国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第12卷第1期 1990年8月 Vol.12 No.1

三维涡度方程单向周期问题的谱-差分混合格式及其误差估计

熊 岳 山

（系统工程与应用数学系）

摘 要 本文对非线性的三维涡度方程单向周期问题构造了一种新的谱——差分格式，并证明了格式的稳定性和收敛性。

关键词 谱一差分方法，混合格式，混合模

分类号 O175.7

近年来，谱方法作为一种高精度数值方法越来越受到人们的重视[1][2][3]，然而谱方法对偏微分方程的真解的“光滑性”要求太强，且 Fourier 谱方法对周期问题效果较好[4]；另一方面，古老的差分方法却具有应用的灵活性。因此人们尝试用谱——差分混合方法来处理数学物理问题[5~7]．本文利用文献[8]、[9]中的方法对三维涡度方程单向周期问题给出谱——差分混合格式，对周期方向采用 Fourier 谱方法来离散，非周期方向用差分方法。并证明了格式的稳定性和收敛性。文献[9]处理的是三维涡度方程双向周期问题，本文可作为[9]的补充。

1 问题、记号和格式

假设$\xi(x_1,x_2,x_3,t)$和$\psi(x_1,x_2,x_3,t)$分别为涡度向量和流函数向量。

$$\xi(x_1,x_2,x_3,t)=(\xi^{(1)}(x_1,x_2,x_3,t),\ \xi^{(2)}(x_1,x_2,x_3,t),\ \xi^{(3)}(x_1,x_2,x_3,t))^T$$

$$\psi(x_1,x_2,x_3,t)=(\psi^{(1)}(x_1,x_2,x_3,t),\ \psi^{(2)}(x_1,x_2,x_3,t),\ \psi^{(3)}(x_1,x_2,x_3,t))^T$$

记 $Q=\{(x_1,x_2)/0<x_1<1,\ 0<x_2<1\}$，$I=\{x_3/0<x_3<2\pi\}$

$$\Omega=\{(x_1,x_2,x_3)/0<x_1<1,\ 0<x_2<1,\ x_3\in I\}$$

考虑下面的问题：

$$\left.\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial\xi}{\partial t}+J(\xi,\psi)-H(\xi,\psi)-\nu\nabla^2\xi=f_1, & X\in\Omega,\ t\in(0,T] \\
-\nabla^2\psi=\xi+f_2, & X\in\Omega,\ t\in[0,T] \\
\xi(x_1,x_2,x_3,t)=\xi(x_1,x_2,x_3+2\pi,t), & t\in[0,T] \\
\psi(x_1,x_2,x_3,t)=\psi(x_1,x_2,x_3+2\pi,t), & t\in[0,T] \\
\xi(0,x_2,x_3,t)=\xi(1,x_2,x_3,t)=\psi(0,x_2,x_3,t)=\psi(1,x_2,x_3,t)=0 & \\
\xi(x_1,0,x_3,t)=\xi(x_1,1,x_3,t)=\psi(x_1,0,x_3,t)=\psi(x_1,1,x_3,t)=0 & \\
\xi(x_1,x_2,x_3,0)=\xi_0(x_1,x_2,x_3) & X\in\bar{\Omega}
\end{array}\right\}\quad(1)$$

学术论文 1988年1月11日收稿

这里 $f_l(x_1,x_2,x_3,t)=f_l(x_1,x_2,x_3+2\pi,t)$，$l=1,2$

$\xi_0(x_1,x_2,x_3)=\xi_0(x_1,x_2,x_3+2\pi)$，$v>0$

$J(\xi,\psi)=[(\nabla\times\psi)\cdot\nabla]\xi$，$H(\xi,\psi)=(\xi\cdot\nabla)(\nabla\times\psi)$

假定 x_1 和 x_2 方向网格剖分为等步长的，h 为其网格步长，$Mh=1$ 且

$Q_h=\{(x_1,x_2)/x_1=j_1h,\ x_2=j_2h,\ 1\leqslant j_1\leqslant M-1,\ 1\leqslant j_2\leqslant M-1\}$

$\Omega_h=Q_h\times I$，$S_\tau=\{t=k\tau/k=0,1,2,\cdots\cdots\}$

Γ_h 为网格区域边界，$\Gamma_{h,l}$ 为 x_l 方向网格区域的边界，$l=1,2$，记 $e_1=(1,0,0)$，$e_2=(0,1,0)$

$$\Omega^{*,+}_{h,l}=\{X=(x_1,x_2,x_3)/X\in\Omega_h,\ X+he_l\in\Gamma_h\}$$

$$\Omega^{*,-}_{h,l}=\{X=(x_1,x_2,x_3)/X\in\Omega_h,\ X-he_l\in\Gamma_h\}$$

$$\Gamma^+_{h,l}=\{X=(x_1,x_2,x_3)/X-he_l\in\Omega_h\}$$

$$\Omega^*_{h,l}=\Omega^{*,+}_{h,l}+\Omega^{*,-}_{h,l},\ l=1,2$$

$$\Omega^*_h=\Omega^*_{h,1}+\Omega^*_{h,2},\ \Omega'_h=\Omega_h-\Omega^*_h,\ \Omega'_{h,l}=\Omega_h-\Omega^*_{h,l}$$

用 $u_n(X)$ 表示 $\Gamma_{n,l}$ 上的外法向差商，即

$$u_n(X)=\begin{cases}u_{\bar{x}_l}(X) & X\in\Gamma^+_{h,l}\\ -u_{x_l}(X) & X\in\Gamma^-_{h,l}\end{cases}$$

定义 $u_{x_2}(X,t)=\frac{1}{h}(u(x_1,x_2+h,x_3,t)-u(x_1,x_2,x_3,t))$，

$$u_{\bar{x}_2}(X,t)=u_{x_2}(x_1,x_2-h,x_3,t),\ u_{\hat{x}_2}(x,t)=\frac{1}{2}(u_{x_2}(x,t)+u_{\bar{x}_2}(x,t)),$$

$$\Delta u(X,t)=u_{x_1\bar{x}_1}(x,t)+u_{x_2\bar{x}_2}(x,t)+\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x_3^2},\ V_N=S_{pan}\{e^{ilx_3}/\ |l|\leqslant N\}.$$

定义正交投影算子 P_N

$$\int_I(P_Nu-u)\bar{v}dx_3=0,\ \forall u,v\in[V_N]^3$$

$$R(v)=\left(v^{(3)}_{\hat{x}_2}-\frac{\partial v^{(2)}}{\partial x_3},\ \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x_3}-v^{(3)}_{\hat{x}_1},\ v^{(3)}_{\hat{x}_1}-v^{(1)}_{\hat{x}_2}\right)^T$$

$$J^{(\alpha)}(u,v)=\alpha J_1(u,v)+(1-\alpha)J_2(u,v),\ 0\leqslant\alpha\leqslant1$$

$$J^{(p)}_1(u,v)=R^{(1)}(v)u^{(p)}_{\hat{x}_1}+R^{(2)}(v)u^{(p)}_{\hat{x}_2}+R^{(3)}(v)\frac{\partial u^{(p)}}{\partial x_3}$$

$$J^{(p)}_2(u,v)=(R^{(1)}(v)u^{(p)})_{\hat{x}_1}+(R^{(2)}(v)u^{(p)})_{\hat{x}_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}(R^{(3)}(v)u^{(p)}),\ p=1,2,3$$

这里 $J_l(u,v)=(J^{(1)}_l(u,v),\ J^{(2)}_l(u,v),\ J^{(3)}_l(u,v))^T$，$l=1,2$

又 $H_1(u,v)=(H^{(1)}_1(u,v),\ H^{(2)}_1(u,v),\ H^{(3)}_1(u,v))^T$

$$H^{(p)}_1(u,v)=u^{(1)}R^{(p)}_{\hat{x}_1}(v)+u^{(2)}R^{(p)}_{\hat{x}_2}(v)+u^{(3)}\frac{\partial}{\partial x_3}R^{(p)}(v),\ p=1,2,3$$

显然 $J^{(\alpha)}(u,v)$，$H_1(u,v)$ 分别为 $J(u,v)$，$H(u,v)$ 的模拟，有时为方便计，用

$J(u,v)$，$H(u,v)$分别代替之。

令$\eta^{(N)}$，$\varphi^{(N)}$分别为ξ，ψ的近似。

$$\eta^{(N)}(x,t)=\sum_{|l|\leqslant N}\eta_l^{(N)}(x_1,x_2,t)e^{ilx_3},\quad \varphi^{(N)}(x,t)=\sum_{|l|\leqslant N}\varphi_l^{(N)}(x_1,x_2,t)e^{jlx_3}.$$

(1) 式的谱—差分混合格式为：

$$\left.\begin{aligned}&\eta_t^{(N)}(t)+P_NJ^{(\alpha)}(\eta^{(N)}+\delta\tau\eta_t^{(N)},\ \varphi^{(N)})-P_NH(\eta^{(N)},\ \varphi^{(N)})\\&\qquad-\nu\Delta(\eta^{(N)}+\sigma\tau\eta_t^{(N)})=P_Nf_1,\quad \Omega_h\times S_\tau\\&-\Delta\varphi^{(N)}=\eta^{(N)}+P_Nf_2,\qquad \Omega_h\times S_\tau\\&\eta^{(N)}|_{\Gamma h,1}=\eta^{(N)}|_{\Gamma h,2}=\varphi^{(N)}|_{\Gamma h,1}=\varphi^{(N)}|_{\Gamma h,2}=0\\&\eta^{(N)}(x_1,x_2,x_3,0)=\eta_0^{(N)}(x_1,x_2,x_3)=P_N\xi_0(x_1,x_2,x_3),\ \bar{\Omega}_h\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

这里δ、σ为格式参数，$0\leqslant\delta$，$\sigma\leqslant1$．若$\delta=\sigma=0$，则方程(2)为显格式，否则为隐格式，需用迭代法求解。

为得到格式的稳定性和收敛性的误差估计，需给出模的定义。

混合模定义如下：

设$u(X)$，$v(X)$为Ω_h上的三维向量网格函数，

$$(u(x_1,x_2),\ v(x_1,x_2))_I=\frac{1}{2\pi}\int_I u(x_1,x_2,x_3)\cdot\bar{v}(x_1,x_2,x_3)dx_3,$$

$$\|u(x_1,x_2)\|_I^2=(u(x_1,x_2),\ u(x_1,x_2))_I$$

$$(u,v)=h^2\cdot\sum_{(x_1,x_2)\in Q_h}(u(x_1,x_2),\ v(x_1,x_2))_I$$

$$\|u\|^2=(u,u),\quad |u|_1^2=\frac{1}{2}(\|u_{x_1}\|^2+\|u_{\bar{x}_1}\|^2+\|u_{x_2}\|^2+\|u_{\bar{x}_2}\|^2)+\left\|\frac{\partial u}{\partial x_3}\right\|^2$$

$$\|u\|_1^2=\|u\|^2+|u|_1^2,\quad \|u\|_{0,\infty}^2=\max_{X\in Q_h\times I}|u|^2$$

$$|u|_2^2=\frac{1}{2}(|u_{x_1}|_{1,\Omega'_{h,1}}^2+|u_{\bar{x}_1}|_{1,\Omega'_{h,1}}^2+|u_{x_2}|_{1,\Omega'_{h,2}}^2+|u_{\bar{x}_2}|_{1,\Omega'_{h,2}}^2)+\left|\frac{\partial u}{\partial x_3}\right|_1^2$$

另外，还需要二个和式

$$\begin{aligned}B_l(u,\ v)=\frac{h}{4\pi}\int_I\{&\sum_{X\in\Gamma_{h,l}^+}(u(X)+u(X-he_l))v_n(X)\\&+\sum_{X\in\Gamma_{h,l}^-}(u(X)+u(X+he_l))v_n(X)\}dx_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_l(u,v)&=\frac{1}{4\pi}\int_I\{\sum_{X\in\Omega_{h,l}^{*,+}}u(X)v(X)+\sum_{X\in\Omega_{h,l}^{*,-}}u(X)v(X)\}dx_3\\&=\frac{h^{-2}}{2}(u(X),\ v(X))_{\Omega_{h,l}^*}\qquad l=1,2\end{aligned}$$

2　一些引理

引理 1[10]　对任意三维向量网格函数$u(t)$有

$$2(u(t),\ u_t(t))_I=(\|u(t)\|_I^2)_t-\tau\|u_t(t)\|_I^2,\quad t\in S_\tau$$

$$2(u(t),\ u_t(t))=(\|u(t)\|^2)_t-\tau\|u_t(t)\|^2$$

引理 2[11] 若 $0\leqslant\alpha\leqslant\beta$，对 $(x_1,x_2)\in Q_h$，$u\in[H_p^\beta(I)]^3$

则 $\|P_Nu-u\|_\alpha\leqslant CN^{\alpha-\beta}|u|_\beta$，$\|P_Nu\|_\beta\leqslant C\|u\|_\beta$

引理 3[10] 若对 $(x_1,x_2)\in Q_h$，$u(X),v(X)\in[V_N]^3$ 则

$$(u,\Delta v)+\frac{1}{2}(u_{x_1},v_{x_1})+\frac{1}{2}(u_{\bar{x}_1},v_{\bar{x}_1})+\frac{1}{2}(u_{x_2},v_{x_2})$$

$$+\frac{1}{2}(u_{\bar{x}_2},v_{\bar{x}_2})+\left(\frac{\partial u}{\partial x_3},\ \frac{\partial v}{\partial x_3}\right)=B_1(u,v)+B_2(u,v)$$

特别，若 $u(X)|_{\Gamma_{h,1}}=u(X)|_{\Gamma_{h,2}}=v(X)|_{\Gamma_{h,1}}=v(X)|_{\Gamma_{h,2}}=0$

则 $B_l(u,v)=-S_l(u,v)$，$l=1,2$.

若记 $S_l(u)=S_l(u,u)$，则有 $(u,\Delta u)+|u|_1^2+\sum_{l=1}^{2}S_l(u)=0$

引理 4 若对 $(x_1,x_2)\in Q_h$，$u(X)\in[V_N]^3$ 且 $u|_{\Gamma_{1,h}}=u|_{\Gamma_{2,h}}=0$，

则对 $t\in S_t$ 有

$$-2(u_t(t),\ \Delta u)=-2(u(t),\ \Delta u_t(t))=[\,|u(t)|_1^2+S(u(t))]_t-\tau|u_t(t)|_1^2-\tau S(u_t)$$

这里 $S(u(t))=S_1(u(t))+S_2(u(t))$

证明 可由引理１、３得到。

引理 5 对任意三维向量网格函数 $u(X)$，$v(X)$ 成立

$$J^{(\frac{1}{2})}(u,v)=J_1(u,v)+O(h^2)$$

证明 由 $J^{(\alpha)}(u,v)$ 的定义及 Taylor 展式可得。

引理 6[9] 若对 $(x_1,x_2)\in Q_h$，$u(X),v(X),\omega(X)\in[V_N]^3$ 且

$u(X)|_{\Gamma_{l,h}}=v(X)|_{\Gamma_{l,h}}=w(X)|_{\Gamma_{l,h}}=0$，$l=1,2$

则 $$(u,\ J^{(\frac{1}{2})}(v,w))+(v,J^{(\frac{1}{2})}(u,w))=0$$

特别 $$(u,J^{(\frac{1}{2})}(u,v))=0$$

引理 7 若对 $(x_1,x_2)\in Q_h$，$u(X)\in[V_N]^3$ 且 $u|_{\Gamma_{l,h}}=0$，$l=1,2$

则 $\|u\|^2\leqslant|u|_1^2$

引理 8 若对 $(x_1,x_2)\in Q_h$，$u(X)\in[V_N]^3$ 且 $u|_{\Gamma_{l,h}}=0$，

则 $\left\|\frac{\partial u}{\partial x_3}\right\|^2\leqslant N^2\|u\|^2$，$\|u_{X_l}\|^2\leqslant\frac{4}{h^2}\|u\|^2$，$\|u_{\bar{X}_l}\|^2\leqslant\frac{4}{h^2}\|u\|^2$. $l=1,2$

从而 $|u|_1^2\leqslant\left(N^2+\frac{8}{h^2}\right)\|u\|^2$

引理 9 对任意三维向量网格函数，若定义

$\|u\|_{L^4(\Omega_h)}^4=\frac{h^2}{2\pi}\sum_{(x_1,x_2)\in Q_h}\int_I\sum_{p=1}^{3}(u^{(p)}(X))^4dx_3$，则存在正常数 C 使

$$\|u\|_{L^4(\Omega_h)}^4\leqslant Ch^{-2}\|u(X)\|^3\|u\|_1$$

证明 令 $u^{(p)}(x_1,x_2,x_3)=\sum_{|l|=0}^{\infty}u_l^{(p)}(x_1,x_2)e^{ilx_3}$，由 Young-Hausdouff[12] 不等式

$$\frac{1}{2\pi}\int_I(u^{(p)}(X))^4dx_3\leqslant\left(\sum_{|l|=0}^{\infty}|u_l^{(p)}(x_1,x_2)|^{4/3}\right)^3$$

$$\sum_{|l|=0}^{\infty}|u_l^{(p)}(x_1,x_2)|^{4/3}=\sum_{|l|=0}^{\infty}\left[|u_l^{(p)}(x_1,x_2)|^2\left(1+\frac{\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_I^2|l|^2}{\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_{1I}^2}\right)\right]^{2/3}$$

$$\cdot\left(1+\frac{\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_I^2\cdot|\rho|^2}{\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_{1I}^2}\right)^{-2/3}$$

这里 $|u^{(p)}(x_1,x_2)|_{1I}^2=\frac{1}{2\pi}\int_I\left(\frac{\partial u^{(p)}}{\partial x_3}\right)^2dx_3$，$\|u^{(p)}\|_{1I}^2=\|u^{(p)}\|_I^2+|u^{(p)}|_{1I}^2$

由Hölder不等式

$$\sum_{|l|=0}^{\infty}|u_l^{(p)}(x_1,x_2)|^{4/3}\leqslant\left\{\sum_{|l|=0}^{\infty}|u_l^{(p)}(x_1x_2)|^2\left(1+\frac{\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_I^2|l|^2}{\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_{1I}^2}\right)\right\}^{2/3}\cdot$$

$$\cdot\left(\sum_{|l|=0}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_I^2\cdot|l|^2}{\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_{1I}^2}\right)}\right)^{1/3}$$

$$\sum_{|l|=0}^{\infty}\left(|u_l^{(p)}(x_1,x_2)|^2\left(1+\frac{\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_I^2\cdot|l|^2}{\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_{1I}^2}\right)\right)\leqslant2\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_I^2$$

$$\sum_{|l|=0}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_I^2|l|^2}{\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_{1I}^2}\right)^2}\leqslant1+2\int_0^{\infty}\frac{dr}{\left(1+\frac{\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_I^2r^2}{\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_{1I}^2}\right)^2}$$

$$\leqslant1+\frac{2\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_{1I}}{\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_I}\int_0^{\infty}\frac{dr}{(1+r^2)^2}$$

$$\leqslant\left(1+2\int_0^{\infty}\frac{dr}{(1+r^2)^2}\right)\frac{\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_{1I}}{\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_I}$$

故 $$\left(\sum_{|l|=0}^{\infty}|u_l^{(p)}(x_1,x_2)|^{4/3}\right)^3\leqslant4\left(1+2\int_0^{\infty}\frac{dr}{(1+r^2)^2}\right)\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_I^2\cdot\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_{1,I}$$

$$\frac{h^2}{2\pi}\sum_{(x_1,x_2)\in Q_h}\int_I(u^{(p)}(x_1,x_2,x_3))^4dx_3\leqslant4\left(1+2\int_0^{\infty}\frac{dr}{(1+r^2)^2}\right)$$

$$\cdot h^2\sum_{(x_1,x_2)\in Q_h}\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_I^3\cdot\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_{1I}$$

$$\leqslant4\left(1+2\int_0^{\infty}\frac{dr}{(1+r^2)^2}\right)h^{-2}\sum_{(x_1,x_2)\in Q_h}h^2\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_I^3$$

$$\cdot\sum_{(x_1,x_2)\in Q_h}h^2\|u^{(p)}(x_1,x_2)\|_{1I}^2$$

$$\leqslant Ch^{-2}\|u^{(p)}\|^3\|u^{(p)}\|_1$$

再关于 p 求和即得引理。

引理 10 若对 $(x_1,x_2)\in Q_h$，$u(X),v(X)\in[V_N]^3$ 则

$$\|P_N(uv)\|^2 \leqslant \frac{2N+1}{h^2}\|u\|^2 \cdot \|v\|^2$$

引理 11 若对$(x_1,x_2)\in Q_h$，$u(X)\in[V_N]^3$ 且 $u(X)|_{\Gamma_{l,h}}=0$，$l=1,2$

则存在正常数C使 $\|u\|^2_{0,\infty}\leqslant CNh^{-1}|u|^2_1$

证明 （略）

引理 12 若对$(x_1,x_2)\in Q_h$，$u(X),v(X)\in[V_N]^3$ 且 $u(X)|_{\Gamma_{h,l}}=0$，$l=1,2$，则

$$\|H(u,v)\|^2\leqslant CNh^{-1}|u|^2_1\cdot|v|^2_2$$

证明 由引理11直接得到。

引理 13[10] 若对$(x_1,x_2)\in Q_h$，$u(X),v(X)\in[V_N]^3$ 且 $u(X)|_{\Gamma_{h,l}}=v(X)|_{\Gamma_{h,l}}=0$，$l=1,2$，则

$$\begin{aligned}4(\Delta u,\Delta v)=\sum_{l=1}^{2}\{&(u_{x_lx_l},v_{x_lx_l})_{\Omega_h-\Omega^{*,+}_{h,l}}+(u_{\bar{x}_l\bar{x}_l},v_{\bar{x}_l\bar{x}_l})_{\Omega_h-\Omega^{*,-}_{h,l}}\\&+2(u_{x_l\bar{x}_l},v_{x_l\bar{x}_l})+4\left(\frac{\partial u_{x_l}}{\partial x_3},\frac{\partial v_{x_l}}{\partial x_3}\right)+4\left(\frac{\partial u_{\bar{x}_l}}{\partial x_3},\frac{\partial v_{\bar{x}_l}}{\partial x_3}\right)\\&+(u_{\bar{x}_lx_l},v_{\bar{x}_lx_l})_{\Omega^*_{h,l}}\}+4(u_{x_1x_2},v_{x_1x_2})+4(u_{x_1\bar{x}_2},v_{x_1\bar{x}_2})\\&+4(u_{\bar{x}_1x_2},v_{\bar{x}_1x_2})+4(u_{\bar{x}_1\bar{x}_2},v_{\bar{x}_1\bar{x}_2})+8S\left(\frac{\partial u}{\partial x_3},\frac{\partial v}{\partial x_3}\right)\end{aligned}$$

特别地，$|u|^2_2\leqslant\|\Delta u\|^2$.

3 稳定性的误差估计

令 $\alpha=\frac{1}{2}$，$\tau=O\left(h^2+\frac{1}{N^2}\right)$以及$\tilde{\eta}^{(N)}|_{\Gamma_{h,l}}=0$，$l=1,2$，$\tilde{\eta}^{(N)}$，$\tilde{\varphi}^{(N)}$，$\tilde{f}_1$，$\tilde{f}_2$以及$\tilde{\xi}_0$分别为$\eta^{(N)}$，$\varphi^{(N)}$，$f_1$，$f_2$和$\xi_0$的误差，则误差满足方程

$$\left\{\begin{aligned}&\tilde{\eta}^{(N)}_t+P_NJ(\tilde{\eta}^{(N)}+\delta\tau\tilde{\eta}^{(N)}_t,\tilde{\varphi}^{(N)}+\varphi^{(N)})+P_NJ(\eta^{(N)}+\delta\tau\eta^{(N)}_t,\tilde{\varphi}^{(N)})\\&\quad-P_NH(\tilde{\eta}^{(N)},\tilde{\varphi}^{(N)}+\varphi^{(N)})-P_NH(\eta^{(N)},\tilde{\varphi}^{(N)})\\&\quad-\nu\Delta(\tilde{\eta}^{(N)}+\sigma\tau\tilde{\eta}^{(N)}_t)=P_N\tilde{f}_1 && \Omega_h\times S_\tau\\&-\Delta\tilde{\varphi}^{(N)}=\tilde{\eta}^{(N)}+P_N\tilde{f}_2 && \Omega_h\times S_\tau\\&\tilde{\eta}^{(N)}(x_1,x_2,x_3,0)=P_N\tilde{\xi}_0(x_1,x_2,x_3) && \bar{\Omega}_h\end{aligned}\right.\qquad(3)$$

设m为待定常数，方程(3)的第一式两边与$2\tilde{\eta}^{(N)}(t)+m\tau\tilde{\eta}^{(N)}_t(t)$作内积，利用引理1、3、4得

$$\begin{aligned}&\|\tilde{\eta}^{(N)}(t)\|^2_t+\tau(m-1-\varepsilon)\|\tilde{\eta}^{(N)}_t(t)\|^2+2\nu[|\tilde{\eta}^{(N)}(t)|^2_1+S(\tilde{\eta}^{(N)}(t)]\\&+\nu\tau\left(\sigma+\frac{m}{2}\right)[|\tilde{\eta}^{(N)}(t)|^2_1+S(\tilde{\eta}^{(N)}(t))]_t+\nu\tau^2\left(m\sigma-\sigma-\frac{m}{2}\right)\\&\cdot[|\tilde{\eta}^{(N)}_t(t)|^2_1+S(\tilde{\eta}^{(N)}_t(t)]+\sum_{l=1}^{5}G^{(N)}_l(t)\leqslant\|\tilde{\eta}^{(N)}(t)\|^2+\left(1+\frac{m^2\tau}{4\varepsilon}\right)\|\tilde{f}_1(t)\|^2\end{aligned}\qquad(4)$$

这里 $G_1^{(N)}(t)=(2\bar{\eta}^{(N)}(t)+m\tau\bar{\eta}_t^{(N)}(t),\ P_N J(\eta^{(N)}(t)+\delta\tau\eta_t^{(N)}(t),\ \tilde{\varphi}^{(N)}(t)))$

$G_2^{(N)}(t)=(2\bar{\eta}^{(N)}(t)+m\tau\bar{\eta}_t^{(N)}(t),\ P_N J(\bar{\eta}^{(N)}(t)+\delta\tau\bar{\eta}_t^{(N)}(t),\ \varphi^{(N)}(t)))$

$G_3^{(N)}(t)=\tau(m-2\delta)(\bar{\eta}_t^{(N)}(t),\ J(\bar{\eta}^{(N)}(t),\ \tilde{\varphi}^{(N)}(t)))$

$G_4^{(N)}(t)=-(2\bar{\eta}^{(N)}(t)+m\tau\bar{\eta}_t^{(N)}(t),\ P_N H(\bar{\eta}^{(N)},\ \varphi^{(N)}+\tilde{\varphi}^{(N)}))$

$G_5^{(N)}(t)=-(2\bar{\eta}^{(N)}(t)+m\tau\bar{\eta}_t^{(N)}(t),\ P_N H(\eta^{(N)},\ \tilde{\varphi}^{(N)}))$

将方程(3)的第二式与 $\tilde{\varphi}^{(N)}$ 作内积，由引理3、7得

$$|\tilde{\varphi}^{(N)}|_1^2+S(\tilde{\varphi}^{(N)})\leqslant C(\|\bar{\eta}^{(N)}(t)\|^2+\|\tilde{f}_2(t)\|^2)$$

显然亦有
$$|\tilde{\varphi}^{(N)}|_1^2\leqslant C(\|\bar{\eta}^{(N)}(t)\|^2+\|\tilde{f}_2(t)\|^2) \tag{5}$$

令 $\|u\|_{q,\infty}=\max\limits_{0<t<T}\|u(t)\|_{W^{q,\infty}}$，由引理5、6、8、10、12、13及Schwarz不等式得（ε 为适当小的正数）

$$|G_1^{(N)}(t)|\leqslant\varepsilon\tau\|\bar{\eta}_t^{(N)}(t)\|^2+\|\bar{\eta}^{(N)}(t)\|^2+C\left(1+\frac{m^2\tau}{4\varepsilon}\right)\|\eta\|_{1,\infty}^2(\|\bar{\eta}^{(N)}(t)\|^2+\|\tilde{f}_2(t)\|^2)$$

$$|G_2^{(N)}(t)|\leqslant\varepsilon\tau\|\bar{\eta}_t^{(N)}(t)\|^2+\frac{C(m-2\delta)^2\tau}{4\varepsilon}\|\varphi\|_{1,\infty}^2|\bar{\eta}^{(N)}(t)|_1^2$$

$$|G_3^{(N)}(t)|\leqslant\varepsilon\tau\|\bar{\eta}_t^{(N)}(t)\|^2+\frac{C(m-2\delta)^2\tau Nh^{-2}}{4\varepsilon}|\bar{\eta}^{(N)}(t)|_1^2(\|\bar{\eta}^{(N)}(t)\|^2+\|\tilde{f}_2(t)\|^2)$$

$$|G_4^{(N)}(t)|\leqslant2\varepsilon\tau\|\bar{\eta}_t^{(N)}(t)\|^2+C\left(1+\left(1+\frac{m^2\tau}{4\varepsilon}\right)\|\varphi\|_{2,\infty}^2\right)\|\bar{\eta}^{(N)}(t)\|^2+Ch^{-2}\|\bar{\eta}^{(N)}(t)\|^4$$
$$+C\left(\left(\frac{m^2\tau}{4\varepsilon}Nh^{-1}+h^{-2}\right)\|\bar{\eta}^{(N)}(t)\|^2+\frac{m^2\tau Nh^{-1}}{4\varepsilon}\|f_2(t)\|^2\right)|\bar{\eta}^{(N)}(t)|_1^2$$

$$|G_5^{(N)}(t)|\leqslant\varepsilon\cdot\tau\|\bar{\eta}_t^{(N)}(t)\|^2+\left(1+C\left(1+\frac{m^2\tau}{4\varepsilon}\right)\|\eta\|_{0,\infty}^2\right)\|\bar{\eta}^{(N)}(t)\|^2+$$
$$+C\left(1+\frac{m^2\tau}{4\varepsilon}\right)\|\eta\|_{0,\infty}^2\|\tilde{f}_2(t)\|^2$$

将以上关于 $G_i^{(N)}(t)$ 的估计代入(4)式得：

$$\|\bar{\eta}^{(N)}(t)\|_t^2+\tau(m-1-7\varepsilon)\|\bar{\eta}_t^{(N)}(t)\|^2+\nu[|\bar{\eta}^{(N)}(t)|_1^2+S(\bar{\eta}^{(N)}(t))]$$
$$+\nu\tau\left(\sigma+\frac{m}{2}\right)[|\bar{\eta}^{(N)}(t)|_1^2+S(\bar{\eta}^{(N)}(t))]_t+\nu\tau^2\left(m\sigma-\sigma-\frac{m}{2}\right)(|\bar{\eta}_t^{(N)}(t)|_1^2$$
$$+S(\bar{\eta}_t^{(N)}(t)))\leqslant H_0\|\bar{\eta}^{(N)}(t)\|^2+Ch^{-2}\|\bar{\eta}^{(N)}(t)\|^4+H_1(t)\ |\bar{\eta}^{(N)}(t)|_1^2+R(t) \tag{6}$$

式中
$$H_0=C\left(1+\left(1+\frac{m^2\tau}{4\varepsilon}\right)(\|\eta\|_{1,\infty}^2+\|\eta\|_{0,\infty}^2+\|\varphi\|_{2,\infty}^2)\right)$$

$$H_1(t)=-\nu+\frac{C(m-2\delta)^2\tau}{4\varepsilon}[\|\varphi\|_{1,\infty}^2+Nh^{-2}(\|\bar{\eta}^{(N)}(t)\|^2+\|\tilde{f}_2(t)\|^2)]$$
$$+C\left(\left(\frac{m^2\tau}{4\varepsilon}Nh^{-1}+h^{-2}\right)\|\bar{\eta}^{(N)}(t)\|^2+\frac{m^2\tau}{4\varepsilon}Nh^{-1}\|\tilde{f}_2(t)\|^2\right)$$

$$R(t)=C\left(1+\frac{m^2\tau}{4\varepsilon}\right)(\|\eta\|_{1,\infty}^2+\|\eta\|_{0,\infty}^2)\|\tilde{f}_2(t)\|^2+C\|\tilde{f}_2(t)\|^2$$

$$+C\left(1+\frac{m^2\tau}{4\varepsilon}\right)\|\tilde{f}_1(t)\|^2$$

选取m的值按如下方式：

情形Ⅰ：$\sigma>\frac{1}{2}$，取$m>m_1=\max\left(\frac{2\sigma}{2\sigma-1},\ 1+p_0+7\varepsilon\right)$，$p_0\geqslant 0$

则(6)式可化为

$$\|\tilde{\eta}^{(N)}(t)\|_t^2+p_0\tau\|\tilde{\eta}_t^{(N)}(t)\|^2+\nu|\tilde{\eta}_{(t)}^{(N)}|_1^2+\nu\tau\left(\sigma+\frac{m}{2}\right)(|\tilde{\eta}^{(N)}(t)|_1^2+S(\tilde{\eta}^{(N)}(t)))_t$$

$$\leqslant H_0\|\tilde{\eta}^{(N)}(t)\|^2+Ch^{-2}\|\tilde{\eta}^{(N)}(t)\|^4+H_1(t)|\tilde{\eta}^{(N)}(t)|_1^2+R(t) \quad (7)$$

情形Ⅱ：$\sigma=\frac{1}{2}$，取$m>m_2=1+p_0+\frac{\nu\tau N^2}{2}+\frac{17\nu\tau}{4h^2}+7\varepsilon$

则(7)式仍成立。

情形Ⅲ：$\sigma<\frac{1}{2}$且$\tau<\frac{4h^2}{\nu(1-2\sigma)(17+2N^2h^2)}$，则取

$$m>m_3=\left(1+p_0+\frac{17\nu\sigma\tau}{2h^2}+\nu\sigma\tau N^2+7\varepsilon\right)\left(1-\frac{(17+2N^2h^2)(1-2\sigma)\nu\tau}{4h^2}\right)^{-1}$$

(7) 式仍成立。

在(7)式中取

$$\tilde{E}^{(N)}(t)=\|\tilde{\eta}^{(N)}(t)\|^2+\tau\sum_{\substack{y\in S_\tau\\ y\leqslant t-\tau}}(p_0\tau\|\tilde{\eta}_t^{(N)}(y)\|^2+\nu(\tilde{\eta}^{(N)}(y)|_1^2)$$

$$\tilde{P}^{(N)}(t)=\|\tilde{\eta}^{(N)}(0)\|^2+\tau\sum_{\substack{y\in S_\tau\\ y<t-\tau}}\|R(y)^2$$

(7)式关于t求和得

$$\tilde{E}^{(N)}(t)\leqslant\tilde{P}^{(N)}(t)+\tau\sum_{\substack{y\in S_\tau\\ y<t-\tau}}(H_0\tilde{E}^{(N)}(y)+Ch^{-2}(\tilde{E}^{(N)}(y))^2+H_1(y)|\tilde{\eta}^{(N)}(y)|_1^2)$$

利用[10]中引理15得

定理 1 若下列条件满足：

(i) $\alpha=\frac{1}{2}$，$\tau=O\left(h^2+\frac{1}{N^2}\right)$，(ii) $\sigma\geqslant\frac{1}{2}$或$\tau<\frac{4h^2}{\nu(1-2\sigma)(17+2N^2h^2)}$，

(iii) 对所有$t\leqslant T$，$\tilde{P}^{(N)}(t)e^{(H_0+C_1)t}=O(N^{-1}h^2)$，

$$\|\tilde{f}_2(t)\|^2=O(N^{-1}h^2),$$

则对所有$t\in S_\tau$成立

$$\tilde{E}^{(N)}(t)\leqslant\tilde{P}^{(N)}(t)e^{(H_0+C_1)t}\ (C_1\text{为大于0的常数})$$

特别，如果

$$2\sigma \geqslant \begin{cases} m_1, & \sigma > \frac{1}{2} \\ m_2, & \sigma = \frac{1}{2} \\ m_3, & \sigma < \frac{1}{2} \end{cases} \tag{8}$$

则取 $m=2\delta$，此时

$$H_1(t) = -\nu + C\left(\left(\frac{m^2\tau}{4\varepsilon}Nh^{-1}+h^2\right)\|\tilde{\eta}^{(N)}(t)\|^2 + \frac{m\tau^2}{4\varepsilon}Nh^{-1}\|\tilde{f}_2(t)\|^2\right)$$

故有下述定理。

定理 2　若条件(8)及定理1的条件成立，

且　$\tilde{P}^{(N)}(t)e^{(H_0+C_1)t}=O(\min(N^{-1}h,h^2))$，$\|\tilde{f}_2(t)\|^2=O(N^{-1}h)$，$t\leqslant T$

则对所有 $t\in S_\tau$，

$$\tilde{E}^{(N)}(t)\leqslant \tilde{P}^{(N)}(t)e^{(H_0+C_1)t}$$

4　收敛性

设 ξ，ψ 为方程(1)的解，$\eta^{(N)}$，$\varphi^{(N)}$ 为谱—差分解，

$$\xi^{(N)}=P_N\xi,\ \psi^{(N)}=P_N\psi,\ \tilde{\xi}^{(N)}=\eta^{(N)}-\xi^{(N)},\ \tilde{\psi}^{(N)}=\varphi^{(N)}-\psi^{(N)},$$

则 $\tilde{\xi}^{(N)}$，$\tilde{\psi}^{(M)}$ 满足方程

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{\xi}_t^{(N)}+P_NJ^{(a)}(\tilde{\xi}^{(N)}+\delta\tau\tilde{\xi}_t^{(N)},\ \psi^{(N)}+\tilde{\psi}^{(N)}) \\ &\quad +P_NJ^{(a)}(\xi^{(N)}+\delta\tau\xi_t^{(N)},\ \tilde{\psi}^{(N)})-P_NH(\tilde{\xi}^{(N)},\ \tilde{\psi}^{(N)}+\psi^{(N)}) \\ &\quad -P_NH(\xi^{(N)},\ \tilde{\psi}^{(N)})-\nu\Delta(\tilde{\xi}^{(N)}+\sigma\tau\tilde{\xi}_t^{(N)}) \\ &\quad =-\sum_{l=1}^{7}M_l^{(N)} \qquad \Omega_h\times S_\tau \\ &-\Delta\tilde{\psi}^{(N)}=\tilde{\xi}^{(N)}-M_8^{(N)}-M_9^{(N)},\ \tilde{\xi}^{(N)}|_{\Gamma_{l,h}}=0,\ l=1,2.\ \Omega_h\times S_\tau \\ &\tilde{\xi}^{(N)}(x_1,x_2,x_3,0)=0 \qquad \bar{\Omega}_h \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

这里

$$M_1^{(N)}=\xi_t^{(N)}-\frac{\partial\xi^{(N)}}{\partial t},\qquad M_2^{(N)}=P_NJ^{(a)}(\xi^{(N)},\ \psi^{(N)})-P_NJ(\xi,\psi)$$

$$M_3^{(N)}=\delta\tau P_NJ^{(a)}(\xi_t^{(N)},\ \psi^{(N)}),\quad M_4^{(N)}=P_NH(\xi^{(N)},\ \psi^{(N)})-P_NH(\xi,\psi)$$

$$M_5^{(N)}=\nu\frac{\partial^2\xi^{(N)}}{\partial x_1^2}-\nu\xi_{x_1\bar{x}_1}^{(N)},\qquad M_6^{(N)}=\nu\frac{\partial^2\xi^{(N)}}{\partial x_2^2}-\nu\xi_{x_1\bar{x}_2}^{(N)}$$

$$M_7^{(N)}=\nu\sigma\tau\Delta\xi_t^{(N)},\qquad M_8^{(N)}=\frac{\partial^2\psi^{(N)}}{\partial x_1^2}-\psi_{x_1\bar{x}_1}^{(N)}$$

$$M_9^{(N)}=\frac{\partial^2\psi^{(N)}}{\partial x_2^2}-\psi_{x_2\bar{x}_2}^{(N)}$$

因

$$\tau\sum_{\substack{y\in S_\tau\\ y\leqslant t-\tau}}\|\partial_t\xi^{(N)}(y)-\xi_t^{(N)}(y)\|^2\leqslant C\tau^2\|\partial_t^2\xi\|^2_{L^2(0,T;\ [L^2(\Omega)]^3)}$$

由引理2及[13]中的方法得：

$$\|M_2^{(N)}(t)\|^2 \leqslant C N^{2-2\beta}(\|\psi\|_{W^{1,\infty}}^2+\|\xi\|_{W^{1,\infty}}^2)(\|\xi\|_{W^{0,\beta}}^2+\|\psi\|_{W^{0,\beta}}^2),$$

$$\|M_3^{(N)}(t)\|^2 \leqslant C\tau^2\|\partial_t\xi\|_{W^{1,\infty}}^2\cdot\|\psi\|_{W^{1,\infty}}^2,$$

$$\|M_4^{(N)}(t)\|^2 \leqslant C N^{2-2\beta}(\|\eta\|_{W^{0,\infty}}^2\|\psi\|_{W^{0,\beta+1}}^2+N^{-2}\|\psi\|_{W^{2,\infty}}^2\cdot\|\eta\|_{W^{0,\beta}}^2),\ \beta>1,$$

$$\|M_5^{(N)}(t)\|^2 \leqslant Ch^4\|\xi\|_{W^{4,\infty}}^2,\quad \|M_6^{(N)}(t)\|^2 \leqslant Ch^4\|\xi\|_{W^{4,\infty}}^2,$$

$$\|M_7^{(N)}(t)\|^2 \leqslant C\tau^2\|\partial_t\xi\|_{W^{2,\infty}}^2,\quad \|M_8^{(N)}(t)\|^2 \leqslant Ch^4\|\xi\|_{W^{4,\infty}}^2,$$

$$\|M_9^{(N)}(t)\|^2 \leqslant Ch^4\|\psi\|_{W^{2,\infty}}^2.$$

由以上关于$M_i^{(N)}(t)$的估计，应用定理1得以下定理。

定理3 若定理1的条件（i），(ii)成立，且对ξ，ψ满足下述条件：

$$\xi\in L^2(0,T;\ W^{4,\infty}\cap H^\beta)\cap H^1(0,T;\ W^{2,\infty})\cap H^2(0,T;\ L^2),$$

$$\psi\in L^2(0,T;\ W^{4,\infty}\cap H^{\beta+1}),\ \beta>1$$

则存在依赖于$\|\xi\|_{L^2(0,T;\ W^{4,\infty}\cap H^\beta)}$，$\|\xi\|_{H^1(0,T;\ W^{2,\infty})}$，

$\|\xi\|_{H^2(0,T;\ L^2)}$，$\|\psi\|_{L^2(0,T;\ W^{4,\infty}\cap H^{\beta+1})}$和$\nu$的常数$b^*$，使得对所有$t\leqslant T$有

$$\|\xi(t)-\eta^{(N)}(t)\|^2\leqslant b^*(\tau^2+h^4+N^{2-2\beta}).$$

本文曾得到郭本瑜教授的指导，在此谨致谢意。

参考文献

[1] 郭本瑜. K.D.V-Burgers 方程谱方法的误差估计. 数学学报, 1985; 28: 1~5

[2] Ma He-ping, Guo Ben-yu. The Fourier Pseudospectral Method for solving Two-Dimensional Vorticity equations. to applar in IMA JNA, 1987

[3] Maday Y and Quarteroni A. Legendre and Chebyshev Spectral Approximations of Burgers' Equation. Numer Math, 1981; 37: 321~332

[4] Gottlieb D, Orszag S A. Numerical analysis of Spectral Methods: Theory and Applications, CBM-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 26. Philadelphia, Society for Industral and Applied Mathematics, 1977

[5] Orszag S A and Israeli M. In "Proceedings Symposium on Numerical Models of Ocean Circulations". National Academy of Sciences, Washington D.C, 1972; 284

[6] Tan C S. Accarate Solution of Three-Dimensional Poission's Equation in Cylindrical Coordinate by Expansion in Chebyshev polynomials. J. Comp.Phys, 1985; 59: 81~85

[7] Guo Ben-yu. Spectral-Difference method for Baroclinic Primitive Equation and It's Error Estimation. Scientia Sinica, 1987; 3A: 253~269

[8] Guo Ben yu, Xiong Yue-shan. Spectral-Difference Method for Two-Dimensional Viscous flow. J. Comp. Phys, 1989; 84: 259~278

[9] Guo Ben-yu, Xiong Yue-shan. Spectral-Difference Method for Solving Three-Dimensional Vorticity Equation. to Appear

[10] 郭本瑜. 论离散能量法(I). 高校计算数学学报, 1982; 41: 327~344

[11] Canuto C and Quarteroni A. Approximation Results for Orthognal Polynomials in sobolev Spaces. Math. Comp, 1982, 38: 67~86

[12] Hardy G H, Littlewood J E and Pólya G. Inequalities. 2'nd ed, Cambridge University Press, 1952

[13] Ma He-ping, Guo Ben-yu. J. Comp. Phys, 1986; 65: 120~137
[14] Kuo Ben-yu. On stability of discretization. Scientia Sinica, 1982; 25 series A: 702~715
[15] Adams R A. 索伯列夫空间. 人民教育出版社, 1983

The Hybrid Spectral-Difference Schemes for the Three-Dimensional Vorticity Equation with One Periodic Direction in Space and it's Error Estimation

Xiong Yueshan

(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

Abstract

In this paper, a new kind of hybrid spectral-difference schemes for three-dimensional vorticity equation with one periodic direction in space is given, the stability and the convergence for each schemes are also discussed.

Key words: Spectral-Difference method, hybrid scheme, hybrid norm