

用于自适应阵超角分辨的 非均匀线阵设计问题

粟 毅

(电子技术系)

摘 要 文中讨论了非均匀线阵自适应超角分辨问题,证明了在入射场条件一定的情况下,特征矢量角谱性能完全由阵列因子决定。通过分析及仿真,说明最小冗余阵(LMR)是一种性能优良的超角分辨阵。并讨论了非均匀线阵存在的栅瓣问题,给出避免栅瓣的单位间距的上限公式。

关键词 自适应阵,非均匀阵,超角分辨

分类号 TN95

自适应超角分辨技术在提高米波雷达角分辨力、对抗多径干扰等应用中,越来越受到重视,其中阵列设计问题有着重要的地位。在以前的工作中,对均匀线阵(LES)——即阵元间距都相等的线阵研究的比较多,但对非均匀阵的分析还很不够。在超角分辨应用中的非均匀阵与均匀阵相比有以下主要优点:

(1) 在同样大小的阵列孔径条件下,非均匀线阵的阵元个数可大大减少。

(2) 当阵元数给定时,在避免栅瓣条件下,非均匀阵可以得到更大的孔径长度,从而有更高的分辨能力。

当然,非均匀阵超角分辨问题的理论分析比较困难,设计方法还不成熟,难于得到解析解,另外从本文的后面也可以看出,角谱的旁峰有所增加等等。但应用计算机可以在没有解析解的时候,给出较为精确的数值解。只要设计合理,非均匀阵的旁峰完全可以控制在允许的范围之内。

1 理论分析

N 元线阵的空间协方差矩阵 $R_{(N \times N)}$ 具有 q 个最大特征值和 $N - q$ 个最小特征值,即 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_q \geq \lambda_{q+1} \dots \geq \lambda_N$,相应的特征矢量具有性质:

$$\sum_{i=1}^N \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i^H = I \quad (1)$$

定义 C_{EV} 为 $N - q$ 个最小特征值对应的特征矢量之外积和

$$C_{EV} = \sum_{i=q+1}^N \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i^H \quad (2)$$

据根式(1) C_{EV} 也可以写成

$$C_{EV} = I - \sum_{i=1}^q \bar{V}_i \bar{V}_i^H \quad (3)$$

Schmidt提出的MUSIC角谱表达式^[1]

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta) = 1 / [\bar{a}^H(\theta) C_{EV} \bar{a}(\theta)] \quad (4)$$

将式(3)代入式(4)得

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta) = \left[N - \sum_{i=1}^q |\bar{a}^H(\theta) \bar{V}_i|^2 \right]^{-1} \quad (5)$$

假设空间只有一个源存在, 即 $q=1$, 其空间方向矢量为 $\bar{a}(\theta_1)$, 由特征矢量的性质知

$$\bar{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} \bar{a}(\theta_1)$$

故此时

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta) = \left[N - \frac{1}{N} |\bar{a}^H(\theta) \bar{a}(\theta_1)|^2 \right]^{-1} \quad (6)$$

当阵元数、信噪比和阵列信号采样个数一定时, $P_{\text{MUSIC}}(\theta)$ 角谱的峰值 $P_{\text{MUSIC}}(\theta_1)$ 就一定了。这时如能设计阵元位置使当 $\theta \neq \theta_1$ 时 $|\bar{a}^H(\theta) \bar{a}(\theta_1)|^2$ 都尽可能小, MUSIC谱就能得到较窄的谱峰宽度, 提高了角分辨力。

定义

$$\alpha(\theta, \theta_1) \triangleq |\bar{a}^H(\theta) \bar{a}(\theta_1)|^2 \quad (7)$$

容易推出

$$\begin{aligned} \alpha(\theta, \theta_1) &= \left| \sum_{i=0}^{N-1} \exp[jg d_i (\sin\theta_1 - \sin\theta)] \right|^2 \\ &= \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=0}^{N-1} \exp[jg (d_{i_1} - d_{i_2}) (\sin\theta_1 - \sin\theta)] \end{aligned}$$

式中 $g=2\pi/\lambda$, 不失一般性, 可令 $\theta_1=0$, 这时角谱峰位于 $\theta=0$ 处。为保证 $\theta=0$ 处 $\pm\theta_0$ 内有一窄的谱峰, θ_0 为一较小的角度值, 定义面积

$$\begin{aligned} B &\triangleq \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \alpha(\theta, 0) d\theta \\ &= \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=0}^{N-1} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos[(d_{i_1} - d_{i_2}) g \sin\theta] d\theta \end{aligned}$$

经近似

$$\begin{aligned} B &\approx \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=0}^{N-1} 2\sin[g(d_{i_1} - d_{i_2})\theta_0] / g(d_{i_1} - d_{i_2}) \\ &= \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{i_2=0}^{N-1} 2\sin[g|d_{i_1} - d_{i_2}|\theta_0] / g|d_{i_1} - d_{i_2}| \quad (8) \end{aligned}$$

定义共阵集合 $\{d_{i_1} - d_{i_2}; i_1, i_2=0, 1, \dots, N-1\}$, 可见 B 是共阵集合的函数, 适当选择共阵集合, 可使 B 为 B_{\min} , 达到高的分辨力。为此在下节中讨论几种从共阵集合的角度提出的非均匀阵。

2 几种非均匀阵

这里讨论的非均匀阵,阵元间距为单位长度的整数倍,单位长度定义为最小间距的阵元距离,这类阵称之为整数阵。当阵元数 N 一定后,任何一个非均匀整数阵均可以用缺口和冗余来表征^{[2], [3], [4]}。缺口即为共阵集合中不存在的元素,反映在阵列协方差矩阵中就是相应距差空间互相关函数的空缺;冗余定义为共阵集合中重复的元素,反映在协方差矩阵中相应距差的空间互相关函数的重复。所以研究缺口和冗余对角谱估计的影响是自然的。

设 H 是共阵内的缺口数,并且 $\{h_i; i=0, 1, \dots, H-1\}$ 为缺口集合, R_e 是共阵内的冗余数, $\{r_{ei}; i=0, 1, \dots, R_e-1\}$ 是除去 N 个零值以外冗余集合。如设 L 为以单位长度 μ 计的实际阵长,则 $L = M + H - R_e$, $M = N(N-1)/2$ 是阵列的理想孔径长度。

当令 $\psi = \pi \sin \theta$, $\theta_1 = 0$ 时,式(7)可改写为:

$$\alpha(\theta, 0) = N + 1 + \frac{\sin[(2L+1)\psi/2]}{\sin[\psi/2]} - 2 \sum_{i=0}^{H-1} \cos(h_i \psi) + 2 \sum_{i=0}^{R_e-1} \cos(r_{ei} \psi) \quad (9)$$

$\alpha(\theta, 0)$ 的旁瓣上限为

$$\alpha(\theta, 0) \leq (N^2 + 7N - 7 + 18H + 14R_e) / (8N^2) \quad (10)$$

由式(6)和(10),当 N 一定时,缺口和冗余对 $P_{\text{MUSIC}}(\theta)$ 的旁峰电平具有近似相同的约束,这意味着最小冗余和缺口 LMRH 阵具有最小旁峰。

虽然 LMRH 阵具有较为优良的性能,但除了 $N < 5$ 的阵,设计 LMRH 阵的较为简洁的方法还没有。为此在下面讨论两种阵。

第一种是最小冗余阵,即在令 $H=0$ 的条件下,冗余最小的阵;第二种是最小缺口阵,即在令 $R_e=0$ 的条件下,使缺口最小的阵。在已知的 LMR 阵和 LMH 中,通常 LMH 阵中的缺口数大于 LMR 阵中的冗余数,另外式(10)也说明了缺口较之冗余对旁峰更有害,所以采用 LMR 阵所得的角谱旁峰的结果比 LMH 阵要好一些。但如从角分辨力的角度考虑,则 LMH 阵比 LMR 阵要好一些。所以采用哪一种阵还需结合实际情况。

3 整数阵的栅瓣问题

以往人们认为非均匀阵不存在栅瓣问题^[5],故在许多文献中,在讨论 LMR, LMH 阵时,对实际阵元间距考虑不足,而仅重视间距之间的比例。后面将证明非均匀整数阵也存在栅瓣现象。

已知:阵列的方向图函数或阵列因子为

$$\alpha(\theta, \theta_1) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{i_2=0}^{N-1} \exp[jg\mu(d'_{i_1} - d'_{i_2}) \cdot (\sin\theta_1 - \sin\theta)]$$

式中 $d'_i = d_i/\mu$, μ 为前面定义的单位长度。

显然 $\alpha(\theta_1, \theta_1) = N^2$, 即阵列因子出现主峰。若 $\alpha(\theta, \theta_1)$ 中复指数的相位在 i_1 ,

$i_2 = 0, 1, \dots, N-1$ 时为 2π 的整数倍, 则在相应角度 θ 上就出现最大值。

$$\text{因} \quad \min |d_{i_1} - d_{i_2}| = 1 \quad i_1 \neq i_2 \quad i_1, i_2 = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{故当} \quad g\mu(\sin\theta_1 - \sin\theta) = 2m\pi \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11)$$

$$\text{时, 有:} \quad g\mu(d_{i_1} - d_{i_2})(\sin\theta_1 - \sin\theta) = 2m(d_{i_1} - d_{i_2})\pi$$

$$\text{又因} \quad d_{i_1} - d_{i_2} \quad i_1, i_2 = 0, 1, \dots, N-1 \text{ 是整数}$$

$$\text{故} \quad 2m(d_{i_1} - d_{i_2})\pi \text{ 为 } 2\pi \text{ 的整数倍}$$

所以在所有保证式(11)成立的角度上均出现最大值。式(11)中对应 $m = \pm 1$ 的 θ 是主瓣邻近的两个最大值, 即栅瓣。这两个栅瓣的位置假定为 θ'_1, θ''_1 。因为 $g = 2\pi/\lambda$, 由式(11)有

$$\frac{1}{\lambda}\mu(\sin\theta_1 - \sin\theta'_1{}^{(m)}) = \pm 1$$

$$\sin\theta'_1{}^{(m)} = \sin\theta_{1(\pm)} \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\text{最后得} \quad \theta'_1{}^{(m)} = \arcsin\left(\sin\theta_{1(\pm)} \frac{\lambda}{\mu}\right) \quad (12)$$

当 $\theta_1 = 0$ 时

$$\theta'_1{}^{(m)} = {}_{(\pm)}\arcsin\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

由式(12)可以确定 μ 的取值以避免在我们研究的空间内出现栅瓣, 或者说使栅瓣出现在不可见区域内。

$$\begin{cases} \frac{\mu}{\lambda}(\sin\theta_1 - 1) > -1 \\ \frac{\mu}{\lambda}(\sin\theta_1 + 1) < 1 \end{cases}$$

解此联立不等式得:

$$\frac{\mu}{\lambda} < \frac{1}{1 + |\sin\theta_1|} \quad (13)$$

根据式(6)可以证明角谱存在与阵列方向图相同的现象, 即在式(12)确定的角上出现栅瓣。按式(13)选 μ 可保证在可见区 $[-2\pi, 2\pi]$ 内不出现栅瓣。

4 计算与角谱仿真比较

4.1 阵列因子

下面计算了几种阵的阵列因子随角度变化的情况, 以备与空间角谱做比较。示例中均假定 $\theta_1 = 0$ 。

当 $N = 5$ 时, 对于 LMR 阵选取阵列结构为 . 1 . 3 . 3 . 2 , $\mu = \frac{1}{2}\lambda$, LES 阵的

阵元间距为 $d = \frac{1}{2} \lambda$ ，这时算得的阵列因子的变化如图 1。图中①代表 LMR 阵的阵列因子，②为 LES 阵的阵列因子，很明显，LMR 阵有比 LES 更好的分辨性能，但旁瓣较 LES 阵增大了约 5dB。

假定阵长同为 9λ ，对 LMR 阵，当 $\mu = \lambda$ ，共需 $N = 5$ 个阵元；对 LES 阵，当 $d = \lambda$ 时共需 10 个阵元。LMR 阵的结构同图 1，图 2 示出了阵列因子随角度变化情况，曲线①、②代表的意义同图 1。比较两曲线可以看出，LMR 阵的旁瓣较 LES 阵增加了 7dB，但阵元数减少一半。

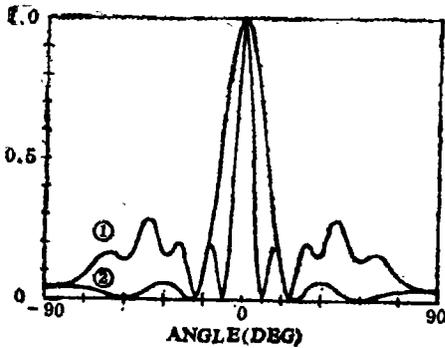


图 1

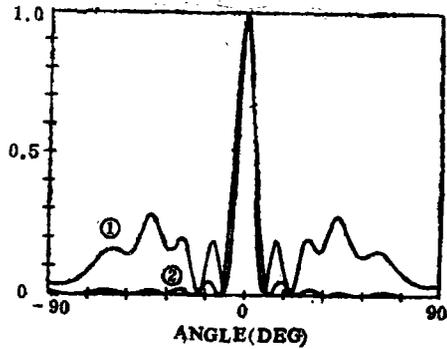


图 2

随机阵也是一种常用的阵。图 3 比较了随机阵与 LMR 阵的性能，阵长、阵元数相等，①代表随机阵，②代表 LMR 阵，两阵分辨能力相同，然而随机阵的旁瓣比 LMR 阵的大。

4.2 阵列结构的角谱仿真

根据上面分析结果，进行了计算机仿真，分为两种情况：

(1) 阵元数一定，比较 LES 阵与 LMR 阵的性能。

这种情况对应的实际背景是阵列孔径尺寸不受限，但阵元数一定，如单脉冲跟踪雷达加装一定的辅助元来提高角跟踪能力。作者在角谱分析中，除了考虑阵的分辨力以外，还考虑旁峰的影响，因为旁峰会影正确判决，而这两个指标有时是矛盾的，故在实际中须加以权衡。这也正是本文在阵列因子计算中讨论旁瓣及在后面仿真中讨论旁峰的原因。

对这种情况，仿真条件如下：入射场存在二个弱相关信号源，方位分别为 -2° 与 $+2^\circ$ ，信噪比分别为 20dB、15dB，采用 20 个独立采样，其它条件均同图 1。图 4 示出了利用 MUSIC 算法计算的空间角谱。显然 LMR 阵 (a) 的性能优于 LES 阵 (b)，但旁峰有所增加，这与图 1 是一致的。

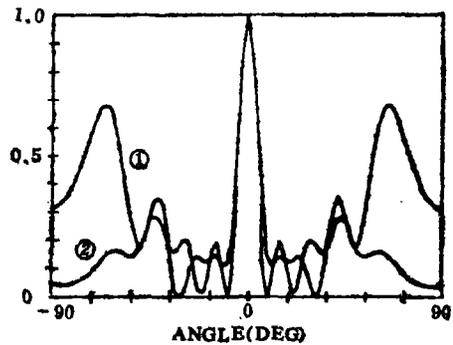


图 3

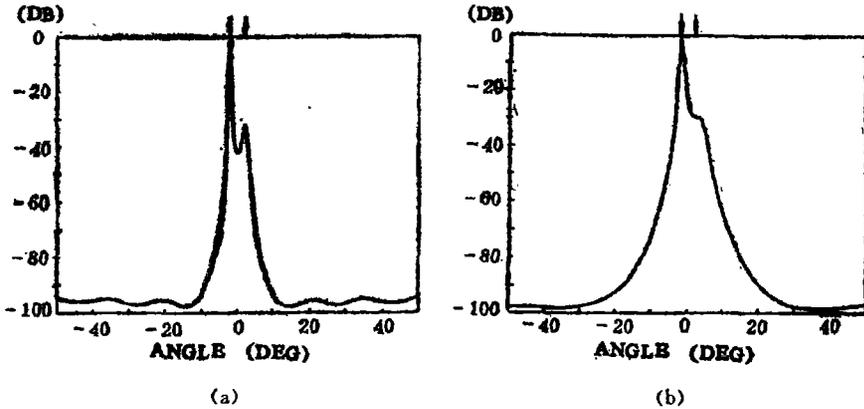


图 4

(2) 阵列孔径一定，LES阵与LMR阵性能比较。

实际背景为：在相控阵雷达中阵列孔径不能超过主阵孔径，只能考虑如何抽取较少的阵元用于角谱估计，在大大减少计算量的条件下，又不至于使性能明显下降。

假设两种阵的孔径都是 6λ 。这样，若用LES阵，且 $d = \lambda/2$ 就需13个阵元；若用LMR阵， $\mu = \lambda/2$ 阵元数仅需6个。图5示出了角谱的模拟结果，入射场信号源方位同图4，但信噪比分别为15dB、10dB。可以看出，两阵性能相差不大。(a)代表LMR阵，(b)代表LES阵。

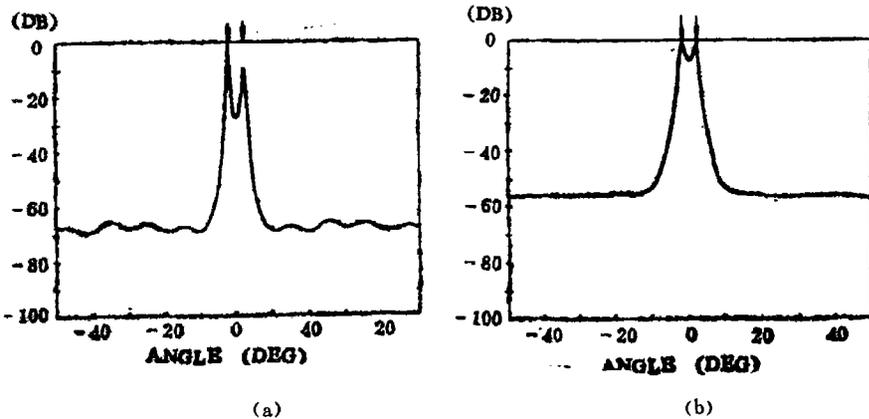


图 5

前面证明了整数阵存在栅瓣，这反应在角谱中即会出现栅峰。图6给出了这一现象的MUSIC算法角谱仿真，仿真条件同图4，只是为了验证前面证明，取 $\mu = 2\lambda$ 。图中示出 $\pm 30^\circ$ 附近有 -10dB 的栅峰，这与由式(12)计算的结果相符。

5 结 论

理论分析与仿真，都说明了采用非均匀阵，具体地说 LMR 阵，在某些性能上优于均匀阵。这主要表现在计算量的减少和分辨力的提高。通过对阵列因子分析及角谱仿真的结果与阵列因子的计算结果统一的事实，认为用于超角分辨的阵列设计可以简化，即

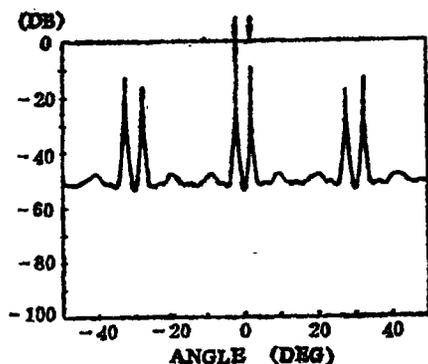


图 6

不必在得到空间角谱后再做比较, 以判断阵列性能的优劣, 而仅需计算阵列因子和以此做比较。另外还证明了非均匀阵在一定条件下存在栅瓣问题。

参 考 文 献

- [1] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation. IEEE Trans. 1986; AP-34 (3)
- [2] Moffet A J. Mimimum-redundancy linear arrays, IEEE Trans. 1968; AP-16 (2)
- [3] Lang S W, et al. Array design for MEM and MLM array processing. IEEE ICASSP, 1981
- [4] Graaf R S De, et al. Optimal linear array for narrow band beamforming. IEEE ICASSP. 1984
- [5] Steinberg B D. Principles of aperture & array system design. Wiley, New York, 1976

Problem on the Design of Non-Uniformly Spaced Array Used in Adaptive Super-Angle-Resolution

Su Yi

(Department of Electronic Technology)

Abstract

The structure problems of non-uniformly spaced array used in adaptive super-angle-resolution(SUAR) are discussed in this paper. It is shown that the performances of the angle spectrum of eigenvector algorithms, under some conditions, are determined completely by array factor. Analyses and simulations have illustrated that the linear minimum redundancy (LMR) array is a kind of SUAR array with good performances. It is also shown that some kinds of non-uniformly spaced array, which is the same as uniformly spaced array, have the problem of grating lobes. In this paper, a fomula of the unit length of the array to avoid grating lobes is presented.

Key words, Adaptive array; non-uniformly array, super Angle resolution