国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第12卷第1期　1990年3月　Vol.12No.1

一类马尔可夫人才系统中的工龄和职龄

王炎生　沙　钰　沙基昌
（系统工程与应用数学系）

摘　要　用马尔可夫模型研究人才系统中工龄和职龄问题的一般方法都要按职务等级、工龄或职龄来划分系统状态。本文在只以职务等级划分系统状态的一类无降级且逐级晋升的齐次马尔可夫人才系统中讨论了工龄和职龄问题，得到直观描述工龄和职龄的计算结果，并通过一实例说明了本方法的应用价值。

关键词　马尔可夫链，人才规划
分类号　O211.62

自从A.Young[1]于1961年最先提出齐次马尔可夫人才模型以来，人们已经建立了各种形式的马尔可夫人才模型，有关的理论研究一直很活跃，并已在军队、政府机构和企业的人才规划中得到广泛的应用。

在齐次马尔可夫人才模型下研究工龄和职龄问题通常总是要先将系统状态按职务等级、工龄或职龄划分（如[2]，[3]），然后求出时间 $t\rightarrow\infty$ 时系统的极限结构（P.—C.G.Vassiliou[4]给出了求齐次和非齐次马尔可夫人才系统的极限结构的一般方法）。这种方法对数据要求较高，而实际应用中大量碰到的是按职务等级划分系统状态的人才系统。作为一种尝试，J.J.Glen[5]对一个按职务等级划分系统状态的马尔可夫人才系统的工龄分布进行了研究。本文则对一类无降级且逐级晋升的等级制马尔可夫人才系统中工龄问题和职龄问题进行了研究。

1　齐次马尔可夫人才模型

考虑具有 k 个职务等级的人才系统，将系统按职务等级划分成 k 个状态，系统中的每个人属于且只属于其中的一个状态。状态1表示最低级，状态 k 表示最高级，职务级别从低到高依次为 $1,2,\cdots,k$. 系统中个人的流动方式有三种：流失、补充和状态之间的转移。其中流失表示个人通过退休、辞职和解雇等形式离开系统；补充是指人员补充到系统中来，并认为一个补充人员以概率 p_{0i} 补充到级别 i 中，$\sum_{i=1}^{k}p_{0i}=1$. 假设个人在流动时无降级且只能逐级晋升，位于 k 级中任何一级时都可能发生流失。

学术论文　1987年12月10日收稿

在这个人才系统中，对于离散时间 $t=0,1,\cdots$（以年为单位），认为系统中个人的流动是初始分布为 $\bar{p}_0=(0,p_{01},p_{02},\cdots,p_{0k})$，转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ p_{1,w} & p_{1,1} & p_{1,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ p_{2,w} & 0 & p_{2,2} & p_{2,3} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & & & \\ p_{k-1,w} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{k-1,k-1} & p_{k-1,k} \\ p_{k,w} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & p_{k,k} \end{pmatrix}$$

的齐次马尔可夫链，用 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 表示。这里 w 是流失状态，有 $p_{i,w}>0$，$i=1,2,\cdots,k$.

由 P 的形式易知这是一个吸收状态为 w 的吸收马尔可夫链。利用 $\bar{P}$ 的这种特殊形式，可对个人的流动规律进行较详细的研究，记 P 为 $\bar{P}$ 右下的 $k\times k$ 子块。于是，n 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$，$i,j\in\{1,2,\cdots,k\}$，$n=0,1,\cdots$ 是 P^n 中 i 行 j 列的元素。因为 P 的行和均小于 1，于是据[6]中定理 4.5.9 和定理 4.5.8 知：

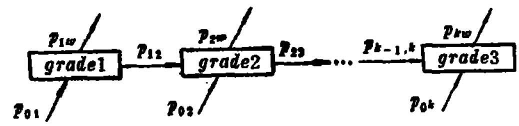

图 1　个人的流动方式

$$\sum_{l=0}^{\infty}P^l=(I-P)^{-1}，\text{记成 } Q_0=(q_{ij}^{(0)})$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}lP^l=P(I-P)^{-2}，\text{记成 } Q_1=(q_{ij}^{(1)})$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}l^2P^l=(P+P^2)(I-P)^{-3}，\text{记成 } Q_2=(q_{ij}^{(2)})$$

以下的讨论均在本节的假设和符号下进行。

2　关于个人的一些流动规律

令 $T=\inf\{n\geqslant 1;\ x_n=w\}$，则 T 表示个人在系统中的工龄，据[7]中定理 3.1.1 知有 $P\{T<\infty\}=1$. 于是，当流出系统时的状态为 i 时（此时称个人的归宿为 i），个人的平均工龄是 $E(T\mid X_{T-1}=i)$. 令 $S=T-1$，则 $E(T\mid X_{T-1}=i)=E(S\mid X_S=i)+1$，$i=1,\cdots,k$. 于是得到

定理 1　$E(T\mid X_{T-1}=i)=\sum_{j=1}^{k}p_{0j}q_{ji}^{(1)}\Big/\sum_{j=1}^{k}p_{0j}q_{ji}^{(0)}+1$，

$$V(T\mid X_{T-1}=i)=\left(\sum_{j=1}^{n}p_{0j}q_{ji}^{(2)}\Big/\sum_{j=1}^{k}p_{0j}q_{ji}^{(0)}\right)-\left(\sum_{j=1}^{k}p_{0j}q_{ji}^{(1)}\Big/\sum_{j=1}^{k}p_{0j}q_{ji}^{(0)}\right)^2$$

$P\{X_S=j\mid X_0=i\}$ 表示初始状态为 i 时归宿为 j 的条件概率，$P\{X_0=i\mid X_S=j\}$ 则为归缩为 j 时初始状态为 i 的条件概率。设 n_i 表示个人在 i 职的职龄，则 $E(n_i\mid X_S=j)(1\leqslant i\leqslant j\leqslant k)$ 表示归宿为 j 的个人在 i 职的平均职龄。于是可证明下面定理。

定理 2　对 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant k$，有

$$P\{X_S=j\mid X_0=i\}=p_{jw}q_{ij}^{(0)},$$

$$P\{X_0=i\mid X_S=j\}=p_{0i}q_{ij}^{(0)}\Big/\left(\sum_{v=1}^{k}p_{0v}q_{vj}^{(0)}\right),$$

$$E(n_i\,|\,X_S=j)=\left[\sum_{l=1}^{i}p_{0l}\prod_{v=l}^{j-1}p_{v,v+1}\Big/\left((1-p_{ii})\prod_{a=l}^{j}(1-p_{aa})\right)\right]\Big/\left(\sum_{l=1}^{j}p_{0l}q_{lj}^{(0)}\right),$$

$$V(n_i\,|\,X_S=j)=\left[(1+p_{ii})\sum_{l=1}^{i}p_{0l}\prod_{v=l}^{j-1}p_{v,v+1}\Big/\left((1-p_{ii})^2\prod_{a=l}^{j}(1-p_{aa})\right)\right]\Big/$$
$$\left(\sum_{l=1}^{j}p_{0l}q_{lj}^{(0)}\right)-E^2(n_i\,|\,X_S=j)$$

令 $T_j=\inf\{n\geqslant 0:\ X_n=j\}$，括号内为空集时，$T_j=\infty$，则 T_j 为个人首次到达 j 所需的时间。$E(T_j\,|T_j<\infty,\ X_0=i)$ 表示初始状态为 i 且到过状态 j 的情况下，首次到达 j 的平均工龄。从而易得到定理 3．

定理 3 对 $1\leqslant i<j\leqslant k$，有

$$P\{T_j<\infty\,|\,X_0=i\}=p_{j-1,j}q_{i,j-1}^{(0)}$$
$$E(T_j\,|T_j<\infty,\ X_0=i)=1+(q_{i,j-1}^{(1)}/q_{i,j-1}^{(0)})$$
$$V(T_j\,|T_j<\infty,\ X_0=i)=(q_{i,j-1}^{(2)}/q_{i,j-1}^{(0)})-(q_{i,j-1}^{(1)}/q_{i,j-1}^{(0)})^2$$

以上主要是从个人的归宿出发对其经历进行考察，而对于一般的吸收马尔可夫链，文[7]中第三章从初始状态出发研究了逗留时间的一些计算问题，据此可得到关于工龄和职龄方面的一些结果。据[7]中定理 3.3.5 和定理 3.3.6 有下面定理。

定理 4 对 $1\leqslant i\leqslant k$，有

$$\tau_1=\{E(T\,|\,X_0=i)\}=Q_0e',\quad \tau_2=\{V(T\,|\,X_0=i)\}=(2Q_0-I)\tau_1-(\tau_1)_{sq}$$
$$E(T)=p_0\tau_1,\quad V(T)=p_0(2Q_0-I)\tau_1-(p_0\tau_1)_{sq}$$

这里 $p_0=(p_{01},\ p_{02},\cdots,p_{0k})$．对任一 n 阶方阵 A，A_{sq} 表示元素为 a_{ij}^2 的 n 阶方阵，A_{dg} 为 A 的对角线矩阵 $\mathrm{diag}\{a_{11},\cdots,a_{nn}\}$．$\tau_1$ 和 τ_2 分别为初始状态为 i 的个人在系统中的平均工龄和方差；$E(T)$和$V(T)$则表示不问起始状态时，个人在系统中的平均工龄及其方差。

由文[7]中定理 3.2.4，定理 3.3.3 及推论 3.3.6 有下面定理。

定理 5 对 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant k$，有

$$\{E(n_j\,|\,X_0=i)\}=Q_0,\ \{V(n_j\,|\,X_0=i)\}=Q_0(2(Q_0)_{dg}-I)-(Q_0)_{sq},$$
$$\{E(n_j)\}=p_0Q_0,\ \{V(n_j)\}=p_0Q_0(2(Q_0)_{dg}-I)-(p_0Q_0)_{sq}.$$

此定理给出了当考虑初始状态和不考虑初始状态时个人在各职的平均职龄。

令
$$A=\begin{pmatrix}0 & \frac{p_{12}}{1-p_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{p_{23}}{1-p_{22}} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{p_{k-1,k}}{1-p_{kk}}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$C=(I-A)^{-1}$．则由[7]中定理 3.5.10 得到下面定理。

定理 6 令 g 表示个人晋升的级别数（包括初始状态这一级），则有

$$\{E(g\,|\,X_0=i)\}=Ce',$$

$$\{V(g\mid X_0=i)\}=(2C-I)Ce'-(Ce')_{sq}.$$

定理6指出了从每个初始状态出发的个人到流出系统时平均要晋升多少级别。

3 应　用

P—C.G.Vassiliou[4]对一具有六个职务等级的无降级且逐级晋升的齐次马尔可夫人才系统极限结构进行了计算（计算结果有误），作者将本文得到的一些结果应用于对其工龄和职龄方面的数值进行计算。

例　已知 $p_0=(0,0.3,0.3,0.2,0.1,0.05,0.05)$，

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0 & 0.75 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.8 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.85 & 0.05 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0.05 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.95 \end{pmatrix}$$

$$N(0)=(1000,\ 800,\ 600,\ 400,\ 300,\ 200),$$

$$T(t)=3300+600\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^t\right),\quad t=0,1,2,\cdots$$

式中$N_i(t)$为t时i级人数的期望值，$N(t)=(N_1(t),\cdots,N_k(t))$，$T(t)$为$t$时系统总人数的期望值，$r(t)=N(t)/T(t)$.

系统的极限结构为：

$$N(\infty)=(384.9,\ 615.8,\ 692.8,\ 718.4,\ 551.6,\ 936.5)$$

$$r(\infty)=(0.099,\ 0.158,\ 0.178,\ 0.184,\ 0.141,\ 0.240)$$

关于个人的流动规律有

$$\{E(g\mid X_0=i)\}=(1.57,\ 1.70,\ 1.75,\ 1.50,\ 1.50,\ 1.00)$$

$$\{V(g\mid X_0=i)\}=(1.00,\ 1.08,\ 0.85,\ 0.58,\ 0.25,\ 0.00)$$

$$\{E(T\mid X_0=i)\}=(6.22,\ 8.67,\ 11.67,\ 13.33,\ 20.00,\ 20.00)$$

$$\{V(T\mid X_0=i)\}=(64.84,\ 121.11,\ 191.11,\ 253.33,\ 380.00,\ 380.00)$$

$$E(T)=10.13,\ V(T)=173.80$$

$$Q_0=(q_{ij}^{(0)})=\begin{pmatrix} 3.33 & 1.33 & 0.67 & 0.44 & 0.22 & 0.22 \\ 0 & 4 & 2 & 1.33 & 0.67 & 0.67 \\ 0 & 0 & 5 & 3.33 & 1.67 & 1.67 \\ 0 & 0 & 0 & 6.67 & 3.33 & 3.33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$q_{ij}^{(0)}$表示由i级出发在j级的平均逗留时间即平均职龄。显然，从某一级出发在以后的各级中的平均职龄越来越小。

参 考 文 献

[1] Young A and Almond G. Predicting Distributions of Staff, Comp. J. 1961; 3: 246~250
[2] Keenay G A, Morgan R W and Ray K H. Convergence Properties of age Distributions, J. Appl. Prob. 1975; 12: 684~691
[3] Mcclean S. The Steady-State Behaviour of a Manpower Planning Model in Which Class Corresponds to Length of Service, Opl Res. Q. 1977; 28: 305~311
[4] P.—C.G.Vassiliou. Variances and Covariances of the Grade Sizes in Manpower Systems, J. Appl. Prob. 1985; 22: 583~597
[5] Glen J J. Length of Service distributions in Markov Manpower Models, Opl Res. Q. 1977; 4: 975~982
[6] Hunter J J. Mathematical Techniquee of Applied Probability, Vol.1, Academic Press, New York, 1983
[7] Kemeny J G and Snell J L. Finite Markov Chains, Springer—Verlag, New York, 1976

Length of Service and Grade Seniority in a Class of Markov Manpower Systems

Wang Yansheng Sha Yu Sha Jichang

(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

Abstract

A common method for studying problems about the length of service and grade seniority by Markov manpower model is to divide the states of the model according to grades, lengths of service or grade seniority. In a class of graded manpower systems using homogeneous Markov models in which there are no demotions and in which promotions take place only step by step, the present paper discussed the problems of lengths of service and grade seniority, some computation formulae describing the lengths of service and grade seniority intuitively have been obtained, and finally, a practical example demonstrating the applications of this method is given.

Key words: Markov chain, manpower planning