

一种简化的空气中二维抛板模型

吕洪生 凌科良

(应用物理系)

摘要 本文对于在炸药驱动下空气中的二维抛板理论模型,提出了一种具有较普遍意义的简化处理方案。

关键词 激波,模型,抛板,转角,拐角

分类号 O382.1

Дерибас在Hill-Pack的裸体炸药爆轰的模型基础上加以发展,提出了在真空中二维平板抛掷的理论模型。作者在Дерибас模型的基础上考虑空气的存在,对模型作过简化计算^[1],作为原来工作的继续,对空气中二维抛板问题提出一种新的简化处理方法。该模型的主要特点是不必借助于真空中二维抛板的理论计算;同时又很容易变成真空中二维抛板的理论模型。

1 运动的控制方程

在随爆轰波阵面运动的坐标系中整个的运动图象如图1所示。

1.1 爆轰产物流动的描述

因在动坐标系中爆轰产物作等熵、无旋、定常、超音速流动,故满足:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I} +: \frac{dy}{dx} = \text{tg}(\beta + \alpha) \\ \text{I} +: \beta = \sqrt{\frac{K+1}{K-1}} \text{tg}^{-1} \left(\sqrt{\frac{K-1}{K+1}} \text{ctg} \alpha \right) + \alpha + \text{const} \\ \text{I} -: \frac{dy}{dx} = \text{tg}(\beta - \alpha) \\ \text{I} -: \beta = - \left[\sqrt{\frac{K+1}{K-1}} \text{tg}^{-1} \left(\sqrt{\frac{K-1}{K+1}} \text{ctg} \alpha \right) + \alpha \right] + \text{const} \end{array} \right. \quad (1)$$

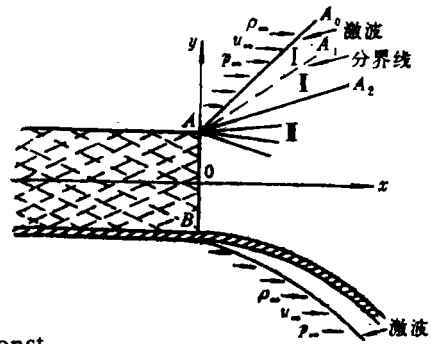


图 1

式中:

$$\begin{cases} \beta = \text{tg}^{-1}u/v & \text{为流动方向与 } x \text{ 轴的夹角} \\ \alpha = \sin^{-1}a/q & \text{为马赫角} \\ q^2 = u^2 + v^2 \\ a^2 = kp/\rho \end{cases}$$

而 u 、 v 、 p 、 ρ 、 K 分别为炸药爆轰产物的 x 向速度分量、 y 向速度分量、压力、密度和绝热指数。

1.2 在爆轰波阵面上的条件

在 $x=0$ ， $-h_0 \leq y < h_0$ 的直线上物理量的取值为：

$$\begin{cases} u = u_H = \frac{K}{K+1} D \\ v = v_H = 0 \\ p = p_H = \frac{1}{K+1} \rho_0 D^2 \\ \rho = \rho_H = \frac{K+1}{K} \rho_0 \end{cases} \quad (2)$$

式中： ρ_0 、 h_0 、 D 分别为炸药的密度、半厚度和爆速；而下标 H 表示 u 、 v 、 p 、 ρ 在爆轰波阵面上的取值。

1.3 抛板一段微元的运动方程

在动坐标系中板元的轨迹，即板形曲线 $y=f(x)$ ，满足：

$$\begin{cases} -f''/[1+(f')^2]^{3/2} = \frac{p-p_D}{\rho_* h_* D^2} \\ f' = \frac{dy}{dx} = v/u = v_D/u_D \end{cases} \quad (3)$$

式中： h_* 、 ρ_* 为被抛平板的厚度和密度，而 u_D 、 v_D 、 p_D 分别为板前空气的 x 向、 y 向的速度分量和压力。

1.4 空气来流

$$\begin{cases} u_\infty = D & \text{为空气来流的 } x \text{ 向速度分量} \\ v_\infty = 0 & \text{为空气来流的 } y \text{ 向速度分量} \\ p_\infty = p_a & \text{为空气压力} \\ \rho_\infty = \rho_a & \text{为 } // \text{ 密度} \end{cases} \quad (4)$$

式中： p_a 、 ρ_a 分别为静止空气的压力和密度。设 γ 为空气的绝热指数， $p_a = A_a \rho_a^\gamma$ ， $A_a = \text{const}$ ， $a_a^2 = \gamma p_a / \rho_a$ 。

2 问题的简化处理

2.1 板前的绕流问题

为了求出板前空气的压力 p_D ，必须求解板前的空气超音速绕流区的解，数值求解这个绕“凹壁”的超音速流动区域比较麻烦。为了方便起见，作者曾经取一个“平均”压力 \bar{p}_D 来代替 p_D [1]，即：

$$\text{令 } \bar{p}_D = p_D \quad (5)$$

\bar{p}_D 是这样计算的:根据实验测量和摄影,抛板形除开始一段(靠近B点)外基本平直,于是假定板和板前的激波都是直线,如图2.板与x轴的夹角 β_M ,取为该板在真空抛掷时的最大转角,于是按如下方程组便可求出板前所有的“平均”物理量。

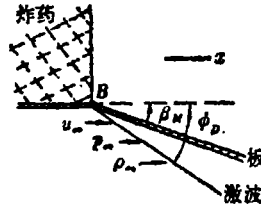


图 2

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{u}_D &= D - \frac{2}{\gamma+1} \frac{D^2 \sin^2 \phi_D - a_a^2}{D} \\ \bar{v}_D &= \frac{2}{\gamma+1} \cdot \text{ctg} \phi_D \cdot \frac{D^2 \sin^2 \phi_D - a_a^2}{D} \\ \bar{v}_D / \bar{u}_D &= \text{tg} \beta_M. \\ \bar{p}_D &= p_a + \frac{2}{\gamma+1} \rho_a (D^2 \sin^2 \phi_D - a_a^2) \end{aligned} \right. \quad (6)$$

若按上述方案,必须先做真空中二维抛板计算,这样做比较麻烦,也太不值得,因为尽管做了那样的复杂计算,却只取其中一个量——极限转角,即最大转角 β_M .在研究真空中二维抛板的计算数据时会发现单纯求真空中二维抛板的极限速度,完全可以利用修正的古尼公式:

$$v_g = \sqrt{\frac{D^2}{2(K^2-1)}} \cdot \sqrt{\frac{6R_b^2}{R_b^2+5R_b+4}} \quad (7)$$

式中:
$$R_b = \frac{2\rho_0 h_0}{\rho_* h_*}$$

按式(7)求出真空中抛板的极限速度 v_g 后,再利用抛掷中的泰勒公式(Taylor Formula):

$$v_g = 2D \cdot \sin \frac{\beta_M}{2} \quad (8)$$

便可求出最大转角 β_M .利用公式(6)和(7)给出的 β_M (简称公式值)与真空中二维抛板的数值计算值 β_M (简称计算值)基本相同,见表1.将 β_M 代入(6)式可求出空气压力 \bar{p}_D ,显然按 β_M 的计算值和公式值求得的 \bar{p}_D 基本相等。

表 1

R_0		0.330	0.857	1.318	1.714	2.505	3	6	10
β_M	计算值	4°52'	10°3'	13°12'	15°10'	18°12'	20°6'	25°14'	28°22'
	公式值	4°48'	10°3'	13°12'	15°22'	18°28'	20°	25°22'	28°37'

用上面提到的 \bar{p}_D 代替 p_D 是一种合理的近似,尽管在抛板的前段(靠近爆轰波阵面部分) \bar{p}_D 可能大于抛板各点上的真实压力 p_D ,可是在板的这一段爆轰产物的压力 $p \gg p_D$ (当然 $p \gg \bar{p}_D$),所以不会因 p_D 的不准确而对抛板速度产生什么影响;而在板的后一段, p_D 是起作用的,但这时板的转角已接近于 β_M ,因此用 \bar{p}_D 来近似 p_D 比较合理。

2.2 在拐角附近的流动问题

在图 1 所示的拐角 A 处爆轰产物与空气接壤，流动比较复杂。而数值计算又要求该点附近流动的解已知。根据决定此处流动的参量，可把该区流动看作为自模拟的。该区的流动分为三个区（如图 1）：Ⅰ区为压缩空气均匀流；Ⅱ区为爆轰产物均匀流；Ⅲ为中心稀疏波，介质为爆轰产物。

在Ⅰ区：

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = p_a + \frac{2}{\gamma+1} \rho_a (D^2 \sin^2 \phi_a - a_a^2) \\ \rho_1 = \frac{\rho_a}{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \frac{a_a^2}{D^2 \sin^2 \phi_a}} \\ u_1 = D - \frac{2}{\gamma+1} \frac{D^2 \sin^2 \phi_a - a_a^2}{D} \\ v_1 = \frac{2}{\gamma+1} \operatorname{ctg} \phi_a \cdot \frac{D^2 \sin^2 \phi_a - a_a^2}{D} \\ a_a^2 = \gamma p_a / \rho_a \end{array} \right. \quad (9)$$

式中： ϕ_a 为激波 $\overline{AA_0}$ 与 x 轴的夹角。

在Ⅱ区：

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_2 = \sqrt{\frac{K+1}{K-1}} \operatorname{tg}^{-1} \left(\sqrt{\frac{K-1}{K+1}} \operatorname{ctg} \alpha_2 \right) + \alpha_2 - \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{tg} \beta_2 = v_2 / u_2 \\ \operatorname{ctg} \alpha_2 = \sqrt{\frac{(K+1)(q_2^2 - a_H^2)}{(K+1)a_H^2 - (K-1)q_2^2}} \\ \frac{q_2^2}{2} + \frac{K\rho_2}{(K-1)\rho_2} = \frac{K+1}{2(K-1)} a_H^2 \\ q_2^2 = u_2^2 + v_2^2 \\ p_2 / \rho_2^K = p_H / \rho_H^K \\ a_H^2 = K p_H / \rho_H \end{array} \right. \quad (10)$$

在分界线 $\overline{AA_1}$ 上的条件：

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \beta_2 = v_2 / u_2 = v_1 / u_1 \\ p_1 = p_2 \end{array} \right. \quad (11)$$

将(9)、(10)、(11)式联立起来，便可求得区域Ⅰ和Ⅱ中的物理量；同时可求出激波 $\overline{AA_0}$ 的倾角 ϕ_a 、区域Ⅱ中流动的马赫角 α_2 、分界线 $\overline{AA_1}$ 与 x 轴的夹角 β_2 。由于 α_2 、 β_2 已知，便可求得Ⅲ区与Ⅱ区的分界线 $\overline{AA_2}$ 倾角 $\theta_2 = \beta_2 - \alpha_2$ 。

3 本简化模型包括了真空二维抛板模型

本简化模型与真空中二维抛板模型的不同之处有两点：①抛板运动方程(3)中多了 p_D ；②区Ⅲ的边界 $\overline{AA_2}$ 上 $p_2 \neq 0$ ， $\theta_2 \neq \left(\sqrt{\frac{K+1}{K-1}} - 1 \right) \frac{\pi}{2}$ 。

然而如果令 $\rho_a=0$, 则该模型便自动化为真空中二维抛板的理论模型。这是因为, 当 $\rho_a=0$ 时, $p_a=0$, 据(6)式和(5)式则得出 $\bar{p}_D=p_D=0$, 于是(3)式化成真空中抛板运动方程:

$$\begin{cases} -f''/[1+(f')^2]^{3/2} = \frac{p}{\rho_* h_* D^2} \\ f' = \frac{dy}{dx} = v/u \end{cases} \quad (12)$$

当 $\rho_a=0$ 时, 据(9)式则 $p_1=0, \rho_1=0$, 再据(11)式便得到在 $\overline{AA_1}$ 上 $p_2=0$, 因 I 区为均匀流, 所以在 $\overline{AA_2}$ 上: $p_2=0$. 而 $p_2=A\rho_2^K$, 则由(10)式推出:

$$\alpha_2=0, \beta_2=\left(\sqrt{\frac{K+1}{K-1}}-1\right)\frac{\pi}{2}$$

$$\text{即: } \theta_2=\beta_2-\alpha_2=\left(\sqrt{\frac{K+1}{K-1}}-1\right)\frac{\pi}{2} \quad (13)$$

式(13)和 $p_2=0$ 正是真空中二维抛板在拐角 A 处的真空边界上的条件。

4 部分计算结果

按上述方法作者做了计算, 计算中采用 $D=5400\text{m/s}$ 、 $K=3$ 、 $a_a=340\text{m/s}$ 、 $\gamma=1.4$ 、 $\rho_a=1.78\text{kg/m}^3$. 结果表明就抛板的“极限”速度 v_L^* 而言, 它同真空中抛板的极限速度 v_L 和按修正的古尼公式计算的 v_g 相差无几(见表 2); 尽管对空气的作用估计过高 (β^M 取得较大), 可是对抛板的极限速度只产生百分之几的影响。从而得出结论: 如果只求抛板的极限速度, 可以不考虑空气。

表 2

R_b	空气中 v_L^*/D	真空中 v_L/D	修正的古尼公式 v_g/D	相对差值 $(v_L^*-v_L)/v_L^*$
0.330	0.085	0.085	0.084	0.0%
0.857	0.172	0.175	0.174	-1.8%
1.318	0.225	0.230	0.230	-2.2%
1.714	0.258	0.264	0.267	-2.3%
2.505	0.309	0.316	0.321	-2.2%

本简化模型既可计及空气的影响; 又可转化为真空中二维抛板的理论模型, 所以说它是个具有较普遍意义的二维抛板理论模型。

参 考 文 献

- [1] 吕洪生. 在滑移爆轰波作用下二维金属平板抛板的理论计算. 国防科技大学学报, 1982, (1), 1~27

二维抛板极限速度的相似性 与古尼公式的采用

吕洪生 蒋伯诚 凌科良

(应用物理系)

摘要 本文分析影响被炸药驱动下抛板极限速度的重要因素, 讨论了一些经验公式的适用范围; 提出了根据二维抛板的数值计算得到的两个重要规律: ①在炸药与抛板的质量比相同的情况下, 抛板的极限速度之间具有一定的相似关系; ②修正的古尼公式可用来计算二维抛板的极限速度。

关键词 质量比, 热绝指数, 极限速度, 相似关系, 古尼公式

分类号 O382.1

炸药驱动下二维抛板的极限速度是一个非常重要的物理量, 要想准确地得到它必须进行复杂的二维数值计算。而实际应用中, 特别是在工程上, 迫切要求有个简单、准确、普适的计算公式。现存许多经验公式^[1]中, 最常用的公式有

$$v_e = 1.2D \left(\sqrt{1 + \frac{32}{27} R_b} - 1 \right) / \left(\sqrt{1 + \frac{32}{27} R_b} + 1 \right) \quad (1)$$

$$v_e = D \left(\sqrt{1 + \frac{32}{27} R_b} - 1 \right) / \left(\sqrt{1 + \frac{32}{27} R_b} + 1 \right) \quad (2)$$

技术报告 1988年9月29日收稿

A Simplized Model of Two-Dimensional Projected Plate in Air

Lü Hongsheng Ling Keliang

(Department of Applied Physics)

Abstract

In this paper, a simplified handling scheme with more general significance for the theoretical model of two-dimensional projected plate in air driven by explosive has been proposed.

Key words: shock wave, model, projected plate, corner, turn angle