国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第11卷第4期　1989年12月　Vol.11 No.4

线性电路的冲激响应

谢　九　如

（南昌陆军学院）

摘　要　在线性电路分析中，直接求解线性时变电路的冲激响应一般是很困难的。但是，可将求解冲激响应的问题转化为在一组等效的初始条件下求解零输入响应的问题，关键在于得出这组等效的初始条件。文中介绍了一种求等效初始条件的方法。

关键词　线性电路，冲激函数，冲激响应，零输入响应，等效初始条件

分类号　TM13

在线性电路分析中，运用和计算冲激响应是很重要的。线性电路包括线性时变电路和线性定常电路，后者可看作前者的一个特例，故先来讨论线性时变电路的冲激响应。

1　线性时变电路的冲激响应

线性时变电路可以用变系数线性微分方程或微分方程组来描述。为简单起见，仅考虑单输入—单输出的线性时变电路，它可用下述方程描述

$$a_n(t)\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_1(t)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+a_0(t)x(t)$$

$$=b_m(t)\frac{\mathrm{d}^m f(t)}{\mathrm{d}t^m}+b_{m-1}(t)\frac{\mathrm{d}^{m-1}f(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\cdots+b_1(t)\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}b_0(t)f(t) \tag{1}$$

或简写成

$$D(p,t)x(t)=M(p,t)f(t) \tag{2}$$

式中，$x(t)$为电路的响应（如电压、电流等）；$f(t)$为外加激励（如电压源、电流源等）；算子 $p=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$；$D(p,t)=\sum_{k=0}^{n}a_k(t)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}$；$M(p,t)=\sum_{j=0}^{m}b_j(t)\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}$.

这里仅讨论 $n>m$ 的情况。

根据定义，电路的冲激响应乃是电路在单位冲激激励下的零状态响应，用$h(t,\tau)$表示，它就是下述方程的解

学术论文　1988年8月30日收稿

$$D(p,t)h(t,\tau)=M(p,t)\delta(t-\tau) \tag{3}$$

具有初始条件

$$\left.\frac{\partial^k h(t,\tau)}{\partial t^k}\right|_{t=\tau^-}=0 \qquad k=0,1,2,\cdots,(n-1) \tag{3a}$$

式中，$\delta(t-\tau)$为 $t=\tau$ 时加入的单位冲激，$\delta(t)$为狄拉克函数；t 和 τ 分别表示响应过程的时间和激励加入的时间；τ^-表示激励刚刚加入前的一瞬间。

(3)式的右端包含着冲激及其各阶导数，它们都是奇异函数，直接求解方程(3)是很困难的。可以证明，时变电路的冲激响应可以等价为某一组非零初始条件下的零输入响应。这在数学上即意味着，非齐次微分方程(3)在零初始条件(3a)下的解，与其对应的齐次微分方程在某一组非零初始条件下的解是同一的。在物理意义上讲，由于$\delta(t-\tau)$及其各阶导数在 $t>\tau$ 时均等于零，这样，方程(3)的右边在$t>\tau$时恒等于零。因此在 $t>\tau$ 时，冲激响应恒等于零输入响应。方程(3)右边的奇异函数从实质上来说确定了 $t=\tau^+$（冲激刚加入后的一瞬间）时的初始条件。下面的问题就是确定这组等效的初始条件。

令
$$M(p,t)\delta(t-\tau)=R(t,\tau) \tag{4}$$
$$h(t,\tau)=x^*(t) \tag{4a}$$

则(3)、(3a)式可改写如下

$$D(p,t)x^*=R(t,\tau) \tag{5}$$
$$\left.\frac{d^k x^*}{dt^k}\right|_{t=\tau^-}=0 \qquad k=0,1,2,\cdots,n-1 \tag{5a}$$

与之对应的齐次微分方程为

$$D(p,t)x=0 \qquad t>\tau \tag{6}$$

具有初始条件

$$\left.\frac{d^k x}{dt^k}\right|_{t=\tau^+}=x^{(k)}(\tau) \qquad k=0,1,2,\cdots,n-1 \tag{6a}$$

(6)式右边无奇异函数，其解 x 在 $t=\tau$ 处是连续的，即$x(\tau^-)=x(\tau^+)=x(\tau)$；(5)式右边包含奇异函数，故 x^* 在 $t=\tau$ 处不一定连续。

设方程(5)、(5a)与方程(6)、(6a)在 $t>\tau$ 时具有同一解，即 $x^*=x, t>\tau$. 或写作

$$x^*=xu(t-\tau) \tag{7}$$

式中$u(t-\tau)$为单位阶跃函数。

后面将用到单位阶跃函数及单位冲激函数的下列性质：

(1) $$\frac{d}{dt}u(t-\tau)=\delta(t-\tau) \tag{8}$$

(2) $$f(t)\delta(t-\tau)=f(\tau)\delta(t-\tau) \tag{9}$$

(3) $$\frac{d^k}{dt^k}\delta(t-\tau)=(-1)^k\frac{d^k}{d\tau^k}\delta(t-\tau) \tag{10}$$

因此

$$f(t)\frac{d^k}{dt^k}\delta(t-\tau)=(-1^k)f(t)\frac{d^k}{d\tau^k}\delta(t-\tau)$$

$$=(-1)^k\frac{d^k}{d\tau^k}[f(t)\delta(t-\tau)]$$

$$=(-1)^k\frac{d^k}{d\tau^k}[f(\tau)\delta(t-\tau)]$$

$$=\sum_{\mu=0}^{k}(-1)^k c_k^{\mu} f^{(k-\mu)}(\tau)\delta_\tau^{(\mu)}(t-\tau) \tag{11}$$

式中：$c_k^\mu=\frac{k!}{(k-\mu)!\mu!}$；$f^{(k-\mu)}(\tau)=\frac{d^{k-\mu}}{d\tau^{k-\mu}}f(\tau)$；$\delta_\tau^{(\mu)}(t-\tau)=\frac{d^\mu}{d\tau^\mu}\delta(t-\tau)$

对(7)式两边微分到 n 次，并考虑到(6a)及(9)式，可得

$$x^*=xu(t-\tau)$$

$$\frac{dx^*}{dt}=\frac{dx}{dt}u(t-\tau)+x(\tau)\delta(t-\tau)$$

$$\frac{d^2d^*}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}u(t-\tau)+x^{(1)}(\tau)\delta(t-\tau)+x(\tau)\delta_t^{(1)}(t-\tau)$$

……

$$\frac{d^nx^*}{dt^n}=\frac{d^nx}{dt^n}u(t-\tau)+x^{(n-1)}(\tau)\delta(t-\tau)+\cdots+x(\tau)\delta_t^{(n-1)}(t-\tau) \tag{12}$$

式中：$\delta_t^{(k)}(t-\tau)=\frac{d^k}{dt^k}\delta(t-\tau)$

用 $a_0(t)$乘(12)式中的第一行，$a_1(t)$乘第二行……等，直到$a_n(t)$乘第 n 行，然后相加并整理得到

$$D(p,t)x^*-[D(p,t)x]u(t-\tau)=R^*(t,\tau)$$

式中

$$R^*(t,\tau)=\sum_{k=0}^{n-1}\delta_t^{(k)}(t-\tau)\sum_{r=0}^{n-k-1}a_{k+r+1}(t)x^{(r)}(\tau) \tag{13}$$

当 $t>\tau$ 时，x 决定于(6)式，即 $D(p,t)x=0$，于是

$$D(p,t)x^*=R^*(t,\tau)\qquad t>\tau$$

由方程(5)可知，$R^*(t,\tau)=R(t,\tau)$.利用(11)式变换(13)式并加整理得到

$$R(t,\tau)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\sum_{r=0}^{n-k-1}x^{(r)}(\tau)\sum_{\mu=0}^{k}c_k^\mu a_{k+r+1}^{(k-\mu)}(\tau)\delta_\tau^{(\mu)}(t-\tau)$$

改变求和次序得到

$$R(t,\tau)=\sum_{\mu=0}^{n-1}\delta_\tau^{(\mu)}(t-\tau)\sum_{r=0}^{n-\mu-1}x^{(r)}(\tau)\sum_{k=\mu}^{n-r-1}(-1)^k c_k^\mu a_{k+r+1}^{(k-\mu)}(\tau)$$

由(10)式

$$\delta_\tau^{(\mu)}(t-\tau)=\frac{d^\mu}{d\tau^\mu}\delta(t-\tau)=(-1)^\mu\frac{d^\mu}{dt^\mu}\delta(t-\tau)=(-1)^\mu\delta_t^{(\mu)}(t-\tau)$$

代入上式得到

$$R(t,\tau)=\sum_{\mu=0}^{n-1}\delta_t^{(\mu)}(t-\tau)\sum_{r=0}^{n-\mu-1}x^{(r)}(\tau)\sum_{k=\mu}^{n-r-1}(-1)^{k+\mu}c_k^{\mu}a_{k+r+1}^{(k-\mu)}(\tau)$$

$$=\sum_{\mu=0}^{n-1}(-1)^{\mu}\beta_{\mu}(\tau)\delta_t^{(\mu)}(t-\tau)\tag{14}$$

式中

$$\beta_{\mu}(\tau)=\sum_{r=0}^{n-\mu-1}x^{(r)}(\tau)\sum_{k=\mu}^{n-r-1}(-1)^{k}c_k^{\mu}a_{k+r+1}^{(k-\mu)}(\tau)$$

$$=\sum_{r=0}^{n-\mu-1}A_r^{(\mu)}(\tau)x^{(r)}(\tau)\qquad \mu=0,1,2,\cdots,n-1\tag{15}$$

式 中：$A_r^{(\mu)}(\tau)=\sum\limits_{k=\mu}^{n-r-1}(-1)^{k}c_k^{\mu}a_{k+r+1}^{(k-\mu)}(\tau)$ (16)

于是得到了方程(5)的右边部分，其中$\beta_{\mu}(\tau)$决定于方程(6)的系数$a_k(\tau)$及初始条件(6a).

再利用(11)式变换(3)式的右边得到

$$M(p,t)\delta(t-\tau)=\sum_{j=0}^{m}b_j(t)\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\delta(t-\tau)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\tau^j}[b_j(\tau)\delta(t-\tau)]$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\sum_{\mu=0}^{j}(-1)^jc_j^{\mu}b_j^{(j-\mu)}(\tau)\delta_{\tau}^{(\mu)}(t-\tau)$$

$$=\sum_{\mu=0}^{m}\delta_t^{(\mu)}(t-\tau)\sum_{j=\mu}^{m}(-1)^{j+\mu}c_j^{\mu}b_j^{(j-\mu)}(\tau)\tag{17}$$

由(4)式知，$R(t,\tau)=M(p,t)\delta(t-\tau)$，即

$$\sum_{\mu=0}^{n-1}(-1)^{\mu}\beta_{\mu}(\tau)\delta_t^{(\mu)}(t-\tau)=\sum_{\mu=0}^{m}\delta_t^{(\mu)}(t-\tau)\sum_{j=\mu}^{m}(-1)^{j+\mu}c_j^{\mu}b_j^{(j-\mu)}(\tau)$$

比较等式两边各相应项可得：

$$\beta_{\mu}(\tau)=\sum_{j=\mu}^{m}(-1)^jc_j^{\mu}b_j^{(j-\mu)}(\tau)\qquad \mu=0,1,2,\cdots,m\tag{18}$$

$$\beta_{\mu}(\tau)=0\qquad \mu=m+1,\cdots,n-1\tag{18a}$$

另一方面，由(15)式得

$$\beta_{\mu}(\tau)=\sum_{r=0}^{n-\mu-1}A_r^{(\mu)}(\tau)x^{(r)}(\tau)$$

$$=\sum_{r=0}^{n-\mu-2}A_r^{(\mu)}(\tau)x^{(r)}(\tau)+A_{n-\mu-1}^{(\mu)}(\tau)x^{(n-\mu-1)}(\tau)$$

即

$$x^{(n-\mu-1)}(\tau)=\frac{1}{A_{n-\mu-1}^{(\mu)}(\tau)}\left[\beta_{\mu}(\tau)-\sum_{r=0}^{n-\mu-2}A_r^{(\mu)}(\tau)x^{(r)}(\tau)\right]$$

由(16)式可得：$A_{n-\mu-1}^{(\mu)}(\tau)=(-1)^{\mu}a_n(\tau)$

代入上式得：

$$x^{(n-\mu-1)}(\tau)=\frac{1}{(-1)^{\mu}a_n(\tau)}\left[\beta_{\mu}(\tau)-\sum_{r=0}^{n-\mu-2}A_r^{(\mu)}x^{(r)}(\tau)\right]$$

以(16)、(18)式代入上式得：

$$x^{(n-\mu-1)}(\tau)=\frac{1}{(-1)^{\mu}a_n(\tau)}\Big[\sum_{j=\mu}^{m}(-1)^{j}c_j^{\mu}b_j^{(j-\mu)}(\tau)$$

$$-\sum_{r=0}^{n-\mu-2}x^{r}(\tau)\sum_{k=\mu}^{n-r-1}(-1)^{k}c_k^{\mu}a_{k+r+1}^{(k-\mu)}(\tau)\Big]$$

$$=\frac{1}{a_n(\tau)}\Big[\sum_{j=\mu}^{m}(-1)^{j-\mu}c_j^{\mu}b_j^{(j-\mu)}(\tau)$$

$$-\sum_{r=0}^{n-\mu-2}x^{(r)}(\tau)\sum_{k=\mu}^{n-r-1}(-1)^{k-\mu}c_k^{\mu}a_{k+r+1}^{(k-\mu)}(\tau)\Big] \tag{19}$$

由(18)、(18)式可知，上式右端除前$(m+1)$个式子外，其余$[n-(m+1)]$个方程的右边等于零，而共有n个变量：$x(\tau)$，$x^{(1)}(\tau),\cdots,x^{(n-1)}(\tau)$。可以证明，上式的前$[n-(m+1)]$个变量等于零。即

$$x^{(r)}(\tau)=0\qquad r=0,1,2,\cdots,n-m-2 \tag{19a}$$

故(19)式中第二部分和式的变量r应从$(n-m-1)$开始，即

$$x^{(n-\mu-1)}(\tau)=\frac{1}{a_n(\tau)}\Big[\sum_{j=\mu}^{m}(-1)^{j-\mu}c_j^{\mu}b_j^{(j-\mu)}(\tau)$$

$$-\sum_{r=n-m-1}^{n-\mu-2}x^{(r)}(\tau)\sum_{k=\mu}^{n-r-1}(-1)^{k-\mu}c_k^{\mu}a_{k+r+1}^{(k-\mu)}(\tau)\Big] \tag{20}$$

再回到(3)及(3a)式，即以$h(t,\tau)$代替(19a)、(20)中的$x(t)$，于是得到

$$\left.\frac{\partial^r h(t,\tau)}{\partial t^r}\right|_{t=\tau^+}=0\qquad r=0,1,2,\cdots,n-m-2 \tag{21}$$

$$\left.\frac{\partial^{n-\mu-1}}{\partial t^{n-\mu-1}}h(t,\tau)\right|_{t=\tau^+}=\frac{1}{a_n(\tau)}\Big[\sum_{j=\mu}^{m}(-1)^{j-\mu}c_j^{\mu}b_j^{(j-\mu)}(\tau)$$

$$-\sum_{r=n-m-1}^{n-\mu-2}h_t^{(r)}(\tau,\tau)\sum_{k=\mu}^{n-r-1}(-1)^{k-\mu}c_k^{\mu}a_{k+r+1}^{(k-\mu)}(\tau)\Big]$$

$$\mu=m,\ m-1,\ m-2,\cdots,2,1,0 \tag{22}$$

式中： $h_t^{(r)}(\tau,\tau)=\frac{\partial^r}{\partial t^r}h(t,\tau)|_{t=\tau^+}$

可以看出，(22)式为一递推公式，每求一项初值，均要利用其以前各项的结果。但在求首项$h_t^{(n-m-1)}(\tau,\tau)$时$(\mu=m)$，(22)式中方括号内的第二项显然为零。

因此，线性电路的冲激响应可以等价为非零初始条件下的零输入响应，其等效初始条件由(21)及(22)式确定。至于如何在该组初始条件下求解微分方程(6)的问题，则应属于一般数学问题，此处不赘述。

2 线性定常电路的冲激响应

线性定常电路的冲击响应可用下述方程描述

$$D(p)h(t-\tau)=M(p)\delta(t-\tau) \tag{3b}$$

具有初始条件

$$\left.\frac{\mathrm{d}^k h(t-\tau)}{\mathrm{d}t^k}\right|_{t=\tau^-}=0\qquad k=0,1,2,\cdots,n-1 \tag{3c}$$

式中： $D(p)=\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}$； $M(p)\sum_{j=0}^{m}b_j\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}$；

a_k、b_j 均为常数，考虑到这一点，(21)及(22)式可改写如下

$$h_i^{(r)}(0)=0 \qquad r=0,1,2,\cdots,n-m-2 \tag{23}$$

$$h_i^{(n-\mu-1)}(0)=\frac{1}{a_n}\left[b_\mu-\sum_{r=n-m-1}^{n-\mu-2}a_{\mu+r+1}h_i^{(r)}(0)\right]$$
$$\mu=m,m-1,m-2,\cdots,2,1,0 \tag{24}$$

式中：$h_i^{(r)}(0)=\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}t^r}h(t-\tau)\,|_{t=\tau^+}$

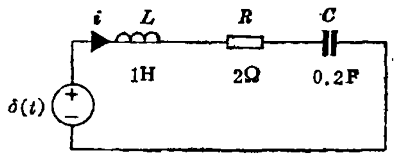
此即将求线性定常电路的冲激响应转化为求零输入响应时的等效初始条件。可以看出，(24)式比(22)式简单得多。

设方程(3b)的所有特征根互不相等，则其冲激响应为

$$h(t-\tau)=\left[\sum_{k=1}^{n}c_ke^{s_k(t-\tau)}\right]u(t-\tau)$$

式中，c_k 可由(23)及(24)式所得出的初始条件来确定；s_k 为特征方程的根。

例 求下图所示电路的冲激响应（以 i 为响应变量）。



解

令 $i(t)=h(t)$，它是下列方程的解

$$\frac{\mathrm{d}^2h(t)}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}+5h(t)=\frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$h(0_-)=0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_-}=0$$

此非齐次微分方程的解可等价为下述齐次微分方程的解

$$\frac{\mathrm{d}^2h(t)}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}+5h(t)=0 \qquad t>0$$

初始条件由(24)式确定

$$h(0)=\frac{1}{a_2}[b_1]=1$$

$$h^{(1)}(0)=\frac{1}{a_2}[b_0-a_1h(0)]=-2$$

此处，$a_1=2$，$a_2=1$，$b_0=0$，$b_1=1$，乃是非齐次微分方程相应项的系数。

对应的特征方程为：$s^2+2s+5=0$．特征根，$s_{1,2}=-1\pm j2$，为一对共轭复根，故齐次微分方程的解为：

$$h(t)=ke^{-t}\cos(2t+\theta)u(t)$$

$$\frac{dh(t)}{dt}=k\cos\theta\delta(t)-ke^{-t}[\cos(2t+\theta)+2\sin(2t+\theta)]u(t)$$

式中，待定常数 k 及 θ 由初始条件确定。当 $t=0^+$ 时有

$$h(0)=k\cos\theta=1$$

$$h^{(1)}(0)=-2k\sin\theta-k\cos\theta=-2$$

解上述方程得到 $k=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\theta=26.6°$，于是得到

$$h(t)=\frac{\sqrt{5}}{2}e^{-t}\cos(2t+26.6°)\qquad t>0$$

参 考 文 献

〔1〕 Desoer C A & Kuh E S. Basic Circuit Theory, McGraw-Hill, New York, 1969

〔2〕 Автоматическое Управление И Вычислительная Техника Выпуск3, Государственное Научно-Техническое Издательство, Машиностроительной Литературы Москва, 1960, 237～240

Impulse Response in Linear Circuits

Xie Jiuru

(Nangchang Army Institute)

Abstract

It is usually very difficult to settle directly impulse response of linear time-varied circuit in the linear circuit analysis. But, the way of settling the problem of impulse response can be changed into that of setting zero input response under the equivalent initial condition. The key to the settlement lies in obtaining the equivalent initial condition. A method of settling equivalent initial condition is introduced in this paper.

Key Words: linear circuit; impulse function, impulse response, zero input response, equivalent initial condition