国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第12卷第1期　1990年3月　Vol.12 No.1

二维离散映象的拓扑熵

刘伍明　　兰马羣
（蒙自师范专科学校）　（国防科技大学）

摘　要　本文计算了二维离散映象在经过倍周期分岔、同周期分岔到混沌时的拓扑熵，并得到这些映象通向混沌的各种道路和与其对应的拓扑熵之间的关系，揭示了拓扑熵与混沌之间的内在联系。

关键词　二维离散映象，拓扑熵
分类号　O411.1

二维离散映象可以从保守到耗散，从可逆到不可逆，提供了考察由此及彼过渡的可能性，在许多方面起到衔接一维到高维的作用。很多作者虽然对二维离散映象进行了各式各样的研究[1~7]，但当映象以各种不同道路通向混沌时，刻划映象混沌程度的拓扑熵如何变化却知道得很少。本文从拓扑熵的定义出发，对二维离散映象以各种分岔道路通向混沌时的拓扑熵进行计算，得到了这些映象通向混沌的各种道路和与其相对应的拓扑熵之间的关系，从而揭示了拓扑熵与混沌之间的内在联系。

1　拓扑熵的计算方法

拓扑熵是刻划映象混沌程度的数量之一，因此很多作者对各种映象的拓扑熵进行计算，但目前对各种映象的拓扑熵的研究是不充分的，计算方法也有待进一步完善。本文对二维离散映象以各种分岔道路通向混沌时的拓扑熵进行了计算。

设X是一个紧致的拓扑空间，$f: X\to X$为连续映象，令$f^{-1}(\alpha)=\{f^{-1}(A): A\in\alpha\}$，则定义$f$的拓扑熵为[8]：

$$h(f)=\sup_{\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N(\alpha \vee f^{-1}(\alpha)\vee\cdots\vee f^{-(n-1)}(\alpha)) \tag{1}$$

式中α是X的开复盖，$N(\alpha)$为α的子复盖的基数之最小者。对于紧致度量空间的连续自映象f，Bowen[9]得到$h(f)=h(f|\Omega(f))$，Ω称为该映象f的中心。对于任意$f\in C^{\circ}(f)$，Coven[10]等发现$h(f)=h(f|\overline{p(f)})$，$C^{\circ}(f)$表示$f$的所有连续自映象构成的集合，$\overline{p(f)}$为

研究简报　1988年9月14日收稿

f 的非游荡点集。

类似于一维非线性映象的情况，在二维离散映象中应存在由周期的倍分岔向混沌的过渡。以De Vogelaere映象为例，

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= -y_n + f(x_n, \mu) \\ y_{n+1} &= x_n - f(x_{n+1}, \mu) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

当$f(x)=x-\dfrac{\mu}{4\pi}\sin(2\pi x)$时，式(2)是标准映象的DV 形式。它有对称周期 2 轨 道$x_0=-x_1=\dfrac{\mu}{8\pi}\sin(2\pi x_0), y_0=y_1=0$. 当$\mu>\mu_1=5.0731177$时，周期 2 轨道失稳，出现的周期 4 轨道随着$\mu$的增大不断发生倍周期分岔。当$\mu=2(1+\pi^2)^{1/2}$时，新的稳定周期 2 轨道将发生倍周期分岔失稳。倍周期分岔是通向混沌的道路之一，也是目前研究得最细致的道路。根据BGMY定理[11]和MS定理[12]，对倍周期分岔$l\cdot 2^n(n=0,1,2,\cdots)$现象，当$l=1$和2、4、6、…、$2m$等偶数时，周期$l\cdot 2^n$可化为2的方幂，拓扑 熵 $h(f)=0$. 反之，存在处于混沌态的映象f，它的周期点的周期都是2的方幂。当$l=3$、5、7、…、$(2m+1)$等奇数时，$h(f)$的计算结果见表 1 .

表 1

l	n	$h(f)\geqslant$
3	0	$\log 2/3$
	1	$\log\lambda_3/2$
	2	$\log\lambda_3/4$
	…	…
	n	$\log\lambda_3/2n$
5	0	$\log 2/5$
	1	$\log\lambda_5/2$
	2	$\log\lambda_5/4$
	…	…
	n	$\log\lambda_5/2n$
	…	…
$2m+1$	0	$\log 2/(2m+1)$
	1	$\log\lambda_{2m+1}/2$
	2	$\log\lambda_{2m+1}/4$
	…	…
	n	$\log\lambda_{2m+1}/2n$

表 2

l	n	$l\cdot 2^n$	μ_n	分岔类型	$h(f)\geqslant$
1	0	1	4.0000000000000		0
	1	2	5.0731177277443	倍周期分岔	0
	2	4	5.1788343614925		0
	…	…	…		…
	1	2	6.2831853071796	同周期分岔	0
2	0	2	2.0000000000000		0
	1	4	2.2438711780000	倍周期分岔	0
	2	8	2.2637273324629		0
	…	…	…		…
	1	4	2.4761021509392	同周期分岔	0
3	0	3	1.5175481585463		$\log 2/3$
	1	6	1.6266714973424	倍周期分岔	$\log\lambda_3/2$
	2	12	1.6492800506462		$\log\lambda_3/4$
	…	…	…		…
	1	6	1.7510103179198	同周期分岔	$\log\lambda_3/2$

对于同周期分岔现象，设周期为$l\cdot 2^n$的倍周期轨道随参数μ变化过渡 到与 之相应的同周期分岔，后者的拓扑熵$h(f)$应等于对应倍周期分岔的拓扑熵。例如，对于标准映象的DV形式(式(2))，可知它有对应周期 2 轨道。当 $\mu=2\pi$ 时，$x_0=\pm\dfrac{1}{4}$，$x_1=\mp\dfrac{1}{4}$，$R_0=F_0\cdot F_1=f'(x_0)\cdot f'(x_1)=1$，$\dfrac{dR_0}{d\mu}=\dfrac{\pi}{4}>0$，因而将发生平行于$x$轴的同周期分岔。当

$\mu>2\pi$，分岔出来的两条椭圆型周期2轨道为$x_0=\pm\frac{1}{2\pi}\sin^{-1}\left(\frac{2\pi}{\mu}\right)$，$x_1=\mp\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2\pi}\cdot\sin^{-1}\left(\frac{2\pi}{\mu}\right)$，$y_0=y_1=0$，上、下各对应一条周期2轨道。由原周期2轨道的这两个不动点分出的这四个点构成了两个新的周期2轨道，出现同周期分岔现象。对于标准映象，同周期分岔现象是普遍存在的。拓扑熵的计算结果见表2。表中μ_n表示$l\cdot 2^n$的周期轨道刚开始失稳并产生周期为$l\cdot 2^{n+1}$的稳定轨道时的分岔点。

从表2知，无论由哪个倍周期轨道过渡到其同周期轨道，都满足其周期$l\cdot 2^n$轨道的余数$R=0$。当l一定时，对应n的不同值倍周期分岔都可能产生各自的同周期分岔。对于相同的l、n，由于参数μ的变化也产生与周期$l\cdot 2^n$一致的同周期分岔。

2 结果和讨论

由上述的计算可以发现，无论二维离散映象以倍周期道路还是以同周期道路通向混沌时，如果有周期点以非2的方幂为周期，则映象的拓扑熵大于零。否则，即映象的周期点的周期都是2的方幂，则拓扑熵为零。二维离散映象的拓扑熵满足下式：

$$h(f)\begin{cases}\geqslant\frac{1}{2n}\log\lambda_l & (n>0,\ l>1\text{的奇数})\\ \geqslant\frac{1}{l\cdot 2^n}\log 2 & (n=0,\ l>1\text{的奇数})\\ =0 & (n=0,1,2,\cdots;\ l=1\text{或}2,4,\cdots)\end{cases}\tag{3}$$

式中λ_l是多项式$x^l-2x^{l-2}-1$的最大实根。因此，对二维离散映象的计算虽然是以标准映象的DV形式为例，但无论哪一种映象，只要是以倍周期分岔→同周期分岔→倍周期分岔……的互相嵌套的方式过渡到混沌态，则上述结果均适用，因此，具有普适性。

Li和Yorke[13]指出：若映象$f\in C^0(f)$有以3为周期的周期点，则f是混沌的。Oono[14]将条件推广到只要$f\in C^0(f)$有周期点以非2的方幂为周期、f是混沌的情形。本文的计算结果也说明这一点：拓扑熵大于零的映象必定是混沌的。

在计算二维离散映象以倍周期分岔$l\cdot 2^n(l=1,2,4,\cdots)$道路通向混沌时得到映象的拓扑熵等于零，说明存在混沌的映象f，它的周期点的周期都是2的方幂。熊金诚[15]通过对一个反例的考察也得到这个结果：拓扑熵等于零的映象也可以处于混沌态。通常认为拓扑熵是刻划映象混沌程度的数量，然而这个结果却说明这种刻划是不够完全的，这导致了对映象混沌现象的本质作进一步探索的必要性。

参考文献

[1] Chirikov B V.Phys.Rep.1979;52:263
[2] Greene J M.J.Math, Phys.1979; 20:1183
[3] 刘军贤等. 物理学报，1988; 37:119
[4] Henon M,et al.Lecture Notes in Math.1975; 365:29; Commun, Math. Phys., 1976; 50:69

[5] Derrida B et al. Phys, Lett.1980; 80A: 217
[6] Zisook A B.Phys.Rev.,1981; 24A: 1640
[7] 汪秉宏. 物理学报, 1988; 37: 77
[8] Adler R L, Konheim A G, Meadrew M H.Trans.AMS, 1965; 114: 30
[9] Bowen R.Proc.Symp.Pure Math.1970; 14: 23
[10] Coven E, Hedlund G.Proc.AMS, 1980; 79: 316
[11] Block L, Guckenheimer J, Misuerwicz M, Young L.Lect.Notes Math.1980; 819: 18
[12] Misurewicz M, Szlenk W.Studia Math.1980; 67: 45
[13] Li T, Yorke J.Am.Math.Monthly 1975; 82: 985
[14] Oono Y.Prog.Thero, Phys., 1978; 59: 1028
[15] Xiong J.Acta Math.Scientic 1986; 6: 439

Topological Entropy in Two–Dimensional Dissipative Maps

Liu Wuming
(Mengzi Teachers Institute, Yunnan)
Lan Maqun
(National University of Defense Technology)

Abstract

In this paper, the topological entropy of two-dimensional dissipative maps from period doubling bifurcation or the same period bifurcation to chaos is calculated. The arbitrary relation of bifurcational routes in dissipative maps and topological entropy corresponding to these routes are found and the intrinsic relation between chaos and topological entropy is also revealed.

Key words: two-dimensional dissipative maps, topological entropy