国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第12卷第1期 1990年3月 Vol.12 No.1

马尔可夫链最优停止的值函数

谷 建 湘
(系统工程与应用数学系)

摘 要 本文讨论了时间无限的马尔可夫链的最优停止问题。对于无限状态情况，给出了其最优停止变量以及值函数存在的一个充分条件；对于有限状态情况，这个充分条件以及问题的计算等价于解一个线性规划问题。

关键词 马尔可夫链，停止变量，不动点，线性规划
分类号 O211.62

有关马尔可夫链的最优停止理论，文[1]进行了比较抽象的描述和理论上的研究。本文研究的马尔可夫链的最优停止问题，就是一个借助于马尔可夫链来描述状态变化的随机动态系统，在每个时刻和不同的状态，决策人可以得到一个相应的支付，问题是决策人按什么样的规则来停止，使得其总期望收益为最大。作者是从一个较具体的模型来考虑的。

本文考虑的最优停止问题是时间无限的情况。首先，定义了马尔可夫链的最优停止问题的值函数，它是从每个状态作为初始状态出发，按其最优停止法则来停止所得到的最大期望收益。结果表明，它实际上是某个算子的一个不动点。从而，作者对无限状态的最优停止问题给出了值函数的存在的一个充分条件。对于有限状态的情况，作者对这个算子的不动点的存在性进行了进一步的分析，结果表明，它等价于一个线性规划的解的存在性，而且这个不动点就是相应线性规划的最优解，因此，同时也就给出了一个计算的方法。

1 问题和定义

设系统的状态空间 $S=\{1,2,\cdots\}$；状态转移概率矩阵 $P=(p_{ij})$，$i,j\in S$. f, g 均为定义在 S 上的一致有界的实函数，称为支付函数。考虑离散时间的情况，时间集 $T=\{0,1,2,\cdots\}$. 一个离散时间马尔可夫链的最优停止问题可以描述如下：在时刻 t，系统处于状态 j，决策人可以考虑是否停止。如果停止，则在状态 j 所得到的支付为 $g(j)$；如果不停止，支付为 $f(j)$，然后系统的状态按概率 p_{jk} 转移到下一时刻 $t+1$ 的状态 k.

学术论文 1988年11月17日收稿

对时刻 $t+1$ 和状态 k 重复上述步骤。设决策人对系统的初始状态、转移规律以及支付函数都是已知的，问题是按什么样的规则来停止而使得其总的期望支付达到最大。从[3]可知，存在一个概率空间（Ω, $\mathscr{F}$, P_i）（P_i 表示在系统开始位于状态 i 的条件下的概率），以及其上的一个马尔可夫链$\{z_t, t\in T\}$，且 P 是它的转移概率矩阵。

由于状态转移规律和支付都是已知的，所以决策人只能按系统从一开始到目前的所有状态的历史样本来决定停否。设$\mathscr{F}_t=\sigma\{z_0,z_1,\cdots,z_t\}$，$t\in T$ 是由 $z_0,z_1,\cdots,z_t$ 生成的σ 代数，设 τ 是（$\Omega,\mathscr{F},P_i$）中的一个关于$\mathscr{F}_t$，$t\in T$ 的停止变量（可以取值$+\infty$）. 如果决策人采用停止变量 τ，则总期望支付为

$$J_i(\tau)=E_i\left\{\sum_{n=0}^{\tau-1}f(z_n)+g(z_\tau)I_{(\tau<+\infty)}\right\} \tag{1}$$

其中 $E_i(\cdot)$表示在概率测度 P_i 下的期望；$I_{(\cdot)}$表示集$(\cdot)$的示性函数。令

$$\Delta_i=\{\tau: P_i(\tau<+\infty)=1,\ J_i(\tau)\text{存在且有限}\}$$

定义 如果存在停止变量 τ，使得

$$J_i(\tau)=\sup_{\sigma\in\Delta_i}J_i(\sigma)$$

则称 τ 为所给马尔可夫链的停止问题（关于初始状态 i）的最优停止变量；如果$J_i(\tau)$还是有限的，则称所给马尔可夫链的最优停止问题（关于初始状态 i）的值存在，值为$J_i(\tau)$；如果对每个 $i\in S$，所给马尔可夫链的最优停止问题的值存在，则称它的值函数存在。

2 无限状态情况

设 $B(S)=\{u(\cdot): u(\cdot)\text{是} S \text{上的实函数，且}\|u\|=\sup_{i\in S}|u(i)|<+\infty\}$

引理 1 (i) 对任何 $u\in B(S)$以及任何 $\beta\in(0,1)$，成立

$$u(i)=E_i\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n\Big(u(z_n)-\beta\sum_{j\in S}u(j)p_{z_n,j}\Big)\right\},\quad i\in S$$

(ii) 对任何 $u\in B(S)$，任何 $\beta\in(0,1)$以及任意停止变量 τ，成立

$$\begin{aligned}&E_i\{\beta^\tau u(z_\tau)I_{(\tau<+\infty)}\}\\&=E_i\left\{\sum_{n=\tau}^{\infty}\beta^n\Big(u(z_n)-\beta\sum_{j\in S}u(j)p_{z_n,j}\Big)I_{(\tau<+\infty)}\right\},\quad i\in S\end{aligned}$$

证明 (i) $E_i\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n\Big(u(z_n)-\beta\sum_{j\in S}u(j)p_{z_n,j}\Big)\right\}$

$$\begin{aligned}&=E_i\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n\big(u(z_n)-\beta E(u(z_{n+1})|z_n)\big)\right\}\\&=E_i\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n u(z_n)\right\}-E_i\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n E(u(z_{n+1})|z_n)\right\}\\&=u(i)+\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n E_i(u(z_n))-\sum_{n=0}^{\infty}\beta^{n+1}E(u(z_{n+1}))\\&=u(i),\quad i\in S\end{aligned}$$

(ii) $F_\beta u(i) \triangleq u(i) - \beta \sum_{j\in S} u(j)p_{ij}$, $i\in S$

根据强马尔可夫性以及(i)的结论，有

$$E_i\left\{\sum_{n=\tau}^{\infty}\beta^n\left(u(z_n)-\beta\sum_{j\in S}u(j)p_{z_n,j}\right)I_{(\tau<+\infty)}\right\}$$

$$=E_i\left\{\beta^\tau\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n F_\beta u(z_{n+\tau})I_{(\tau<+\infty)}\right\}$$

$$=E_i\left\{\beta^\tau E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n F_\beta u(z_{n+\tau})\mid\mathscr{F}_\tau\right)I_{(\tau<+\infty)}\right\}$$

$$=E_i\left\{\beta^\tau E_{z_\tau}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n F_\beta u(z_n)\right)I_{(\tau<+\infty)}\right\}$$

$$=E_i\{\beta^\tau u(z_\tau)I_{(\tau<+\infty)}\},\quad i\in S$$ （证毕）

引入一个 $B(S)$ 到 $B(S)$ 上的算子如下：

$$Tu(i)=\max(g(i),\ f(i)+\sum_{j\in S}u(j)p_{ij}),\quad i\in S$$

关于马尔可夫链的最优停止问题的值的存在性，有如下定理：

定理 1 设算子 T 存在不动点 $v\in B(S)$，即存在 $v\in B(S)$，有

$$v(i)=\max(g(i),\ f(i)+\sum_{j\in S}v(j)p_{ij}),\quad i\in S \tag{2}$$

记 $C=\{i:v(i)=g(i),\ i\in S\}$，定义

$$\tau=\inf\{n\geqslant 0:z_n\in C\} \tag{3}$$

（若等式右边集合为空集，则 $\tau=+\infty$），有 $E_i(\tau)<+\infty$，则所给马尔可夫链的最优停止问题的值存在，且等于 $v(i)$，由(3)式定义的 τ 是一个（关于初始状态 i 的）最优停止变量。

证明 $\tau_m\triangleq\min(\tau,m)$，$m=1,2,\cdots$. 由引理 1 的(i)有

$$v(i)=E_i\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n(v(z_n)-\beta\sum_{j\in S}v(j)p_{z_n,j})\right\}$$

$$=E_i\left\{\sum_{n=0}^{\tau_m-1}\beta^n(v(z_n)-\beta\sum_{j\in S}v(j)p_{z_n,j})\right\}$$

$$+E_i\left\{\sum_{n=\tau_m}^{\infty}\beta^n(v(z_n)-\beta\sum_{j\in S}v(j)p_{z_n,j})\right\}$$

由引理 1 的(ii)，根据上式，有

$$v(i)=E_i\left\{\sum_{n=0}^{\tau_m-1}\beta^n(v(z_n)-\beta\sum_{j\in S}v(j)p_{z_n,j})\right\}+E_i\{\beta^{\tau_m}v(z_{\tau_m})\} \tag{4}$$

在(4)式中令 $\beta\to1^-$，得到：

$$v(i)=E_i\left\{\sum_{n=0}^{\tau_m-1}(v(z_n)-\sum_{j\in S}v(j)p_{z_n,j})\right\}+E_i\{v(z_{\tau_m})\} \tag{5}$$

由 τ 的定义，在样本集$(\tau>n)$上，有

$$v(z_n)=f(z_n)+\sum_{j\in S}v(j)p_{z_n,j}\qquad (\text{a.s.成立})$$

即

$$v(z_n)-\sum_{j\in S}v(j)p_{z_n,j}=f(z_n)\quad (\text{a.s.成立})\tag{6}$$

将(6)式代入(5)式，得：

$$v(i)=E_i\left\{\sum_{n=0}^{\tau_m-1}f(z_n)+v(z_{\tau_m})\right\},\ m=1,2,\cdots\tag{7}$$

而
$$E_i\left\{\sum_{n=0}^{\tau_m-1}f(z_n)+v(z_{\tau_m})\right\}=E_i\left\{I_{(\tau<m)}\left(\sum_{n=0}^{\tau-1}f(z_n)+v(z_\tau)\right)\right\}$$
$$+E_i\left\{I_{(\tau\geq m)}\left(\sum_{n=0}^{m-1}f(z_n)+v(z_m)\right)\right\},\ m=1,2,\cdots\tag{8}$$

令 $m\to+\infty$，并注意到 $E_i(\tau)<+\infty$以及 v、f 均属于 $B(S)$，由(7)和(8)式，得：

$$v(i)=E_i\left\{\sum_{n=0}^{\tau-1}f(z_n)+v(z_\tau)\right\}$$

由 τ 的定义，$v(z_\tau)=g(z_\tau)$，(a.s.成立)所以

$$v(i)=E_i\left\{\sum_{n=0}^{\tau-1}f(z_n)+g(z_\tau)\right\}=J_i(\tau)\tag{9}$$

另一方面，对任意给定的停止变量 $\sigma\in\Delta_i$，从(4)式得到：

$$v(i)=E_i\left\{\sum_{n=0}^{\sigma_m-1}\left(v(z_n)-\sum_{j\in S}v(j)p_{z_n,j}\right)\right\}+E_i\{v(z_{\sigma_m})\}\tag{10}$$

由(2)式，

$$v(i)-\sum_{j\in S}v(j)p_{ij}\geq f(i),\ i\in S\tag{11}$$

$$v(i)\geq g(i),\qquad i\in S\tag{12}$$

将(11)、(12)式代入(10)式，得：

$$v(i)\geq E_i\left\{\sum_{n=0}^{\sigma_m-1}f(z_n)+g(z_{\sigma_m})\right\}\tag{13}$$

注意到 $\sigma\in\Delta_i$，在(13)式中令 $m\to+\infty$，得到：

$$v(i)\geq E_i\left\{\sum_{n=0}^{\sigma-1}f(z_n)+g(z_\sigma)\right\}\tag{14}$$

根据(9)、(14)式，有

$$J_i(\tau)=\sup_{\sigma\in\Delta_i}J_i(\sigma)\qquad\text{(证毕)}$$

引理 2 设 $h(i)$是 $B(S)$中的元素，C 是 S 中的子集，记 $\bar{C}=S-C$. 如果 $\bar{C}$ 是一个非空的有限子集，且矩阵 $I-P$（其中 I 为单位方阵）中对应于 $\bar{C}$ 的行和列的主子式非零，则算子L：$Lu(i)=h(i)+\sum_{j\in C}u(j)p_{ij}$，$i\in S$ 存在唯一的不动点 $v\in B(S)$，且对任何 $u\in B(S)$，有 $v=\lim_{n\to\infty}L^n u$，其中 $L^n=L(L^{n-1})$，$n=2,3,\cdots$.

证明 由假设，线性方程组 $x_i-\sum_{j\in C}x_jp_{ij}=h(i)$，$i\in\bar{C}$ 有唯一解 $v(i)$，$i\in\bar{C}$，而对

$i\in C$，令$v(i)=h(i)+\sum_{j\in\bar{C}}v(j)p_{ij}$，于是成立 $Lv=v$，$v\in B(S)$.

引入算子 L_β，$0<\beta<1$：$L_\beta u(i)=h(i)+\beta\sum_{j\in\bar{C}}u(j)p_{ij}$，$i\in S$，易知 L_β 是 $B(S)$上的压缩算子，所以存在唯一的不动点 $v_\beta\in B(S)$，且对任何$u\in B(S)$，有 $v_\beta(i)=\lim\limits_{n\to\infty}L_\beta^n u(i)$. 另外容易验证在 $\bar{C}$ 上，当 $\beta\to1^-$ 时 $v_\beta(i)$一致收敛于$v(i)$，又对每个给定的 n，$L_\beta^n\to L^n(\beta\to1^-)$，从而 $v(i)=\lim\limits_{n\to\infty}L^n u(i)$.　　（证毕）

引理 3　设$C\subseteq S$，$\bar{C}=S-C$为有限集，如果 $\bar{C}\neq\phi$，且$I-P$中对应于 $\bar{C}$ 的主子式不为零，定义 $\tau=\inf\{n\geqslant0:z_n\in C\}$，则 $E_i(\tau)<+\infty$，对任何 $i\in S$.

证明　记 $\mu_i=E_i(\tau)$，$i\in\bar{C}$. 从$\bar{C}$ 中出发，在每下一步，如果状态转移到C中，则平均转移时间加一后，转移停止；如果状态转移到 $\bar{C}$ 中，则平均转移时间加一，然后加上在从 $\bar{C}$中出发的条件下进入C的平均时间，从而

$$\mu_i=1+\sum_{j\in C}0\cdot p_{ij}+\sum_{j\in\bar{C}}\mu_j p_{ij}=1+\sum_{j\in\bar{C}}\mu_j p_{ij},\quad i\in\bar{C}.$$

因上述方程组的解 μ_i，$i\in\bar{C}$ 唯一存在，故 $\mu_i<+\infty$，$i\in\bar{C}$.　　（证毕）

根据定理1和引理3，立即得到：

定理 2　如果算子T存在不动点$v\in B(S)$，而且$\bar{C}=\{i:v(i)>g(i),\ i\in S\}$是一个非空的有限集，它对应于$I-P$中的主子式不为零，则所给马尔可夫链的最优停止问题的值函数存在，且等于v，最优停止变量之一有方程(3)的形式。

3　有限状态情况

本节考虑状态空间S为有限集的情况。设算子T的不动点v存在，即(2)式成立。记$C=\{i:v(i)=g(i),\ i\in S\}$，$\bar{C}$ 为非空集且对应于$I-P$中的主子式不为零。则

$$\left.\begin{aligned}&v(i)=f(i)+\sum_{j\in S}v(j)p_{ij}, && i\in\bar{C}\\ &v(i)=g(i), && i\in C\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

记

$$w_i\triangleq v(i)-g(i),\quad i\in S$$
$$h_i\triangleq f(i)-g(i)+\sum_{j\in S}g(j)p_{ij},\quad i\in S$$

代入方程(15)，得到

$$\left.\begin{aligned}&w_i=h_i+\sum_{j\in\bar{C}}w_j p_{ij}, && i\in\bar{C}\\ &w_i>0, && i\in\bar{C}\\ &w_i=0, && i\in C\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

并由(2)式，有

$$w_i=\max(0,h_i+\sum_{j\in S}w_j p_{ij}),\quad i\in S$$

定义算子L如下：对 $u\in B(S)$，

$$Lu(i)=h_i+\sum_{j\in\bar{C}}u(j)p_{ij},\quad i\in S$$

对任何使下面不等式成立的$\{x_i,\ i\in S\}$：

$$x_i \geqslant \max(0, h_i + \sum_{j \in S} x_j p_{ij}), \quad i \in S$$

有 $$x_i \geqslant Lx(i) \quad 以及 \quad x_i \geqslant 0, \quad i \in S$$

由归纳法容易证明 $L^n x(i) \leqslant x_i$，$i \in S$，$n=1,2,\cdots$. 因此由引理 2，

$$w_i = \lim_{n \to \infty} L^n x(i) \leqslant x_i, \quad i \in \bar{C}$$

另外

$$w_i = 0 \leqslant x_i, \quad i \in C$$

如果 $C=\phi$，同样也有 $w_i=0 \leqslant x_i$，$i \in S$. 从而对任何满足条件

$$y_i \geqslant \max(g(i), f(i) + \sum_{j \in S} y_j p_{ij}), \quad i \in S$$

的$\{y_i, i \in S\}$，有

$$v(i) \leqslant y_i, \quad i \in S$$

这表明：(i)满足条件"$\bar{C}$ 对应于 $I-P$ 中的主子式不为零（若 $\bar{C} \neq \phi$）"的T的不动点 v 是唯一的；(ii) $\{v(i), i \in S\}$是如下线性规划的唯一解：

$$\left.\begin{aligned} & \min \sum_{j \in S} y_j \\ & y_i - \sum_{j \in S} y_j p_{ij} \geqslant f(i), \quad i \in S \\ & y_i \geqslant g(i), \quad i \in S \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

实际上，上述结论反之亦真。为此先证明

引理 4 设 n 阶方阵 $Q=(q_{ij})$ 满足 $q_{ij} \geqslant 0$，$\sum_{j=1}^{n} q_{ij} \leqslant 1$，$i,j=1,2,\cdots,n$，而且 $I-Q$ 是奇异矩阵，那么齐次线性方程组$(I-Q)x=0$ 有非负的、非零向量解。

证明 对阶数 n 用归纳法。当 $n=1$ 时结论显然成立，假设阶数为 $n-1$ 时结论亦真，下面对阶数 n 证明。设

$$I_n - Q = \begin{bmatrix} I_{n-1} - \tilde{Q} & -a \\ -b^T & 1 - q_{nn} \end{bmatrix}$$

式中 $\tilde{Q}$为Q的左上角的 $n-1$ 阶主子矩阵；I_k表示 k 阶单位阵；a, b 为相应的 $n-1$ 阶列向量，所以非负。不妨设 $\gamma \triangleq 1-q_{nn}>0$（若 I_n-Q 的主对角线上有不为零的元素，则对行和列作对称的初等变换即可调到右下角，这样作后，对下面证明并无影响；若 I_n-Q 的主对角线上都为零，则 $I_n-Q=0$，这时结论不证已明）。对 I_n-Q 作列的初等变换，有

$$\begin{bmatrix} I_{n-1} - \tilde{Q} & -a \\ -b^T & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ \gamma^{-1} b^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-1} - \tilde{Q} - \gamma^{-1} a b^T & -a \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \tag{18}$$

下面考虑 $n-1$ 阶矩阵 $\tilde{Q}+\gamma^{-1}ab^T$. 显然它的每个元素非负。因 $\gamma=1-q_{nn} \geqslant \sum_{j=1}^{n-1} q_{nj}$，所以 $0 \leqslant \gamma^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} q_{nj} \leqslant 1$，又 $b=[q_{n1}, q_{n2}, \cdots, q_{n,n-1}]^T$，得到 $0 \leqslant \gamma^{-1} b^T \xi \leqslant 1$，其中 $\xi=[1, 1, \cdots, 1]^T$，于是

$$(\tilde{Q}+\gamma^{-1}ab^T)\xi = (\tilde{Q}+a\gamma^{-1}b^T)\xi \leqslant \tilde{Q}\xi + a \leqslant \xi$$

其中最后不等式的成立是因为 $a=[q_{1n},q_{2n},\cdots,q_{n-1,n}]^T$．此不等式表明 $\tilde{Q}+\gamma^{-1}ab^T$ 的每行元素之和不超过1．另外由(18)式，行列式 $|I_{n-1}-\tilde{Q}-\gamma^{-1}ab^T|=0$．由归纳法假设，存在非负的、非零向量 $x^{(n-1)}$ 使得 $(I_{n-1}-\tilde{Q}-\gamma^{-1}ab^T)x^{(n-1)}=0$．令 n 阶向量

$$\tilde{x}=\begin{bmatrix} x^{(n-1)} \\ \gamma^{-1}b^Tx^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

即

$$\tilde{x}=\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ \gamma^{-1}b^T & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^{(n-1)} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

则 $\tilde{x}$ 是非负的、非零向量，而且从(18)和(19)两式便知 $(I_n-Q)\tilde{x}=0$．　　（证毕）

引理 5　设状态空间 S 为有限集，转移概率矩阵 $P=(p_{ij})$，则算子 T 存在不动点 v，同时 $\bar{C}=\{i:\ v(i)>g(i),\ i\in S\}$ 对应于矩阵 $I-P$ 中的主子式不为零（若 $\bar{C}\neq\phi$）的充要条件是线性规划(17)式有最优解。而且线性规划(17)式的最优解就是 T 的不动点 v．

证明　必要性前面已经证明，下面证充分性成立。设 $\{v_i,i\in S\}$ 是线性规划(17)式的一个最优解，必有

$$v_i=\max(g(i),f(i)+\sum_{j\in S}v_ip_{ij}),\ i\in S \tag{20}$$

若不然，存在 $k\in S$，使得 $v_k>\max(g(i),\ f(i)+\sum_{j\in S}v_jp_{ij})$.

记 $\delta\triangleq v_k-\max(g(i),\ f(i)+\sum_{j\in S}v_jp_{ij})$，定义

$$v_i'=v_i,\ i\in S\ 且\ i\neq k,\ v_k'=v_k-\delta$$

则

$$\begin{aligned} v_i'=v_i &\geqslant\max(g(i),\ f(i)+\sum_{j\in S}v_jp_{ij}) \\ &\geqslant\max(g(i),\ f(i)+\sum_{j\neq k}v_jp_{ij}+(v_k-\delta)p_{ik}) \\ &=\max(g(i),\ f(i)+\sum_{j\in S}v_j'p_{ij}),\ i\neq k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_k'=v_i-\delta &=\max(g(i),\ f(i)+\sum_{j\in S}v_jp_{ij}) \\ &\geqslant\max(g(i),\ f(i)+\sum_{j\in S}v_j'p_{ij}) \end{aligned}$$

但 $\sum_{j\in S}v_j'<\sum_{j\in S}v_j$，此与假设 $\{v_i,\ i\in S\}$ 为最优解矛盾。因此(20)式成立。

另外，必存在 S 的一个非空子集 C，使得 $v_i=g(i)$，$i\in C$．如若不然，对所有 $i\in S$，有

$$v_i=f(i)+\sum_{j\in S}v_jp_{ij}>g(i)$$

记 $\delta=\min_{i\in S}(v_i-g(i))$，定义 $v_i'=v_i-\delta$，$i\in S$

则

$$\begin{aligned} v_i'=v_i-\delta=f(i)+\sum_{j\in S}v_jp_{ij}-\delta &=f(i)+\sum_{j\in S}(v_j-\delta)p_{ij} \\ &=f(i)+\sum_{j\in S}v_j'p_{ij},\ i\in S \end{aligned}$$

又 $v_i' \geqslant g(i)$，$i\in S$，因此$\{v_i',\ i\in S\}$是一个可行解，但 $\sum\limits_{j\in S} v_j' < \sum\limits_{j\in S} v_j$，此与假设矛盾。记 $C=\{i;\ v_i=g(i),\ i\in S\}$，因此 C 是非空集。

如果 $C=S$，则结论显然成立；如果 $C\neq S$，可以证明 $\bar{C}=S-C$ 所对应于矩阵 $I-P$ 中的主子式不为零。仍由反证法证明。事实上，如果 $\bar{C}$ 对应于 $I-P$ 中的主子矩阵 $I-\tilde{P}$（这里的 I 与 $\tilde{P}$ 同阶），有行列式 $|I-\tilde{P}|=0$，由引理4，存在非负的、非零向量 δ，使得

$$(I-\tilde{P})\delta=0 \tag{21}$$

并选取这样的 δ，使得 $\max\delta_i=\min\limits_{i\in\bar{C}}(v_i-g(i))$，定义

$$v_i'=v_i-\delta_i,\ i\in\bar{C};\ v_i'=g(i),\ i\in C$$

对每个 $i\in\bar{C}$，由(21)式，

$$\begin{aligned} v_i'=v_i-\delta_i&=f(i)+\sum_{j\in S}v_jp_{ij}-\sum_{j\in\bar{C}}\delta_jp_{ij}\\ &=f(i)+\sum_{j\in C}g(j)p_{ij}+\sum_{j\in\bar{C}}(v_j-\delta_j)p_{ij}=f(i)+\sum_{j\in S}v_j'p_{ij}\end{aligned}$$

对每个 $i\in C$，

$$\begin{aligned} v_i'=g(i)&\geqslant f(i)+\sum_{j\in S}v_jp_{ij}\\ &\geqslant f(i)+\sum_{j\in S}v_ip_{ij}-\sum_{j\in\bar{C}}\delta_jp_{ij}=f(i)+\sum_{j\in S}v_j'p_{ij}\end{aligned}$$

另外，对每个 $i\in S$，总有 $v_i'\geqslant g(i)$．而且 $\sum\limits_{j\in S}v_j'<\sum\limits_{j\in S}v_j$，与假设矛盾。

综上所述，对于线性规划(17)式的任何一个最优解$\{v_i,\ i\in S\}$，成立

$$v_i=\max(g(i),\ f(i)+\sum_{j\in S}v_jp_{ij}),\ i\in S$$

而且 C 不空，$\bar{C}$ 所对应于 $I-P$ 中的主子式不为零（若 $\bar{C}\neq\phi$），则充分性成立。又因算子 T 满足这样条件的不动点 v 是唯一的，所以线性规划(17)式的最优解是唯一的，故线性规划(17)式的最优解也是算子 T 的这样的不动点。　　（证毕）

下面的定理3对于有限状态的马尔可夫链的最优停止问题，甚至对于某些无限状态的情况，提供了一个可行的计算方法。

定理 3　设状态空间 S 为有限集，转移概率矩阵 $P=(p_{ij})$．如果线性规划(17)式有最优解，则所给马尔可夫链最优停止问题的值函数 $v(i)$，$i\in S$ 存在，并等于线性规划(17)式的最优解；最优停止变量之一为：

$$\tau=\inf\{n\geqslant 0;\ z_n\in C\}$$

式中 $C=\{i;\ v(i)=g(i),\ i\in S\}$，而且最优停止变量 τ 的期望值 $E_i(\tau)<+\infty$，$i\in S$，并计算如下：

当 $i\in C$ 时，$E_i(\tau)=0$；当 $i\in\bar{C}\triangleq S-C$ 时，则 $E_i(\tau)$，$i\in\bar{C}$ 是如下线性方程组的解

$$x_i-\sum_{j\in\bar{C}}x_jp_{ij}=1,\ i\in\bar{C}$$

证明　根据引理5．定理2和引理3即知。

剩下的问题是线性规划(17)式究竟在多大范围内存在最优解，下面的定理4给出一个充分条件，并且这个充分条件并不太苛刻。

定理 4　设 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 为有限集，转移概率矩阵 $P=(p_{ij})$ 是不可约的，又设行列式

$$D_1 \triangleq \begin{vmatrix} f(1) & -p_{12} & -p_{13} & \cdots & -p_{1n} \\ f(2) & 1-p_{22} & -p_{23} & \cdots & -p_{2n} \\ \vdots & & & & \\ f(n) & -p_{n2} & -p_{n3} & \cdots & 1-p_{nn} \end{vmatrix} < 0$$

则线性规划(17)式存在最优解。

证明　首先，对于有限状态的、不可约的马尔可夫链，由[2]的推论3.1.2和§6.1（在那里，一个有限的，不可约的链称为遍历链(ergodic chain)）可知，矩阵 $I-P$ 中的任何不大于 $n-1$ 阶的主子式都是不为零的。

其次，考虑如下算子 T_β，$0\leqslant\beta<1$：

$T_\beta u(i)=\max(g(i),\ f(i)+\beta\sum_{j\in S}u(j)p_{ij})$，$i\in S$．对任意的 u，$w\in B(S)$，

$$\begin{aligned} T_\beta u(i) &= \max(g(i),\ f(i)+\beta\sum_{j\in S}u(j)p_{ij}) \\ &= \max(g(i),\ f(i)+\beta\sum_{j\in S}w(j)p_{ij}+\beta\sum_{j\in S}(u(j)-w(j))\cdot p_{ij}) \\ &\leqslant \max(g(i),\ f(i)+\beta\sum_{j\in S}w(j)p_{ij}+\beta\|u-w\|) \\ &\leqslant T_\beta w(i)+\beta\|u-w\| \end{aligned}$$

所以，$T_\beta u(i)-T_\beta w(i)\leqslant\beta\|u-w\|$，$i\in S$，由 u，w 的任意性知，

$$\|T_\beta u-T_\beta w\|\leqslant\beta\|u-w\|$$

从而 T_β 是 $B(S)$ 中的压缩算子，存在唯一的不动点 $v_\beta\in B(S)$．对任何固定的 $\beta_0\in(0,1)$，不可能对一切 $\beta\in(\beta_0,1)$ 都成立

$$v_\beta(i)=f(i)+\beta\sum_{j\in S}v_\beta(j)p_{ij},\quad i\in S \tag{22}$$

若不然，由线性方程组(22)式，通过克兰姆法则解得：

$$v_\beta(i)=|I-\beta P|^{-1}D_i(\beta),\quad i\in S \tag{23}$$

式中

$$D_i(\beta)=\begin{vmatrix} 1-\beta p_{11} & \cdots & -\beta p_{1,i-1} & f(1) & -\beta p_{1,i+1} & \cdots & -\beta p_{1n} \\ -\beta p_{21} & \cdots & -\beta p_{2,i-1} & f(2) & -\beta p_{2,i+1} & \cdots & -\beta p_{2n} \\ \vdots & & & & & & \\ -\beta p_{n1} & \cdots & -\beta p_{n,i-1} & f(n) & -\beta p_{n,i+1} & \cdots & 1-\beta p_{nn} \end{vmatrix}$$

注意到行列式 $|I-\beta P|$ 和 $D_i(\beta)$ 都是 β 的多项式，且当 $0<\beta<1$ 时因 $I-\beta P$ 是主对角线严格占优的矩阵，有 $|I-\beta P|>0$；另外 $\lim\limits_{\beta\to1^-}|I-\beta P|=|I-P|=0$ 以及 $\lim\limits_{\beta\to1^-}D_i(\beta)=D_i(1)$．将 $D_i(1)$ 的第 i 列与第1列对换，得：

$$D_i(1)=(-1)\begin{vmatrix} f(1) & -p_{12} & \cdots & -p_{1,i-1} & 1-p_{11} & -p_{1,i+1} & \cdots & -p_{1n} \\ f(2) & 1-p_{22} & \cdots & -p_{2,i-1} & -p_{21} & -p_{2,i+1} & \cdots & -p_{2n} \\ \vdots & & & & & & & \\ f(n) & -p_{n2} & \cdots & -p_{n,i-1} & -p_{n1} & -p_{n,i+1} & \cdots & 1-p_{nn} \end{vmatrix}$$

又将等式右边行列式中除第 1 列之外的所有列加到第 i 列上，并注意到对每个 $k\in S$，有 $1-\sum\limits_{j\neq i}p_{kj}=p_{ki}$，于是 $D_i(1)=D_1<0$，$i\in S$，从而由(23)式，$\lim\limits_{\beta\to 1^-}v_\beta(i)=-\infty, i\in S$，此与假设 $v_\beta(i)\geqslant g(i)$，当 $\beta\in(\beta_0,1)$时，出现矛盾。

由上述证明可知，存在(0,1)内的一个递增趋于 1 的子数列$\{\beta_m\}$以及相应的S中的非空子集合序列$\{C_m\}$，使得 $v_{\beta_m}(i)=g(i)$，$i\in C_m$，$m=1,2,\cdots$. 由于S为有限集，其子集合的个数为有限数，因此必存在S中的一个非空子集C以及(0,1)内的递增趋于 1 的数列$\{\beta_m\}$，使得相应的 $v_m\triangleq v_{\beta_m}$ 成立

$$\left.\begin{aligned} &v_m(i)=f(i)+\beta_m\sum_{j\in S}v_m(j), && i\in\bar{C} \\ &v_m(i)=g(i) && i\in C \end{aligned}\right\} \tag{24}$$
$$m=1,2,\cdots$$

如果 $C=S$，则 $v_m(i)=g(i)\geqslant f(i)+\beta_m\sum\limits_{j\in S}v_m(j)p_{ij}$，$m=1,2,\cdots$，$i\in S$. 令 $m\to+\infty$，得到$g(i)\geqslant f(i)+\sum\limits_{j\in S}g(j)p_{ij}$，从而$\{g(i), i\in S\}$是线性规划(17)式的最优解；如果$C\neq S$，由(24)式得到线性方程组

$$v_m(i)-\beta_m\sum_{j\in\bar{C}}v_m(j)p_{ij}=f(i)+\beta_m\sum_{j\in C}g(j)p_{ij},\ i\in\bar{C}$$

从上面线性方程组中按克兰姆法则解出 $v_m(i)$，$i\in\bar{C}$，并注意到当 $m\to+\infty$时，系数行列式作为 β_m 的多项式其极限不为零，因而极限 $v(i)\triangleq\lim\limits_{m\to\infty}v_m(i)$存在且有限，在(24)式中，令 $m\to+\infty$，得到

$$v(i)=\max\Big(g(i),\ f(i)+\sum_{j\in S}v(j)p_{ij}\Big),\ i\in S$$

且C满足引理 5 中的条件，因此线性规划(17)式有最优解。 (证毕)

本文的结论不但对于有限状态的情况可以计算，对于无限状态情况，当转移概率矩阵比较特殊时，结合定理 2 和定理 3，有时也可以计算。因篇幅所限，具体计算例子从略。

参 考 文 献

[1] Chow Y S, Robbins H, Siegmund D; 何声武，汪振鹏译. 最优停止理论. 上海科学技术出版社, 1983

[2] John G Kemeny, J Laurie Snell. Finite Markov Chains. Springer-Verlag New York Berlin Heidelkery Tokyo, 1976

[3] 王梓坤. 随机过程论. 科学出版社, 1980

The Value Function of Optimal Stopping for Markov Chains

Gu Jianxiang

(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

Abstract

Optimal Stopping for Markov chains with infinite time has been discussed in this paper. The sufficient condition for the existence of the optimal stopping variable and the value function of the optimal stopping for Markov chains with infinite states has been obtained. The results show that the condition and calculation of the optimal stopping problem for Markov chains with finite states are equivalent to solving some linear programs.

Key words: Markov chain, linear programming, stopping variable, fixed point

国防科技大学学报获全国高校自然科学学报优秀编辑质量一等奖

全国高校自然科学学报研究会于1989年11月26日至30日，在南京召开了全国高校自然科学学报优秀编辑质量颁奖总结大会。

这次学报优秀编辑质量评比活动，是在国家教委科技司和国家新闻出版署期刊司的领导和支持下进行的，其目的是要促进各学报执行国家标准和学报规范，提高编辑的业务水平，提高高校学报的质量。全国29个省、直辖市、自治区的583家高校自然科学学报参加了评比。这次评比活动，准备工作充分，评比内容具体，评比标准明确，评比机构有权威性。评奖委员会成员有：翁有庆、汪元章、胡心如、陈浩元编审，张正威高工，张世樵副研，金德年副教授，鲁星、丁乃刚、荀宗泽、朱诚，洪文逵、蒋慧珠、柳志慎副编审。评比时，按学术质量、编校质量（重点）、印装质量三大类的10项内容和评比标准，逐项审读和评分，最后按高分到低分评出一等奖38家，二等奖66家，三等奖83家，少数民族文版优秀奖4家。

我校学报参加了评比，获优秀编辑质量一等奖，参与编辑的主要工作人员获得国家教委科技司和国家新闻出版署期刊司颁发的获奖证书。

我校学报取得优秀成绩是各方面力量努力的结果。首先，副校长陈启智教授为主编的编委会认真而严格地工作；其次，全校许多中老年教师严格评审论文，中青年教师奋发进取，勤奋写作；另外，编辑部在条件比较差的情况下，坚持高标准办刊，付出辛勤的劳动。校出版社在工作上给予支持。国防科技大学印刷厂大力协作，印刷质量有一定保证。

国科科技大学学报编辑部决心在编委会领导下，协同各方面的力量，为进一步贯彻规范和提高刊物质量而努力。