且二阶矩有限, 其特征函数 $\Phi_n(u)$ 满足 $\int u^2 |\Phi_n(u)|^2 du < \infty$, 则当 ρ 充分小时, 有

$$f(x) = g(x) + O(\rho^2) \quad (3)$$

由定理1, 当 ρ 较小时, 在一级近似条件下, 可用 f 代替 g .

1 有记忆的 Robust 检测器

考虑(1)式所表示的指数相关型噪声中的检测问题

$$\begin{aligned} H_0: x_i &= n_i \\ H_1: x_i &= \theta + n_i \end{aligned} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (4)$$

可证^[3]以上问题可等效于下列检测问题:

$$H_0: z_i = Y_i \quad H_1: z_i = (1 - \rho)\theta + Y_i \quad i=2, 3, \dots, N \quad (5)$$

其中 $z_i = x_i - \rho x_{i-1}$.

由于 Y_i 为白色的, 于是把有色噪声中的检测问题化成了白噪声中的检测问题。令检验统计量为

$$T_N(Z) = \sum_{i=2}^N W(z_i) \quad \text{且设} \quad EW(z_i) = 0$$

定义检验 Φ 为

$$\Phi(Z) = \begin{cases} 1 & T_N(Z) \geq \gamma \\ 0 & T_N(Z) < \gamma \end{cases} \quad (6)$$

$$E[\Phi(Z) | H_0] = \alpha \quad (7)$$

其中门限 γ 由(7)式确定。由定理1可证^[3]此检验的效验 η 可表为

$$\eta = [E_f W'(z)]^2 / E_f W^2(z) + O(\rho^2) \quad (8)$$

因此在对 ρ 取一级近似意义下有

$$\eta \approx [E_f W'(z)]^2 / E_f W^2(z) \quad (9)$$

其中 E_f 表对 f 取平均。上式当 $W(z) = -f'(z)/f(z)$ 时达极大值, 此时效验为

$$\eta = I(f) + O(\rho^2) \quad (10)$$

若设 f 属于某一对称概率密度函数族 \mathcal{F} , 则若在 \mathcal{F} 中有 f_0 使 $I(f)$ 最小化, 则选

$$W_0(z) = -f'_0(z)/f_0(z) \quad (11)$$

构成检验

$$\Phi(Z_0) = \begin{cases} 1 & \text{当 } T_N(Z_0) = \sum_{i=2}^N W_0(z_i) \geq K \\ 0 & < K \end{cases}$$

于是这个检验对效验 η 而言构成一个极大极小检测器, 即 Robust 检测器。由文献[1][2]知,

当 $\mathcal{F}_1 = \{f \mid \int_{-a}^a f dx \geq p\}$ 时, 使 $I(f)$ 最小的 f_0 为

$$f_0(z) = \begin{cases} \frac{1}{a} \cdot \frac{\beta(\alpha)}{1 + \beta(\alpha)} \cos^2 \alpha z / a & |z| \leq a \\ \frac{1}{a} \cdot \frac{\beta(\alpha)}{1 + \beta(\alpha)} \cos^2 \alpha \cdot e^{2\beta} \cdot e^{-2\beta |z/a|} & |z| > a \end{cases} \quad (12)$$

其中 $\beta(\alpha) = \alpha \operatorname{tg} \alpha$, α 由下式确定

$$1 - \cos^3 \alpha / (\cos \alpha + \alpha \sin \alpha) = p \quad (13)$$

当 \mathcal{F}_2 为近高斯污染族,

$$\mathcal{F}_2 = \{f | f = (1 - \varepsilon)p_0 + \varepsilon h, h \in \mathcal{H}\}$$

其中 p_0 为零均值的, 方差为 1 的标准高斯分布, \mathcal{H} 为一很宽的对称分布族。 $0 < \varepsilon < 1$ 为表示 f 的不确定程度。在 \mathcal{F}_2 中使 $I(f)$ 最小的

$$f_0(z) = \begin{cases} (1 - \varepsilon)p_0(z) & |z| \leq k \\ (1 - \varepsilon)p_0(k)e^{-k||z|-k|} & |z| > k \end{cases} \quad (14)$$

这里 k 为以下方程的唯一的正数解

$$2\Phi(k) - 1 + 2p_0(k)/k = (1 - \varepsilon)^{-1} \quad (15)$$

于是对 p -一点分布族 $\mathcal{F}_1 = \{f | \int_{-a}^a f \geq p\}$, 有

$$W_0(z) = \begin{cases} \text{tg}(\alpha z/a) & |z| \leq a \\ \text{tg}\alpha \cdot \text{sgn}(z) & |z| > a \end{cases} \quad (16)$$

对 ε -污染分布族 $\mathcal{F}_2 = \{f | f = (1 - \varepsilon)p_0 + h, h \in \mathcal{H}\}$

$$W_0(z) = \begin{cases} z & |z| \leq k \\ k \text{sgn}(z) & |z| > k \end{cases} \quad (17)$$

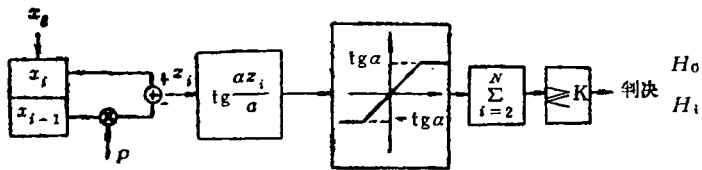


图 1 对相关模型(1)在 p -一点分布族中的有记忆 Robust 检测器

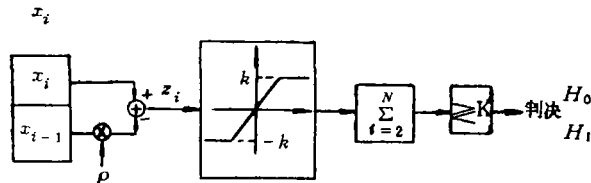


图 2 对相关模型(1)在 ε -污染分布族中的有记忆 Robust 检测器

从图 1、图 2 易见, 在一级近似定义下的有记忆 Robust 检测器结构为白化滤波器后加上噪声独立情况下对应的 Robust 检测器。

2 无记忆 Robust 检测器

当噪声样本相互独立时所得到的 Robust 检测器都是无记忆的。当噪声相关时若仍用无记忆检测器, 则结构将发生什么变化呢? 这就是这一节研究的问题。

对无记忆检测器, 其结构为 $T_N(X) = \sum_{i=1}^N W(x_i)$, 其中 x_i 为观测样本。假设 $E W(x) = 0$, 仍用效验作为准则, 在 $W(x)$ 满足一定正则条件, 且 $\{n_i\}$ 为 φ -可容序列^[7]时, 该检验的效验为

$$\eta(W) = \frac{[E_f W'(x)]^2}{E_f W^2(x) + 2 \sum_{k=2}^{\infty} E_f W(x_1) W(x_k)} \quad (18)$$

显然以上的 $\eta(W)$ 与噪声样本的二维分布 $f(x_1, x_k)$ 有关,而一般不可能知道噪声过程的二维分布。因此下面将 $\eta(W)$ 近似成只与一维分布有关的指标。

定理 2 若 f 对称, $E|n_1|^3 < \infty$, 其特征函数 $\Phi_n(u)$ 满足 $\int u^3 |\Phi_n(u)| du < \infty$, $W(x)$ 绝对连续, 则当 $\rho \rightarrow 0$ 时下式成立

$$\eta(W) = \frac{[EW'(x)]^2}{EW^2(x) + 2rExW(x)EW'(x)} + O(\rho^3) \quad (19)$$

其中 $r = \rho/(1 - \rho)$, E 表示 E_f 即对 f 取平均。

定理证明见文献[3]。

令

$$V(W) = \frac{[EW'(x)]^2}{EW^2(x) + 2rExW(x)EW'(x)} \quad (20)$$

则 $V(W)$ 为效验 $\eta(W)$ 对 ρ 的二级近似式。为求得最佳的 W , 对 $V(W)$ 求变分并令其为零

$$\text{即} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} V(W + \alpha\psi) |_{\alpha=0} = 0$$

可得^[3]最佳的非线性变换 W 为

$$W_K(x) = W_0(x) - Kx \quad (21)$$

其中 $W_0 = -f'/f$ 为噪声独立时的最佳非线性变换, K 为一正常数。

将(21)式代入 $V(W)$ 表达式中并令

$$\frac{\partial}{\partial K} V(W_K) = 0$$

可得 $K = \rho I(f) = \rho EW_0^2$ 。

将 W_K 代入(19)式并取二级近似得

$$V(W_K) = \frac{(1 - \rho)^2 I(f)}{1 - \rho^2 \sigma^2 I(f)} \triangleq V(f) \quad (22)$$

其中 $\sigma^2 = E n_1^2$ 。易见当 $\rho < \frac{1}{2\sqrt{\sigma^2 I(f)} + 1}$ 时 V 随 $I(f)$ 单调增, 而 $I(f)$ 是密度函数 f 的Fisher信息量。所以从 n 的边缘分布密度函数族 \mathcal{S} 中找一 $f_0 \in \mathcal{S}$ 使 $I(f_0) \leq I(f)$, 对一切 $f \in \mathcal{S}$, 则对任一 $f \in \mathcal{S}$, 取 $W_0 = -f'_0/f_0$ 代入(21)式得 W_{K_0} 。由Huber的定理2^[6]有下式成立:

$$V(f_0, W) \leq V(f_0, W_{K_0}) \leq V(f, W_{K_0}) \quad (23)$$

所以 (f_0, W_{K_0}) 是相关模型(1)的二阶近似的无记忆检测的鞍点。当 $\mathcal{S}_1 = \left\{ f \left| \int_{-a}^a f dx \geq p \right. \right\}$ 时, 如(12)式, 有:

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} \frac{\beta(\alpha)}{1 + \beta(\alpha)} \cos^2 \frac{\alpha x}{a} & |x| \leq a \\ \frac{1}{a} \frac{\beta(\alpha)}{1 + \beta(\alpha)} \cos^2 \alpha \cdot e^{2\beta} \cdot e^{-2\beta \left| \frac{x}{a} \right|} & |x| > a \end{cases} \quad (24)$$

$I(f_0) = \frac{1}{a^2} \cdot 4\alpha^2 \frac{\beta}{1+\beta}$, 由(21)可得

$$W_{K_0}(x) = \begin{cases} \frac{2\alpha}{a} \operatorname{tg} \frac{\alpha x}{a} - \frac{4\alpha^2}{a^2} \frac{\beta}{1+\beta} \rho x & |x| \leq a \\ \frac{2\beta}{a} \operatorname{sgn}(x) - \frac{4\alpha^2}{a^2} \frac{\beta}{1+\beta} \rho x & |x| > a \end{cases} \quad (25)$$

由于 W_{K_0} 乘一常数效验不变, 故可取

$$W_{K_0}(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\alpha x}{a} - \frac{2\alpha}{a} \frac{\beta}{1+\beta} \rho x & |x| \leq a \\ \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sgn}(x) - \frac{2\alpha}{a} \frac{\beta}{1+\beta} \rho x & |x| > a \end{cases} \quad (26)$$

以上各式中的 $\beta = \alpha \operatorname{tg} \alpha$, $1 - \cos^2 \alpha / (\cos \alpha + \alpha \sin \alpha) = p$.

当 $\mathcal{F}_2 = \{f(x) | f(x) = (1 - \varepsilon)p_0(x) + \varepsilon h(x), h(x) \text{ 对称}\}$, 即 \mathcal{F}_2 为前面提到的 ε -污染分布族。如(14)式

$$f_0(x) = \begin{cases} (1 - \varepsilon)p_0(x) & |x| \leq k \\ (1 - \varepsilon)p_0(k) e^{-k(|x|-k)} & |x| > k \end{cases} \quad (27)$$

其中 k 由(17)式解得, 检验统计量

$$W_{K_0}(x) = \begin{cases} (1 - K_0)x & |x| \leq k \\ k \operatorname{sgn}(x) - K_0 x & |x| > k \end{cases} \quad (28)$$

其中

$$K_0 = \rho I(f_0) = \rho(1 - \varepsilon)[2\Phi(\frac{k}{\sigma}) - 1] \quad (29)$$

(26)和(28)式表示的 Robust 检测器结构如下:

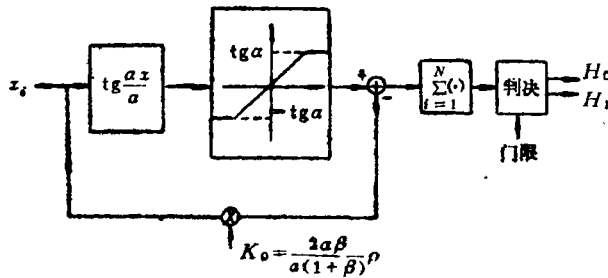


图 3 对相关模型(1)在 p -点分布族中的无记忆 Robust 检测器

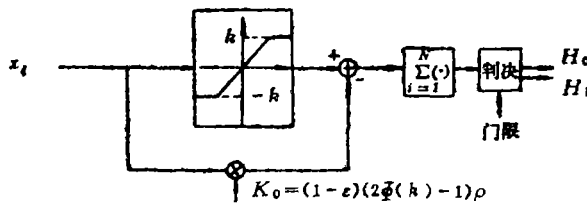


图 4 对模型(1)在 ε -污染分布族中的无记忆 Robust 检测器

从以上结构看出,对于马尔可夫噪声,其相关性较弱时,有记忆的Robust检测器为白化滤波器后串接一个噪声独立时的Robust检测器。而它对应的无记忆Robust检测器结构为噪声独立情况下的非线性变换加上一个线性修正项。粗看起来,这与在有限相关的MA模型下得到结构有些相似,但其实二者有显著区别。尤其对于无记忆检测器,本文不仅模型完全变了,而且性能指标也取的是效验对 ρ 的二阶近似式。而文献[5]中却仅取的是效验的一阶近似式。由(1)式可知,在MA模型下效验的二阶近似式与本文在AR模型下得到的完全不同。因此由它们得到的无记忆Robust检测器有着完全不同的结构,并且在MA模型下还不一定有闭式解。这说明有时考虑无穷相关的情况反而比有限相关情况更易得到闭式解。这正是本文的工作。

参 考 文 献

- [1] Poor H.V., IEEE Trans., 1982, IT-28:744~752
- [2] 刘渝. 在非高斯相关噪声中的Robust检测. 电子学报, 1982, 10(5): 1~9
- [3] 高志勇. 在非高斯相关噪声中弱信号的最佳检测. 国防科技大学报, 1988, 10(1): 35~44
- [4] 高志勇. 一种新的Robust序贯检测方法. 电子学报, 1987, 15(5):75~81
- [5] Huber, Ann. Math. Statist. 1964; 35:73~101
- [6] Moustakides G V and Thomas J B. IEEE Trans, 1984; IT-30: 17~30

Robust Detection in Non—Gaussian Markov Noise

Gao Zhiyong

(Department of Electronic Technology)

Abstract

Robust detection of known signal in non—Gaussian Markov noise is considered under the assumptions that only marginal distribution class and dependent coefficient of noise samples are given, and the noise sequences can be expressed as a first—order AR process; $n_i = \rho n_{i-1} + Y_i$ ($i=1, 2, \dots, N$), where $\{Y_i\}$ is i.i.d. sequence. If ρ is smaller, the memory and memoryless robust detectors are respectively derived by minimax of the first—order and the second—order approximation of detection efficacy to ρ .

Key words: Signal detection; Markov noise, Non—Gaussian, Robust detection