国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第12卷第1期　1990年8月　Vol.12 No.1

关于满秩素数的一些性质

杨元彪　唐乾玉

（系统工程与应用数学系）

摘　要　本文给出了满秩素数的概念，素数P，满足$(P,10)=1$，被称为满秩素数，若$\frac{1}{P}$的小数循环节长恰为$(P-1)$。本文证明了这类素数的一些有趣性质，例如，若P为满秩素数，则所有真分数$\frac{K}{P}(1\leqslant K\leqslant P-1)$的小数循环节的数字排列有一定的规律性。

关键词　素数，满秩素数，循环节
分类号　O156

除2，5以外，有些素数的倒数的小数循环节很有趣，如素数$P=7$，$\frac{1}{P}=\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$，它们有下面三个性质：

(1) 循环节长为$6=P-1$；

(2) 将其循环节分为长度相同的前后两段，两段中对应的数字之和都是9，即$1+8$，$4+5$，$2+7$都等于9；

(3) $\frac{1}{7}$，$\frac{2}{7}$，$\frac{3}{7}$，$\frac{4}{7}$，$\frac{5}{7}$，$\frac{6}{7}$的循环节是$\frac{1}{7}$的循环节中六个数字的循环排列。

自然数中还有哪些素数具有这些性质呢？

在10进制中，一个$n+1$位整数N可表为：

$$N=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_1\cdot 10+a_0$$

记$S_N=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$，如果$S_N$能被9整除，则$N$也能被9整除。

定义1　一个素数P，若其倒数，从小数点后第一位算起，是循环小数，该循环小数的循环节长称为该素数的秩。素数P的秩记为$r(P)$。又若素数P的秩$r(P)$为$P-1$，则称素数P为满秩素数。

例　素数11，由$\frac{1}{11}=0.\overline{09}$，所以11的秩为2．由$\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$，所以7的秩为6，7是满秩素数。此外，17、19、23、29、…也是满秩素数。

下面的这些结论都是已知的[1,2]，在以后的证明中，直接或间接地要用到它们。

命题1　在$\frac{1}{n}$的无限循环小数展式中，循环节长$r\leqslant n-1$.

本科生论文　1988年1月1日收稿

命题 2　对素数 P，$10^{P-1}\equiv 1\ (\bmod P)$，$(P\geqslant 7)$.

命题 3　若 $(n,10)=1$，则 $\frac{1}{n}$ 的循环节长为 r，r 表示满足 $10^r\equiv 1(\bmod n)$ 的最小正整数。

命题 4　若 $(P,10)=1$，则 $\frac{1}{P}$ 的循环节长 r 满足 $r|P-1$.

1　素数的两个性质

定理 1　若素数 $P\geqslant 7$，设 $\frac{1}{P}$ 的小数循环节为 $\frac{1}{P}=0.\overline{P_1P_2\cdots P_r}$，则 $\sum_{i=1}^{r}P_i\equiv 0(\bmod 9)$

证明　由 $\frac{1}{P}=0.\overline{P_1P_2\cdots P_r}$，不妨设 $P_1=P_2=\cdots=P_{m-1}=0$，$P_m\neq 0$，则

$$\frac{1}{P}=\frac{P_mP_{m+1}\cdots P_r}{99\cdots 9}\text{，分母中有 } r \text{ 个 } 9$$

即 $99\cdots 9=P\cdot(P_mP_{m+1}\cdots P_r)$，从而有

$$P_mP_{m+1}\cdots P_r\equiv 0\ (\bmod 9)$$

故
$$\sum_{i=1}^{r}P_i=\sum_{i=m}^{r}P_i\equiv 0\ (\bmod 9)$$
（证毕）

定理 2　设 $P\geqslant 7$ 为素数，并且 P 的秩为偶数 $2K$，记

$$\frac{1}{P}=0.\overline{P_1P_2\cdots P_kP_{k+1}\cdots P_{2k}}$$

则
$$P_i+P_{k+i}=9\ (i=1,2,\cdots k)$$

证明　利用辗转相除法算式有

$$\left.\begin{aligned}
&10=P_1\cdot P+r_1, && 1<r_1\leqslant P-1,\\
&10r_1=P_2\cdot P+r_2, && 1<r_2\leqslant P-1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&10r_k=P_{k+1}\cdot P+r_{k+1}, && 1<r_{k+1}\leqslant P-1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&10r_{2k-1}=P_{2k}\cdot P+r_{2k}, && r_{2k}=1
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

从而有

$$\begin{aligned}
&10r_{2k}\equiv r_1\ (\bmod P)\\
&10r_1\equiv r_2\ (\bmod P)\\
&\cdots\cdots\\
&10r_k\equiv r_{k+1}\ (\bmod P)\\
&\cdots\cdots\\
&10r_{2k-1}\equiv r_{2k}\ (\bmod P)
\end{aligned}$$

于是得到下面关系式：

$$10(r_1+r_{k+1})\equiv r_2+r_{k+2}\ (\bmod P)$$

$$10(r_2+r_{k+2})\equiv r_3+r_{k+3}\pmod P$$

$$\cdots\cdots$$

$$10(r_{k-1}+r_{2k-1})\equiv r_k+r_{2k}\pmod P$$

由此，可以推出：

$$r_1+r_{k+1}\equiv 10(r_k+r_{2k})\equiv 10^2(r_{k-1}+r_{2k-1})\equiv\cdots$$
$$\equiv 10^k(r_1+r_{k+1})\pmod P$$

即
$$(10^k-1)(r_1+r_{k+1})\equiv 0\pmod P$$

由于$10^r(=10^{2k})$为满足$10^t\equiv 1\pmod P$的最小正整数（命题3），所以$10^k\not\equiv 1\pmod P$。故有

$$r_1+r_{k+1}=P$$

同理可以证明

$$r_i+r_{k+i}=P\quad(i=2,3,\cdots,k)$$

即
$$r_i+r_{k+i}=P\quad(i=1,2,\cdots,k)\tag{2}$$

又由(1)式得：

$$(r_{2k}+r_k)=(10r_{2k-1}-P_{2k}P+10r_{k-1}-P_kP)$$
$$=10(r_{2k-1}+r_{k-1})-P(P_k+P_{2k})$$

从而有

$$P(P_k+P_{2k})=9P$$

则得：
$$P_k+P_{2k}=9$$

同理可证
$$P_i+P_{k+i}=9\quad(i=1,2,\cdots,k-1)$$

即
$$P_i+P_{k+i}=9\quad(i=1,2,\cdots,k)\tag{3}$$

（证毕）

2　满秩素数的一个性质

定理 3　设P为满秩素数，并设$1/P=0.\overline{P_1P_3\cdots P_r}$，$r=P-1$，则$k_1/P$（$1\leqslant k_1\leqslant P-1$）的循环节长均为$r$，且$S=\left\{\frac{1}{P},\frac{2}{P},\cdots,\frac{r}{P}\right\}$一一对应于$(P_1,P_2,\cdots,P_r)$的循环排列。即

（i）　任取$1\leqslant k_1\leqslant r$，存在$1\leqslant q\leqslant P-1$，使$k_1/P=0.\overline{P_qP_{q+1}\cdots P_rP_1P_2\cdots P_{q-1}}$

（ii）　任取$(P_1,P_2,\cdots,P_r)$的一个循环排列$P_q\cdot P_{q+1}\cdots P_rP_1P_2\cdots P_{q-1}$存在唯一的分数$k_1/P$，$(1\leqslant k_1\leqslant P-1)$，使得

$$k_1/P=0.\overline{P_qP_{q+1}\cdots P_rP_1\cdots P_{q-1}}$$

证明　在(1)式中，由于$r_1,r_2,\cdots,r_{2k}$，$(2k=P-1)$，分别为1，2，…，$P-1$中的不同的数，故必存在$1\leqslant q\leqslant P-1$，使得：$r_{q-1}=k_1$.
从而由(1)式有

$$10r_{q-1}=P_qP+r_q\qquad 1<r_q<P$$
$$10r_q=P_{q+1}P+r_{q+1}\qquad 1<r_q<P$$
$$\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{array}{ll} 10r_{P-2}=P_{P-1}P+r_{P-1} & r_{P-1}=1 \\ 10r_{P-1}=10=P_1P+r_1 & 1<r_1<P \\ 10r_1=P_2P+r_2 & 1<r_2<P \\ \cdots\cdots & \\ 10r_{q-2}=P_{q-1}P+r_{q-1} & r_{q-1}=k_1 \end{array}\right\} \tag{4}$$

不妨设k_1/P （$1\leqslant k_1\leqslant P-1$）循环节长为$S$，记

$$k_1/p=0.\overline{P_1^{(k)}P_2^{(k)}\cdots P_S^{(k)}}$$

由辗转相除算式有

$$\left.\begin{array}{lll} 10k_1=P_1^{(k)}P+r_1^{(k)}, & 1\leqslant r_1^{(k)}\leqslant P-1, & r_1^{(k)}\neq k_1 \\ 10r_1^{(k)}=P_2^{(k)}P+r_2^{(k)}, & 1\leqslant r_2^{(k)}\leqslant P-1, & r_2^{(k)}\neq k1 \\ \cdots\cdots & & \\ 10r_{S-1}^{(k)}=P_{S-1}^{(k)}P+r_{s-1}^{(k)}, & r_S^{(k)}=k_1 & \end{array}\right\} \tag{5}$$

因此，(4)，(5)式为同一辗转相除式，由唯一性，得到$S=r=P-1$．且

$P_1^{(k)}=P_q$，$P_2^{(k)}=P_{q+1}$，$\cdots\cdots P_{P-q}^{(k)}=P_{P-1}$，$P_{P-q+1}^{(k)}=P_1$，$\cdots\cdots$，$P_{P-1}^{(k)}=P_{q-1}$．故存在$1\leqslant q\leqslant P-1$，使得

$$k_1/P=0.\overline{P_q\cdots P_rP_1\cdots P_{q-1}}$$

而k_1/P的循环节长亦为r，$1\leqslant k_1\leqslant P-1$．

再由(1)式，对于P_1，P_2，$\cdots$，P_{P-1}的一个循环排列$P_qP_{q+1}\cdots P_rP_1\cdots P_{q-1}$，不妨设其对应的辗转相除算式中$r_{q-1}=k_1$，$1\leqslant k_1\leqslant P-1$，由(5)式，有

$$0.\overline{P_q\cdots P_rP_1\cdots P_{q-1}}=r_{q-1}/P=k_1/P \qquad \text{（证毕）}$$

由定理 1 和定理 3，不难得到下面的推论。

推论 1　设P为满秩素数，$r(P)=P-1$．考虑真分式k/P （$1\leqslant k\leqslant P-1$），记$k/P=0.\overline{k_1k_2\cdots k_r}$，则

$$\sum_{i=1}^{r}k_i\equiv 0 \pmod 9 \qquad \#$$

3　结束语

回到开始时的例子，$\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$，可将其循环节写成一个圆圈，如图 1 表示。

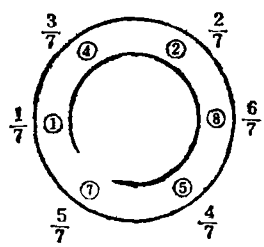

图 1

由满秩素数的这一性质，为生成满秩素数提供了方便。作者在IBM PC机上编写程序计算出了10^5之内的所有满秩素数，10^5之内的最大的满秩素数为99989，它的循环节为 99988 位。关于满秩素数P的分布规律及其它一些性质，有待进一步研究。

本文是在陈庆华副教授指导下完成的。卢拾贵同学为计算10^5内的满秩素数完成了上机工作，袁学明同学也给了大力协助。在此谨表示感谢。

参 考 文 献

[1]　U．杜德利，周仲良译；俞文鉠校．基础数论．上海科学出版社，1980
[2]　华罗庚．数论导引．科学出版社，1979

国 防 科 技 大 学 学 报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第12卷第1期　1990年3月　Vol.12 No.1

超空间上连续函数的存在性*

李登峯** 余 滨

（系统工程与应用数学系）

摘 要 本文对[1]中二个未曾解决的问题作了较详细的研究，并以定理3和定理4对它们作出了圆满的解答；同时，得到一些有意义的重要结论。

关键词 超空间，连续统，上半连续

分类号 O189.11

S. Jhon 在文献[1]中提出了两个问题：当度量空间Y满足什么条件时，存在从超空间2^X或$C(X)$到Y上的连续函数。本文就上述问题作了研究，得到较满意的解答。同时得到一些有意义的结论。

1 定义和引理

在下面讨论中，如不特别声明，所论空间均为度量空间。

定义 1[1] 空间X称为连续统是指：它是点数多于一个的紧的连通空间。

定义 2[1] 设X是连续统，令：

* 国家自然科学基金资助项目
** 87级硕士研究生
研究简报 1987年11月8日收稿

Some Properties on Full-rank-primes

Yang Yuanbiao Tang Qianyu

(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

Abstract

In this paper, we have given the definition of full-rank-primes. A prime P supposing that (p, 10) = 1 is defined as a full-rank-prime, if the length of the decimal repetend of 1/P is exactly P-1, roughly speaking. In the paper several interesting theorems about the decimal repetend of 1/P when P is prime, especially a full-rank-prime, have been proved. For example, if P is a full-rank-prime, then the digit permutation of all K/P, $1\leqslant K\leqslant P-1$, has certain properties.

Key words: prime number, full-rank-prime, repetend