

IIR 数字滤波器联立优化 CAD

张文明

(电子技术系)

摘要 文中介绍了多目标联立最佳逼近 CAD 方法,对各种设计方法的性能作了分析比较,提出了改善途径。程序在 IBM-PC/XT 微机上运行通过,文中给出了应用线性相位 IIR 数字滤波器线性规划逼近法设计的低通实例。

关键词 数字信号处理,线性规划,折衷优化

分类号 TN7

数字滤波器 CAD 是随着电子计算机的发展从六十年代开始发展起来的。数字滤波器设计目标主要是幅度、相位和群延时。近来,最优化技术和最佳逼近准则有了很大的发展,尤其是多目标联立优化技术的发展,为高性能的数字滤波器的设计提供了理论上和技术上的条件。

IIR 数字滤波器 CAD 有单目标和多目标设计之分,也有频域设计和时域设计之分。所谓单目标设计是指仅对幅度或相位(群延时)作最佳逼近的设计方法,所谓多目标设计法是指幅度和相位联立优化的设计方法。目前,国内文献大量介绍的是前者,文献[8]介绍了一种多目标联立优化的设计方法,但其算法繁杂。本文将介绍两种简便、实用的设计方法,其一为非线性规划问题,另一为线性规划问题。

1 IIR 数字滤波器联立优化 CAD

1.1 MCO 准则的 IIR 数字滤波器联立优化设计^[1]

本设计方法是运用 MCO 准则对 IIR 数字滤波器幅度和群延时进行联立最优化设计。MCO 准则不要求对设计目标和可设计的滤波器类型作任何制约,适用于最一般类型滤波器的设计。本方法属于非线性规划问题。

(1) 问题的提出

设 $H(\omega, x)$ 为滤波器的传输函数,滤波器幅度和群延时分别表示为 $|H(\omega, x)|$ 和 $D(\omega, x)$ 。这里 x 表示滤波器传输函数系数。若期望的幅度平方和群延时目标分别为 $T_M(\omega)$ 、 $T_D(\omega)$, $W_M(\omega)$ 和 $W_D(\omega)$ 表示非负误差加权函数,那么频域下滤波器幅度和群延时误差为:

$$e_M(x) = \max_{\omega \in B_1} W_M(\omega) \cdot |T_M(\omega) - |H(\omega, x)|^2| \quad (1)$$

$$e_D(x) = \max_{\omega \in B_2} W_D(\omega) \cdot |T_D(\omega) - D(\omega, x)| \quad (2)$$

B_1 、 B_2 为 $[0, \pi]$ 子区间, ω 统一使用归一化频率。

幅度和群延时联立优化设计可用以下公式表示:

$$\min_x \begin{bmatrix} e_M(x) \\ e_D(x) \end{bmatrix} \quad (3)$$

s. t 约束条件

显然(3)属于多目标规划问题。

(2) MCO 的基本概念^[4]

MCO 是一种关于矛盾目标之间优化折衷的最优化准则, 即多目标联立优化, 在电路设计、自动控制、系统工程等领域中得到了广泛的应用。这里只简略介绍 MCO 准则的基本概念。

设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 n 维参数空间的一点, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ 是 m 维目标空间的一个点。如果 x^* 是单目标函数的最优点, 则有 $f(x^*) \leq f(x)$ 成立。可是当多目标同时考虑时, 两者就不能简单地用 \leq 号连接了, 可能某一目标函数减少, 同时另一个目标函数递增。正因为多目标之间这种竞争性, MCO 问题不存在各目标函数均达到最优的解, 而只能有折衷优化解。

MCO 问题可用如下形式表示:

$$\begin{aligned} & \min_x f(x) \\ & \text{s. t. 约束条件 } g_i(x) \leq 0 \\ & \quad h_i(x) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, K \end{aligned}$$

K 表示 g 、 h 约束条件的总数。

MCO 问题广泛采用的加权和法是一种将 MCO 向量问题转化为标量目标函数优化问题的有效方法, 可表示如下:

$$\begin{aligned} & \min_x W^T f(x) \\ & \text{s. t. } \begin{aligned} g_i(x) & \leq 0 \\ h_i(x) & = 0 \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, K \end{aligned}$$

加权向量 W 的选择可采用以下两种方法:

(a) 令 $f^{1*}, f^{2*}, \dots, f^{m*}$ 分别表示第 1, 2, \dots , m 个目标函数达到最优的解。列方程组:

$$\begin{aligned} W^T \cdot f^{1*} & = 1 \\ W^T \cdot f^{2*} & = 1 \\ & \dots \\ W^T \cdot f^{m*} & = 1 \end{aligned}$$

解此方程组即可求得加权向量函数 W 。其中当 $m=1$ 时, 问题退化为单目标优化形式。

(b) 设 $F_{\min} = \min(f_1^{\min}, f_2^{\min}, \dots, f_m^{\min})$

$$F_{\max} = \max(f_1^{\max}, f_2^{\max}, \dots, f_m^{\max})$$

$$\text{令 } \Delta f_i = f_i^k - F_{\min i}$$

$$\text{或 } \Delta f_i = F_{\max i} - f_i^k$$

k 表示第 k 次迭代后目标函数中间解为 f_i^k , 则

$$W^{k+1} = \left(1, \frac{\Delta f_1}{\Delta f_2}, \frac{\Delta f_2}{\Delta f_3}, \dots, \frac{\Delta f_1}{\Delta f_m} \right)$$

(3) 运用 MCO 准则的滤波器逼近的数学模型
应用 MCO 理论, 问题(3)转化为频域上求解:

$$\min_x \max [v_1 e_M(x), v_2 e_D(x)] \tag{4}$$

s.t. 约束条件

$v = [v_1, v_2]$ 是一对称为加权的非负实数。

问题具体表述如下:

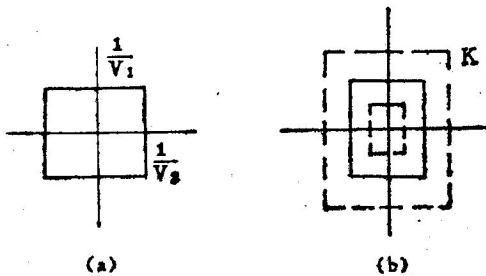
$$\min_{x, \delta} \delta \tag{5}$$

$$\text{s.t. 幅度约束条件: } v_1 \cdot W_M(\omega_{j1}) |T_M(\omega_{j1}) - |H(\omega_{j1}, x)||^2 \leq \delta \quad \omega_{j1} \in B_1$$

$$\text{群延时约束条件: } v_2 W_D(\omega_{j2}) |T_D(\omega_{j2}) - D(\omega_{j2}, x)| \leq \delta \quad \omega_{j2} \in B_2$$

其它约束条件。

加权 $v = [v_1, v_2]$ 是根据设计者的偏向自由选择的。当 $v_1 = 1, v_2 = 0$ 或 $v_1 = 0, v_2 = 1$ 时, 多目标问题退化为单目标问题。图 1 表示按 L_∞ 范数用加权 v 建立起来的等值面属, MCO 问题的解实质上就是等值面属和折衷优化解面的交点, 如图 2 所示。因此每个加权 v 表示位于折衷优化面 A 边界的折衷优化性能, 当 v 改变时, 所有的折衷优化性能即可求得, 可以方便地选择所需要的最佳性能。



(a) 性能等值 1 (b) 性能等值 K

图 1 加权 (v_1, v_2) L_∞ 范数等值面

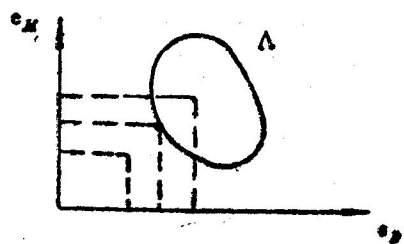


图 2 折衷优化性能解产生

设 IIR 数字滤波器传输函数为:

$$H(\omega, x) = A \prod_{i=1}^K \frac{1 + a_i e^{-j\omega} + b_i e^{-j2\omega}}{1 + c_i e^{-j\omega} + d_i e^{-j2\omega}} \tag{6}$$

这里 $x = (a_1, b_1, c_1, d_1, \dots, a_K, b_K, c_K, d_K, A)$ 为滤波器传输函数系数。

$$|H(\omega, x)|^2 = |A|^2 \prod_{i=1}^K \left\{ \frac{N_i(\omega, x)}{Q_i(\omega, x)} \right\} \quad (7)$$

其中

$$N_i(\omega, x) = 1 + a_i^2 + b_i^2 + 2a_i(1 + b_i)\cos\omega + 2b_i\cos(2\omega)$$

$$Q_i(\omega, x) = 1 + c_i^2 + d_i^2 + 2c_i(1 + d_i)\cos\omega + 2d_i\cos(2\omega)$$

$$\begin{aligned} \text{Arg}[H(\omega, x)] = & \sum_{i=1}^K \left\{ \tan^{-1} \left[-\frac{a_i \sin\omega + b_i \sin(2\omega)}{1 + a_i \cos\omega + b_i \cos(2\omega)} \right] \right. \\ & \left. - \tan^{-1} \left[-\frac{c_i \sin\omega + d_i \sin(2\omega)}{1 + c_i \cos\omega + d_i \cos(2\omega)} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$D(\omega, x) = -\frac{d\text{Arg}[H(\omega, x)]}{d\omega} = \sum_{i=1}^K \left\{ \frac{Z_i(\omega, x)}{N_i(\omega, x)} - \frac{P_i(\omega, x)}{Q_i(\omega, x)} \right\} \quad (8)$$

其中

$$Z_i(\omega, x) = a_i^2 + 2b_i^2 + a_i(1 + 3b_i)\cos\omega + 2b_i\cos(2\omega)$$

$$P_i(\omega, x) = c_i^2 + 2d_i^2 + c_i(1 + 3d_i)\cos\omega + 2d_i\cos(2\omega)$$

IIR 数字滤波器必须满足稳定性条件:

$$1 - d_i \geq 0, \quad 1 + c_i + d_i \geq 0, \quad 1 - c_i + d_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, K) \quad (9)$$

将(7)~(9)式代入(5)式可得到运用 MCO 准则的滤波器逼近的数学模型。

在上述逼近算法中,重要的不是得到 $T_D(\omega) = \theta$ 的常数群延时,而是群延时误差达到最小,因此 θ 值是可变的,以寻求最小群延时误差。即问题(5)的形式应修正为:

$$\min_{x, \theta, \delta} \delta \quad (10)$$

s. t. 约束条件

B_1 、 B_2 频带域选择为: B_1 为通带和止带域总和, B_2 只选择通带,一般不包括止带(因为幅度为零时群延时将趋于 ∞),况且在止带域中不考虑群延时性能。不考虑过渡带时往往会发生令人无法接受的结果,如过渡带幅度远远超过通带的幅度,因此有必要对过渡带进行矫正。矫正的方法很多,如将过渡带的期望幅度用指数函数表示,也可采用过渡带幅度小于通带幅度的矫正方法。

序列二次规划是解决非线性问题(5)或(10)的有效方法。有了上述设计方法和优化算法,借助于电子计算机,运用 MCO 理论,就可以设计出高性能的滤波器,并进行性能分析,描述它的折衷优化性能曲线,分析零极点特性,并检验其因果稳定性。

1.2. 线性相位 IIR 数字滤波器线性规划逼近^[2]

应用线性规划技术设计单目标幅度优化的 IIR 数字滤波器可参阅文献[5]。这里讨论应用线性规划解决幅度和相位联立优化的设计问题。

设 τ_d 是期望的群延时常数,那么期望的线性相位可表示为: $\phi(\omega) = -\tau_d \omega$, ω 为归一化频率变量。止带上相位性可不予考虑。

设 IIR 数字滤波器的传输函数为

$$H(Z) = \frac{P(Z)}{Q(Z)} = \frac{a_0 + a_1 Z^{-1} + \dots + a_N Z^{-N}}{b_0 + b_1 Z^{-1} + \dots + b_M Z^{-M}}$$

这里 $Z = e^{j\omega}$, 不失一般性可假设 $b_0 = 1$, $M = N$ 。

令 $G(\omega_i)$ 、 $\phi(\omega_i)$ 分别为给定的幅度和相位的期望特性, ω_i 为离散频率点, $i=1$,

2, ..., K, K 为离散频率点总数。将滤波器理想特性分实部和虚部表示:

$$Y_R = G(\omega_i) \cos[\phi(\omega_i)] = G(\omega_i) \cos[-\tau_d \omega_i]$$

$$Y_I = G(\omega_i) \sin[\phi(\omega_i)] = G(\omega_i) \sin[-\tau_d \omega_i]$$

定义复误差: $r(\omega_i) = Y_R(\omega_i) + jY_I(\omega_i) - \frac{P(e^{j\omega_i})}{Q(e^{j\omega_i})}$

复加权误差: $r(\omega_i) \cdot Q(e^{j\omega_i}) = [Y_R(\omega_i) + jY_I(\omega_i)]Q(e^{j\omega_i}) - P(e^{j\omega_i})$

其中 $P(e^{j\omega_i}) = \sum_{n=0}^N a_n \cos(n\omega_i) - j \sum_{n=0}^N a_n \sin(n\omega_i)$

$$Q(e^{j\omega_i}) = \sum_{m=0}^M b_m \cos(m\omega_i) - j \sum_{m=0}^M b_m \sin(m\omega_i)$$

令 $r(\omega_i) \cdot Q(e^{j\omega_i}) = e_R(\omega_i) + je_I(\omega_i)$, 则

$$\begin{cases} e_R(\omega_i) = \sum_{m=0}^M b_m [Y_R(\omega_i) \cos(m\omega_i) + Y_I(\omega_i) \sin(m\omega_i)] - \sum_{n=0}^N a_n \cos(n\omega_i) \\ e_I(\omega_i) = \sum_{m=0}^M b_m [Y_I(\omega_i) \cos(m\omega_i) - Y_R(\omega_i) \sin(m\omega_i)] + \sum_{n=0}^N a_n \sin(n\omega_i) \end{cases} \quad (11)$$

$i=1, 2, \dots, K$

线性规划多目标联立逼近表示为

$$\begin{aligned} & \min_{x, \delta} \delta & (12) \\ & \text{s.t. } |e_R(\omega_i)| \leq \delta \\ & \quad |e_I(\omega_i)| \leq \delta \\ & \quad + \text{其它约束条件} \end{aligned}$$

$x = (a_0, a_1, \dots, a_N, b_0, b_1, \dots, b_M)$ 为滤波器系数。

滤波器稳定性条件, 有两种类型可供选择:

(a) $b_0 > b_1 > \dots > b_M > 0$ (13)

(b) $R_e[Q(Z)] > 0 \quad |Z| = 1$

即 $\sum_{m=0}^M b_m \cos(m\omega_i) \leq 1 - \epsilon$, $i=1, 2, \dots, K$, ϵ 为很小正数。详细证明参看文献[2].

根据(11)~(13)式得出线性规划逼近数学模型:

$$\begin{aligned} & \min_{x, \tau_d, \delta} \delta \\ & \text{s.t. } \sum_{m=0}^M b_m [G(\omega_i) \cos\{\omega_i(m + \tau_d)\}] - \sum_{n=0}^N a_n \cos(n\omega_i) - \delta \leq 0 \\ & \quad \sum_{m=0}^M b_m [-G(\omega_i) \sin\{\omega_i(m + \tau_d)\}] + \sum_{n=0}^N a_n \sin(n\omega_i) - \delta \leq 0 \\ & \quad - \sum_{m=0}^M b_m [G(\omega_i) \cos\{\omega_i(m + \tau_d)\}] + \sum_{n=0}^N a_n \cos(n\omega_i) - \delta \leq 0 \\ & \quad - \sum_{m=0}^M b_m [-G(\omega_i) \sin\{\omega_i(m + \tau_d)\}] - \sum_{n=0}^N a_n \sin(n\omega_i) - \delta \leq 0 \\ & \quad \sum_{m=0}^M b_m \cos(m\omega_i) - \delta \leq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

N阶全通滤波器在 $[0, \pi]$ 频率域内常数群延时最大值为 N , 故实际的滤波器常数群延时只能小于 N , 一般在 $N/2$ 与 $N-1$ 之间。

最后将联立优化设计算法作简要归纳:

(1) 决定期望幅频特性; (2) 决定滤波器阶次, 设 $\tau_d = N - 1$; (3) 解(14)式的线性规划问题, 求出最小值 $\delta = \delta_a$, 对应系数 x_1 ; (4) $\tau_d = \tau_d - 1$, 解(14)式, 求出最小值 $\delta = \delta_b$, 对应系数 x_2 ; (5) 若 $\delta_b < \delta_a$, 则 $x_2 \rightarrow x_1$, $\delta_b \rightarrow \delta_a$, 转(4), 否则转(6); (6) 最优解 $\delta^* = \delta_a$, $\tau_d^* = \tau_d + 1$, 由 x_1 得到滤波器传输函数。

$$\text{幅度总误差: } E_1 = \sum_{i=1}^K [G(\omega_i) - |H(\omega_i)|]^2$$

$$\text{群延时总误差: } E_2 = \sum_i [\tau_d^* - \tau(\omega_i)]^2 \quad \omega_i \in \text{通带}$$

加权技术同样适用于本设计方法, 使得逼近更为准确。在此不再赘述。

2 IIR 数字滤波器联立优化设计方法性能比较

本文讨论的 MCO 准则滤波器幅度和群延时联立优化设计法属于非线性规划问题, 可供选用的算法较多, 如 Fletcher-Powell 法、惩罚函数法、二次规划等等。这种方法对欲设计的滤波器幅度和相位的要求是任意的, 理论上可设计任意阶次、任意响应的滤波器, 而且适用于设计 FIR 数字滤波器。设计方法中由于采用了级联型的传输函数模型, 因而便于准确地实现数字滤波器的零极点, 便于性能调整。MCO 准则作为分析和设计手段, 更增强了滤波器设计及性能分析的系统性和严密性。另外, 该法采用了加权技术, 逼近准确性和灵活性更佳。

但是, 作为非线性规划问题, 缺点在于必须合理地选择滤波器系数的初始值, 而这些系数的选择直接影响能否收敛和收敛速度。另外, 应用该法设计的 IIR 数字滤波器的最优解可能是局部性的折衷优化解, 而不是全局性的折衷优化解, 有待进一步研究。该方法适宜于设计低于 20 阶的 IIR 数字滤波器, 设计一个高阶的 IIR 数字滤波器, 会出现系数灵敏度偏大, 设计稳定性欠佳的不利因素。

线性相位 IIR 数字滤波器的线性规划逼近设计法属于线性规划问题, 设计算法简单, 易于计算机软件实现, 通常可用 I 相对偶单纯形算法或大 M 惩罚单纯形算法加以解决。线性规划问题的一个突出优点在于不需要给定滤波器系数的初始值, 而由计算机自动迭代求出最优解。该方法同样适用于设计任意幅度特性的 IIR 数字滤波器, 滤波器阶次也可任意选择。一般说来, 随着滤波器阶次升高, 逼近准确性更佳, 但滤波器系数的灵敏度亦随之增大, 设计稳定性会较差。这种方法不足之处在于采用了直接型传输函数结构, 对滤波器零极点性能分析和调整不利, 设计时间较长。不过由于计算机处理速度的提高, 设计时间已不是主要问题。

3 设计实例

图 3 展示了阶次为 8、通带为 (0, 0.55)、止带为 (0.6, 1) 的低通滤波器设计实例。由计算机绘制的期望幅频特性、设计的幅频特性、设计的衰减特性、设计的群延时特性、幅度误差特性和群延时误差特性, 具有很强的直观性, 因此不再给出打印的离散的数据结果。表 1 给出了设计后的滤波器系数。

从打印的数据和特性曲线分析, 滤波器幅度误差一般不大于 0.1, 群延时在通带域

内接近常数 4, 基本符合幅度和相位联立设计的要求。但是发现: 由于存在吉布斯现象, 所设计的滤波器在通带边缘、过渡带或其他有突变的地方误差相对偏大。

值得指出的是, 在使用约束条件时, 仅用有限的离散频率点(本例15点)代替了连续频域而设计的滤波器可能不稳定, 或明显与实际不相称。此时设计是失败的, 应改变离散频率点及滤波器阶次重新设计。此外, 设计过程中在某些 τ_d 值上可能不收敛, 但由于 τ_d 可变, 故一般并不妨碍最后最优解的获得。

表 1 最优滤波器传输函数系数

$a(1) = 2.185535E-02$	$b(1) = 1$
$a(2) = -3.463841E-02$	$b(2) = .5753825$
$a(3) = -4.527521E-02$	$b(3) = 1.136241$
$a(4) = .2017956$	$b(4) = .4726529$
$a(5) = .6482801$	$b(5) = -.1141074$
$a(6) = .9671485$	$b(6) = .3686781$
$a(7) = .8726142$	$b(7) = -.3320127$
$a(8) = .4741542$	$b(8) = .1917427$
$a(9) = .134088$	$b(9) = -8.166719E-02$

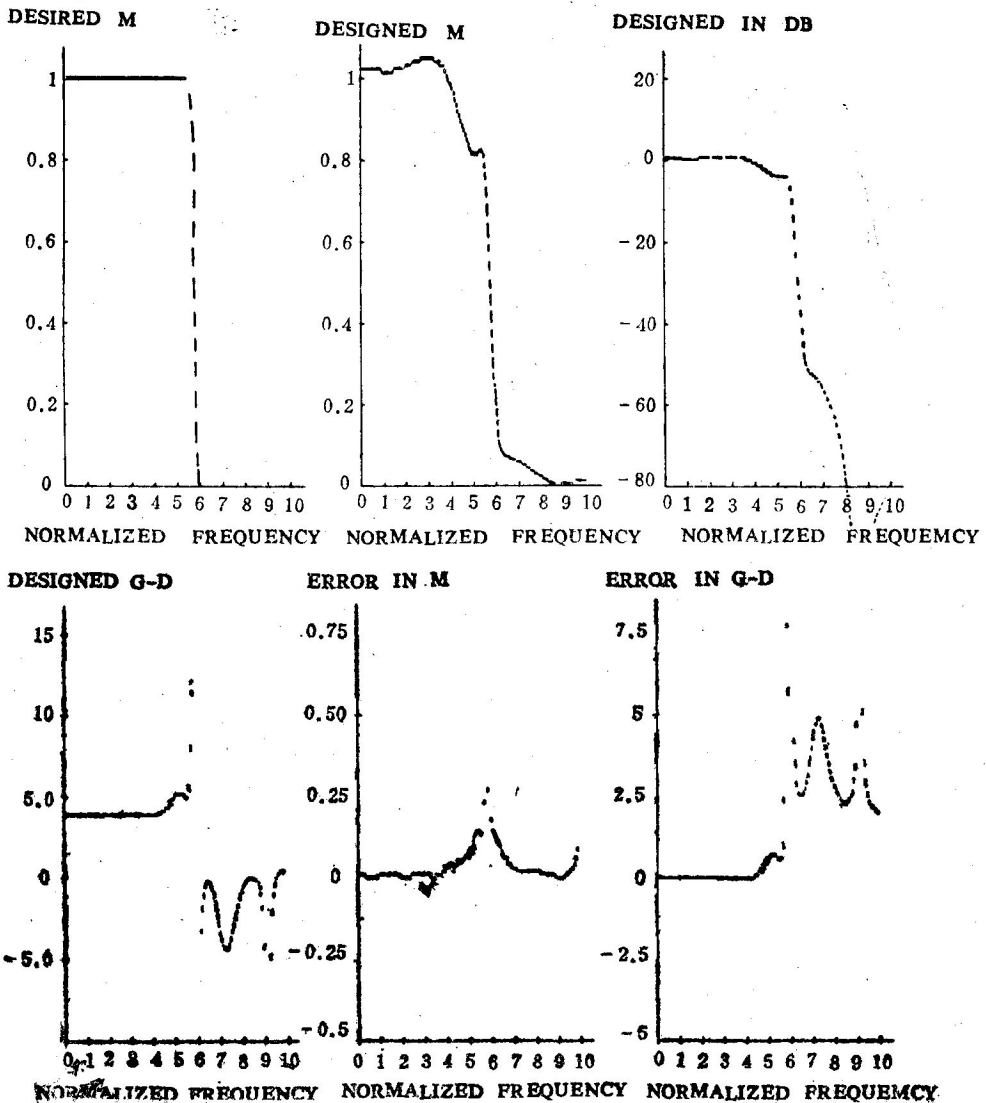


图 3 滤波器特性曲线

在微机上运行，由于受其速度和容量的限制，离散频率点不可能取得很多。若能在中、小型机上实现，建议离散频率点至少取 $4N$ 点，最好采用双精度变量形式。优化算法选用 I 相对偶单纯形算法更为合适。

4 程序流程

(1) 主程序流程框图。

(2) 大 M 惩罚单纯形法线性规划子程序流程框图。

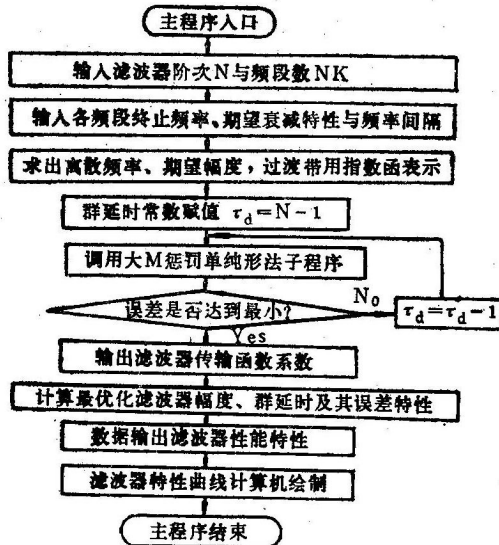


图 4 主程序流程

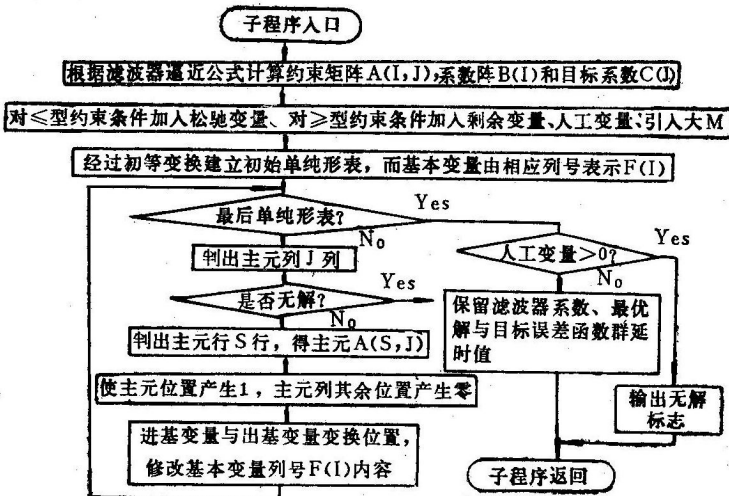


图 5 单纯形子程序流程

5 结束语

本文讨论了非线性规划和线性规划的 IIR 数字滤波器联立优化的 CAD 方法，并对

它们进行了一定的分析比较, 给出了实验结果。随着电子计算机的普及应用, 数字滤波器 CAD 越来越显示出它的生命力, 并有取代经典设计法的趋势。

致 谢

作者在写作和实验中, 得到我校 404 教研室李素芝老师的指导和帮助, 在此深表谢意。

参 考 文 献

- [1] Cuido Cortelazzo and Micael R Lightner. Simlutaneous Design in Both Magnitude and Group-Delay of IIR and FIR Filters Based on Multiple Criterion Optimization, 'IEEE 1984; ASSP-32; 153
- [2] Appannat, Chottera and Grahama Jullien. A Linear Programming Approach to Recursive Digital Filter Design With Linear Phase. IEEE Transactions on Circuits and Systems; 1982; Cas-29(2)
- [3] Detzky A C. Synthesis of recursive filters using the Aimum P-error criterion. 'IEEE Trans, Audio Electroacoust, 1972; au-20; (4)
- [4] Lightner M R and Director S W. 'Multiple Criterion Optimization for the Design of Electronic circuits.' IEEE Trans, Circuits Syst, 1981; cas-28
- [5] Lawrence R R, Nancy C, Howard D Helms. 'Linear Progra mming Design of IIR Digital Filters With Arbitrary magnitude Funotion.' IEEE 1974; ASSP-22; (2)
- [6] VF02AD Harewell Subroutine Library, Harewell Oxon, England 1978
- [7] 王世一. 数字信号处理. 北京: 工业学院出版 1987
- [8] 何振亚. 数字信号处理的理论与应用. 北京: 人民邮电出版社 1983
- [9] J.P. 伊格尼齐奥著, 闵仲求等译. 单目标和多目标系统线性规划. 上海: 同济大学出版社 1982
- [10] 中国电子、仪器仪表学会信号处理学会编译. 数字信号处理程序库. 北京: 清华大学出版社, 1986
- [11] 魏权龄等. 数学规划与优化设计. 北京: 国防工业出版社, 1986

Simultaneous Optimal CAD of IIR Digital Filter

Zhang wenming

(Department of Electronic Technology)

Abstract

The recursive filter CAD methods of multiple objects simultaneous optimal approximation are presented. The performances of design methods are analysed and compared with each other. Further improvement work is given. The program is implemented on the IBM-PC/XT micro-computer. The example of low-pass IIR digital filter design using linear programming approaching is illustrated.

Key Words: Digital signal processing, linear programming, compromise optimization