国 防 科 技 大 学 学 报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第12卷第1期　1990年3月　Vol.12 No.1

超空间上连续函数的存在性*

李登峯** 余　滨

（系统工程与应用数学系）

摘　要　本文对[1]中二个未曾解决的问题作了较详细的研究，并以定理3和定理4对它们作出了圆满的解答；同时，得到一些有意义的重要结论。

关键词　超空间，连续统，上半连续

分类号　O189.11

S. Jhon 在文献[1]中提出了两个问题：当度量空间Y满足什么条件时，存在从超空间2^X或$C(X)$到Y上的连续函数。本文就上述问题作了研究，得到较满意的解答。同时得到一些有意义的结论。

1　定义和引理

在下面讨论中，如不特别声明，所论空间均为度量空间。

定义 1[1]　空间X称为连续统是指：它是点数多于一个的紧的连通空间。

定义 2[1]　设X是连续统，令：

*　国家自然科学基金资助项目

**　87级硕士研究生

研究简报　1987年11月8日收稿

Some Properties on Full-rank-primes

Yang Yuanbiao　Tang Qianyu

(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

Abstract

In this paper, we have given the definition of full-rank-primes. A prime P supposing that (p, 10) = 1 is defined as a full-rank-prime, if the length of the decimal repetend of 1/P is exactly P-1, roughly speaking. In the paper several interesting theorems about the decimal repetend of 1/P when P is prime, especially a full-rank-prime, have been proved. For example, if P is a full-rank-prime, then the digit permutation of all K/P, $1\leqslant K\leqslant P-1$, has certain properties.

Key words: prime number, full-rank-prime, repetend

$2^X=\{A\subset X:A$是非空的紧子集$\}$，$C(X)=\{A\in 2^X:A$是连通的$\}$，

则称2^X与$C(X)$是X的超空间，X为底空间。

定义 3[1]　对任意$\varepsilon>0$和$A\in 2^X$，定义$N_d(\varepsilon,A)=\{x\in X:d(x,a)<\varepsilon$，对某个$a\in A\}$.

对任意A，$B\in 2^X$，定义$H_d(A,B)=\inf\{\varepsilon>0:A\subset N_d(\varepsilon,B)$ 且$B\subset N_d(\varepsilon,A)\}$. 易知：$H_d$ 是 2^X 上的度量函数。

定义 4[1]　设(Y,d)和(Z,p)是非空的紧空间。函数$F:Y\to 2^Z$称为在y_0处上半连续是指：对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$d(y,y_0)<\delta,y\in Y$时，有$F(y)\subset N_p(\varepsilon,F(y_0))$；

称$F:Y\to 2^Z$是上半连续函数是指：F在Y中任一点都是上半连续的。

定义 5[1]　设$A_i\in 2^X$ $(i=1,2,\cdots)$，定义：

$\limsup A_i=\{x\in X:$对无穷多个i，有$U\cap A_i\neq\Phi$，其中U是含x的任意开集，Φ是空集$\}$。

引理 1[1]　设Y和Z是非空的紧空间，函数$F:Y\to 2^Z$在$y_0\in Y$处上半连续的充要条件是：对Y中的任一序列$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$，当$y_n\to y_0$ $(n\to\infty)$时，有

$$\limsup F(y_n)\subset F(y_0)$$

引理 2[1]　设K和M是非空的紧空间。如果$F:K\to 2^M$在$p\in K$处是上半连续且有$F(p)=\{q\}$，$q\in M$，则F在p处连续。

引理 3[1]　设K和M是非空的紧空间。函数$F_n:K\to 2^M$是上半连续函数$(n=1,2,\cdots)$. 设对任意$x\in K$及$n=1,2,\cdots$，有：$F_n(x)\supset F_{n+1}(x)$. 对任意$x\in K$，令

$$G(x)=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n(x)$$

则G是K到2^M的上半连续函数。

引理 4[1]　设K，M，F_n $(n=1,2,\cdots,)$ 和G如引理3所定义。再设对任意的$n=1,2,\cdots$，有：$\bigcup_{x\in K}F_n(x)=M$，则　$\bigcup_{x\in K}G(x)=M$.

引理 5[1]　任一局部连通的连续统X是单位区间$I=[0,1]$的连续像。

引理 6[2] (YPHCON引理)　设A_0和A_1是一个正规空间S的两个不相交的闭子集，则存在一个连续函数$f:S\to I=[0,1]$，满足$f(A_0)=0$及$f(A_1)=1$.

2　主要结果

定理 1　任一非空的紧空间M是康托集K的连续像。

证明　已知，康托集K就是在$I=[0,1]$中去掉那些形如$\left(\frac{k}{3^n},\frac{k+1}{3^n}\right)$ $(n=1,2,\cdots;k=1,2,\cdots,3^n-1)$的开区间而构成的。因此有

$$G_0\triangleq[0,1]\setminus K=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{3^n-1}\left(\frac{k}{3^n},\frac{k+1}{3^n}\right)$$

下面分几步来证明。

① 把M分成n个非空紧子集M_i $(i=1,2,\cdots,n)$之并，且使其直径小于1，即

$$M=\bigcup_{i=1}^{n}M_i$$

把I分成相应的n个区间，这些区间为：$I_1=[0,c_1)$；$I_i=(c_{i-1},c_i)$，$(i=2,3,\cdots,n-1)$；$I_n=(c_{n-1},1]$，并使$c_i\in G_0$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$. 令：$K_i=I_i\cap K$，$(i=1,2,\cdots,n)$，则显然有：$K=\bigcup\limits_{i=1}^{n}K_i$. 作函数$F_1$：$K\to 2^M$如下：对任意$x\in K_i$，令

$$F_1(x)=M_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

由定义 4 及K的特性易知：F_1是上半连续函数。

② 对每个M_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 分割成n_i个非空紧子集$M_i^{(j)}$ $(j=1,2,\cdots,n_i)$之并，且使每个子集直径小于$\frac{1}{2}$，即 $M_i=\bigcup\limits_{j=1}^{n_i}M_i^{(j)}$ $(i=1,2,\cdots,n_i)$.

相应地把I_i分成n_i分，即

$I_1^{(1)}=[0,c_1^{(1)})$；$I_1^{(2)}=(c_1^{(1)},c_1^{(2)})$；$\cdots$，$I_1^{(n_1)}=(c_1^{(n_1-1)},\ c_1]$；$I_i^{(j)}=(c_i^{(j-1)},c_i^{(j)})$，$(i=2,3,\cdots,n-1;\ j=1,2,\cdots,n_i)$；要求$c_i^{(0)}=c_{i-1}$，$c_i^{(n_i)}=c_i$ $(i=2,3,\cdots,n-1)$；$I_n^{(1)}=(c_{n-1},c_{n-1}^{(1)})$；$I_n^{(2)}=(c_n^{(1)},c_n^{(2)})$，$\cdots$；$I_n^{(n_n)}=(c_n^{(n_n-1)},1]$. 并且要求$c_i^{(j)}\in G_0$ $(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n_i)$. 令$K_i^{(j)}=K_i\cap I_i^{(j)}$，则有：$K_i=\bigcup\limits_{j=1}^{n_i}K_i^{(j)}(i=1,2,\cdots,n)$.

作函数F_2：$K\to 2^M$如下：对任意$x\in K_i^{(j)}$，定义

$$F_2(x)=M_i^{(j)}\ (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n_i)$$

由定义 4 及K的特性易知：F_2是上半连续函数且对任意$x\in K$，有$F_2(x)\subset F_1(x)$.

③ 重复②的方法，要求每次分割的子集直径依次小于1，$\frac{1}{2}$，$\cdots$，$\frac{1}{n}$，$\cdots$. 从而得到一列上半连续函数$F_1,F_2,\cdots,F_n,\cdots$，且有$F_{n+1}(x)\subset F_n(x)$，对任意$x\in K$成立。

对任意$x\in K$，令：$G(x)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n(x)$. 由引理 3 知，$G$是上半连续函数。由$K$的任一连通子集的点数不多于一个的特性及引理 2 知，G是连续函数。

由F_n $(n=1,2,\cdots)$ 的作法，易知：$\bigcup\limits_{x\in K}F_n(x)=M$，由引理 4 可得：$\bigcup\limits_{x\in K}G(x)=M$. 于是有

$$G(K)=M\qquad\text{（证毕）}$$

定理 2 任一局部连通的连续统X是道路连通的连续统。

证明 设x，y是X的任意两点。下面分几步来证明。

① 把X分成n个非空的连通开子集V_i之并，即$X=\bigcup\limits_{i=1}^{n}V_i$且使$\bar{V}_i$是紧的以及其直径小于1. 因此可在$V_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 中选出m个集合K_1，K_2，$\cdots K_m$组成一条链且使m最小，并满足：

$x\in K_1$，$y\in K_m$，$K_i\cap K_{i+1}\neq\Phi$ $(i=1,2,\cdots,m-1)$

对I作m等分，作函数F_1：$I\to 2^X$如下：

$$F_1(p)=\begin{cases}K_1, & p\in\left[0,\ \dfrac{1}{m}\right)\\ K_i, & p\in\left(\dfrac{i}{m},\ \dfrac{i+1}{m}\right)\quad (i=1,2,\cdots,m-1)\\ K_i\cup K_{i+1}, & p=\dfrac{i}{m}\quad (i=1,2,\cdots,m-1)\\ K_m, & p=1\end{cases}$$

由定义 4 易知，F_1是上半连续函数。

② 因$K_i\cap K_{i+1}\neq\Phi$ $(i=1,2,\cdots,m-1)$，故可取$x_i\in K_i\cap K_{i+1}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$. 由于每个K_i是局部连通的连续统，故可把K_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 分成n_i个非空连通开子集$V_i^{(j)}$之并，即$K_i=\bigcup\limits_{j=1}^{n_i}V_i^{(j)}$ $(i=1,2,\cdots,m)$，要求$\bar V_i^{(j)}$是紧的且其直径小于$\dfrac{1}{2}$.

对每个$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$，可从集合$V_i^{(j)}$ $(j=1,2,\cdots,n_i)$ 中选出集合 $K_i^{(1)},\ \cdots,\ K_i^{(m_i)}$ 组成一条链且使m_i最小并满足条件：

$x\in K_1^{(1)}$， $x_1\in K_1^{(m_1)}$ ， $K_1^{(j)}\cap K_1^{(j+1)}\neq\Phi$ $(j=1,2,\ \cdots,\ m-1)$ ； $x_i\in K_i^{(m_i)}$， $K_i^{(j)}\cap K_i^{(j+1)}\neq\Phi$ $(i=2,\ 3,\ \cdots,\ m-1;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m_i-1)$ ； $x_{m-1}\in K_m^{(1)}$， $y\in K_m^{(m_m)}$， $K_m^{(j)}\cap K_m^{(j+1)}\neq\Phi$ $(j=1,2,\cdots m_m-1)$. 于是按照上述顺序可得到一条从 x 到 y 的链。

相应地把$\left[\dfrac{i-1}{m},\ \dfrac{i}{m}\right]$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 作m_i等分，作函数 F_2：$I\to 2^X$如下：

$$F_2(p)=\begin{cases}K_1^{(1)}, & p\in\left[0,\ \dfrac{1}{mm_1}\right)\\ K_i^{(j)}, & p\in\left(\dfrac{j}{mm_i},\ \dfrac{j+1}{mm_i}\right)\\ K_i^{(j)}\cup K_i^{(j+1)}, & p=\dfrac{j}{mm_i}\\ K_m^{(m_m)}, & p=1\end{cases}\quad\begin{pmatrix}i=1,2,\cdots,m\\ j=1,2,\cdots,m_{i-1}\end{pmatrix}$$

由定义 4 知：F_2是上半连续函数且对任意$x\in I$，有　$F_2(x)\subset F_1(x)$.

③ 不断重复②的做法，并且要求每次的分割子集直径依次小于 1 ，$\dfrac{1}{2}$，$\cdots$，$\dfrac{1}{n}$，$\cdots$，从而得到一系列上半连续函数F_1，F_2，$\cdots$，$F_n,\cdots$，且有：$F_{n+1}(x)\subset F_n(x)$ （对任意$x\in I$都成立）。

对任意$x\in I$，令$G(x)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n(x)$. 由引理 2 和引理 3 及作法可知，$G$ 是连续函数且$G(0)=x,G(1)=y$. 故G就是X中的一条从x到y的道路。由x及y的任意性可知，X是道路连通的。　　（证毕）

推论 1　任一局部连通的连续统X是局部道路连通的。

证明　由题设知，X有连通且局部连通的基。由定理 2 知，X的每个基都是道路连

通的，从而X是局部道路连通的。 （证毕）

命题 1 设X是连续统，则存在连续函数f：$2^X \xrightarrow{onto} I$.

证明 由题设及[1]中理论知：2^X是紧的Hausdorff空间，从而是正规空间。由引理6可得结论。

定理 3 设X是连续统，Y是局部连通的连续统，则存在连续函数f：$2^X \xrightarrow{onto} Y$.

证明 由命题1及引理5可得证。

推论 2 设X是连续统，则存在连续函数f：$2^X \xrightarrow{onto} X$的必要条件是：X是局部连通的连续统。

显然，推论2是定理3的特殊情况。从而定理3完全解决了本文开头提出的第一个问题，即Y满足什么条件时，存在从2^X到Y上的连续函数。

推论 3 设X是连续统，Y是局部道路连通的连续统，则存在连续函数f：$2^X \xrightarrow{onto} Y$.

证明 只要注意到“局部道路连通是局部连通”这一事实，再由定理3可得证。

定理 4 设X是连续统，Y是局部连通的连续统，则存在连续函数f：$C(X) \xrightarrow{otno} Y$.

证明 由题设及[1]中理论知，$C(X)$是紧的Hausdorff空间，从而是正规空间。由引理6及引理5可得证。

推论 4 设X是连续统，则存在连续函数f：$C(X) \xrightarrow{onto} X$的必要条件是：$X$是局部连通的连续统。

显然，推论4是定理4中$Y=X$的特殊情况。从而引言中提出的第二个问题，即：Y满足什么条件，存在从$C(X)$到Y上连续函数，可由定理4完全解决。从而[1]中的两个问题：X满足什么条件，存在从2^X或$C(X)$到X上的连续函数，可作为定理3和定理4的特殊情况而完全解决。

定理 5 设X是紧的Hausdorff空间，Y是局部连通的连续统，则存在连续函数f：$2^X \xrightarrow{onto} Y$.

证明 由命题1的证明过程及引理5可得结论。

定理 6 设X是完全正则空间，Y是局部连通的连续统，则存在连续函数f：$2^X \xrightarrow{onto} Y$.

证明 由X是完全正则空间可知，2^X也是完全正则的。从而有连续函数f_1：$2^X \xrightarrow{onto} I$，再由引理5可得证。

对于超空间$C(X)$也有类似结论，不再一一列出。

推论 5 设X是局部紧的Hausdorff空间，Y是局部连通的连续统，则存在连续函数f：$2^X \xrightarrow{onto} Y$.

证明 由X是局部紧的Hausdorff空间，故2^X亦然，由[3]知：2^X是完全正则空间。从而由定理6可得证。

定理 7 设X是度量空间，Y是局部连通的连续统，则存在连续函数f：$2^X \xrightarrow{onto} Y$.

证明 2^X是由X的度量诱导产生的度量空间。从而2^X赋以相伴的度量拓扑成为正规空间。由定理 6 可得证。

3 结束语

必须指出，以上所有定理及推论中的条件（局部连通）不能少，否则结论不一定成立。反例如下：

记$X=\{(x,0)\in R^2: 0\leqslant x\leqslant 1\}\cup\left\{\left(\frac{1}{n}, y\right)\in R^2: 0\leqslant y\leqslant 1, n=1,2,\cdots\right\}\cup\{(0,y)\in R^2: 0\leqslant y\leqslant 1\}$。如图 1 所示，易于看出：$X$是道路连通的连续统，但非局部连通；而$C(I)=C([0,1])$，如图 2 的三角形$ABO$所示。

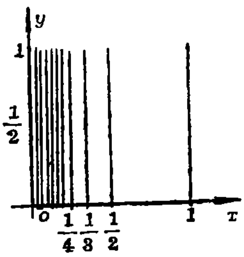

图 1

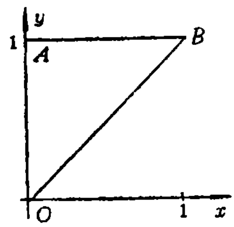

图 2

如果存在连续函数f_1：$C(I)\xrightarrow{\text{onto}}X$；又因为显然有连续函数$f_2$：$I\xrightarrow{\text{onto}}C(I)$．从而有连续函数$f_1\circ f_2$：$I\xrightarrow{\text{onto}}X$，但这显然不可能，即不存在$C(I)$到$X$上的连续函数$f_1$，故此时定理 2 不成立。

对刘德铭教授、陈庆华副教授和沙基昌教授对本文工作的指导表示感谢。

参 考 文 献

[1] S B N Jhon. HYPERSPACES OF SETS, 1983

[2] 干丹岩译. 拓扑学与几何学基础讲义. 上海科技出版社, 1985

[3] 汪 浩译. 一般拓扑学. 国防科技大学出版社, 1981

Existence of Continuous Function on Hyperspaces

Li Dengfeng　Yu Bin

(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

Abstract

The authors put forward two unsolved problems in the paper [1], then have studied them in great details in this paper, and have solved them completely by theorem 3-4. Meanwhile, we got a series of important conclusions.

Key words: hyperspace, Continuum flow, supper semi-continuous