

## 弹性贮液圆柱壳的动力特性分析

梁波

(航天技术系)

**摘要** 文中论述了一种贮液圆柱壳动力特性的分析计算方法,分析了弹性壳和液体之间的相互耦合作用。假设贮液满足速度势理论,对于圆柱壳采用有限元法计算其动能和应变能。采用这种方法,节点未知数数目远小于壳体和液体部分都采用有限元法时的节点未知数数目。

**关键词** 液体晃动,贮液圆柱壳,耦合振动

**分类号** V414, V434

确定贮液容器动力特性是地震工程、液体火箭和核工程的一项重要工作。早期对于贮液容器动力特性的分析,一般认为容器壁是刚性的,注意力放在液体的响应分析上。在五、六十年代,随着航天工程的发展,薄壁结构应用得越来越多,空间运载器燃料的晃动成为一个尖锐的问题,促使人们加强了对弹性容器固液耦合作用的研究<sup>[1]</sup>。液体晃动时产生的径向载荷作用于结构上,同时结构响应又影响液体晃动,这样形成了振动相互耦合的系统。问题的复杂性决定了获得解析解几乎是不可能的。随着数字计算机的发展,分析贮液容器动力特性的新的数值计算技术不断出现。

本文分析了各种参数下贮液圆柱壳的动力特性。根据各种方法的特点,本文对圆柱壳结构选用有限元法,壳内液体部分选用半解析解方法。这种方法的节点未知数数目远小于壳体结构和液体都用有限元分析情况下的节点未知数数目,且计算时内存少、速度快。由于圆柱型容器在工程中比较常用,所以选用圆柱壳贮箱作为研究的对象。

### 1 壳体与坐标系

图1为本文分析的液-壳耦合振动系统,壳体是半径为 $R$ 、高度为 $L$ 、壁厚为 $h$ 的薄壁圆柱壳,底部为刚性支持,圆柱壳内液体的高度为 $H$ 。

在图1所示的柱坐标系中,径向、环向和轴向坐标分别用 $r$ 、 $\theta$ 和 $z$ 表示,相应地,壳中面位移分量用 $W_s(z, \theta, t)$ 、 $V_s(z, \theta, t)$ 和 $U_s(z, \theta, t)$ 表示,用 $\zeta(z, r, \theta, t)$ 表示振动过程中液体自由表面离开静止表面而上升的高度。

## 2 圆柱壳内液体控制方程及速度势函数

对于不可压缩、无粘性、无旋液体, 速度势函数  $\phi(z, r, \theta, t)$  满足拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 \phi(z, r, \theta, t) = 0 \quad (1)$$

液体区域为

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq H$$

势函数  $\phi(z, r, \theta, t)$  除了要求是调和函数外, 还需满足液-壳耦合系统的边界条件:

$$(1) \text{ 对于无旋液体, 有 } \left. \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|_{\theta=0, \pi} = 0 \quad (2)$$

(2) 在刚性支持的圆柱壳底部, 有

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (3)$$

$$(3) \text{ 在壳壁与液体交界处, 径向速度连续, 即: } \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=R} = \dot{W}_s \quad (4)$$

$$(4) \text{ 在液体自由表面, 有: } \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=H} = \rho \quad (5)$$

用分离变量法求解拉普拉斯方程(1), 并考虑边界条件(2)~(5), 可得贮液圆柱壳内液体的速度势函数<sup>[2]</sup>:

$$\begin{aligned} \phi(z, r, \theta, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{on}(t) \left( \frac{r}{R} \right)^n + \sum_{i=1}^{\infty} \left[ A_{in}(t) I_n \left( \frac{\lambda_i r}{H} \right) \cos \left( \frac{\lambda_i z}{H} \right) \right] \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ B_{jn}(t) J_n \left( \frac{\varepsilon_{jn} r}{R} \right) \operatorname{ch} \left( \frac{\varepsilon_{jn} z}{R} \right) \right] \right\} \cos(n\theta) \quad (6) \end{aligned}$$

其中

$$\lambda_i = i\pi \quad (i=1, 2, \dots), \quad J'_n(\varepsilon_{jn}) = 0 \quad (n=1, 2, \dots; j=1, 2, \dots)$$

$$A_{on}(t) = \frac{R}{nH} \int_0^H \dot{W}_{ns}(z, t) dz \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$A_{in}(t) = \frac{2}{\lambda_i I'_n \left( \frac{\lambda_i R}{H} \right)} \int_0^H \dot{W}_{ns}(z, t) \cos \left( \frac{\lambda_i z}{H} \right) dz \quad (n, i=1, 2, \dots)$$

$$B_{jn}(t) = \frac{2 \int_0^R r \rho_n(r, t) J_n \left( \frac{\varepsilon_{jn} r}{R} \right) dr}{\varepsilon_{jn} R \operatorname{sh} \left( \frac{\varepsilon_{jn} H}{R} \right) \left( 1 - \frac{n^2}{\varepsilon_{jn}^2} \right) J_n^2(\varepsilon_{jn})} \quad (n=1, 2, \dots; j=1, 2, \dots)$$

$J_n(x)$  是第一类  $n$  阶贝塞尔函数,  $I_n(x)$  是变型  $n$  阶贝塞尔函数。

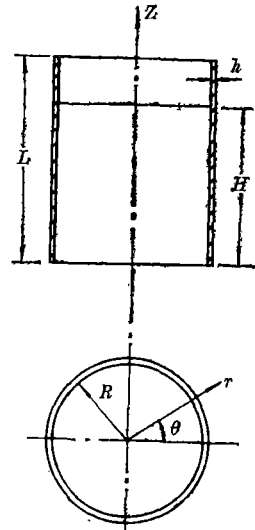


图 1

### 3 壳体有限元分析

假设壳体材料均匀、线弹性和各向同性，将圆柱壳离散为环形单元。

壳体运动的位移分量可分别表示为：

$$U_s(z, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{ns}(z, t) \cos(n\theta)$$

$$V_s(z, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_{ns}(z, t) \sin(n\theta)$$

$$W_s(z, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{ns}(z, t) \cos(n\theta)$$

其中， $U_{ns}(z, t)$ 和 $W_{ns}(z, t)$ 分别为轴向和径向位移在 $\theta=0$ 处的值， $V_{ns}(z, t)$ 为环向位移在 $\theta = \frac{\pi}{2n}$ 处的值。

位移函数可以利用适当的插值函数通过单元的节点位移表示，取二节点间轴向和环向位移线性变化，而径向位移按三次函数变化。

圆柱壳的动能：

$$T_s = \frac{1}{2} \rho_s R \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} (\dot{U}_s^2 + \dot{V}_s^2 + \dot{W}_s^2) d\eta d\theta dz \quad (7)$$

圆柱壳的应变能（包括拉伸和弯曲的影响）：

$$E_s = \frac{ER}{2(1-\nu^2)} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \varepsilon_z^2 + \varepsilon_\theta^2 + 2\nu \varepsilon_z \varepsilon_\theta + \frac{1-\nu}{2} r^2 \varepsilon_\theta^2 \right) d\eta d\theta dz \quad (8)$$

其中， $\rho_s$ 为壳体材料的密度， $E$ 为弹性模量， $\nu$ 为泊松比。

### 4 液体晃动分析

将液体自由表面分割为同心的环向单元，通过这种自由表面单元，可以利用单元节点位移表示自由表面的位移 $\zeta(r, \theta, t)$ ，如图2。

自由表面位移 $\zeta(r, \theta, t)$ 可表示为

$$\zeta(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(r, t) \cos(n\theta)$$

其中， $\zeta(r, t)$ 为位移函数在 $\theta=0$ 处的值，计算时假设单元节点的位移线性变化。

圆柱壳内液体运动的动能为

$$\begin{aligned} T_L &= \frac{1}{2} \rho_l \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R (\dot{U}_l^2 - \dot{V}_l^2 + \dot{W}_l^2) r dr d\theta dz \\ &= \frac{1}{2} \rho_l \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R \phi_{r=R} \dot{W}_s R d\theta dz + \frac{1}{2} \rho_l \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R \phi_{z=H} \dot{\zeta} r dr d\theta \end{aligned} \quad (9)$$

圆柱壳内液体的势能：

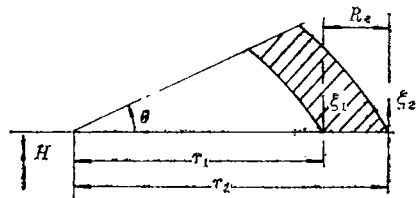


图 2

$$E_L = \frac{1}{2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho_l g \zeta^2 r d\theta dr \quad (10)$$

其中,  $\rho_l$  为液体的密度,  $g$  为重力加速度。

## 5 弹性壳和液体的耦合振动

当弹性壳振动和液体晃动同时存在时, 它们之间会产生相互耦合作用。

根据哈密顿原理:

$$\int_0^t \delta L dt = 0 \quad (11)$$

其中:  $L = (E_s + E_l) - (T_s + T_l)$

将式(7)~(10)代入方程(11)中, 得到液-壳耦合振动系统的控制方程:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}(t)\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}(t)\} = \{0\}$$

$$\text{其中, } [\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s + \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_2^T & \mathbf{M}_l \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_l \end{bmatrix}$$

质量矩阵 $[\mathbf{M}_s]$ 和刚度矩阵 $[\mathbf{K}_s]$ 为圆柱壳的贡献, 质量矩阵 $[\mathbf{M}_l]$ 和刚度矩阵 $[\mathbf{K}_l]$ 为液体晃动的贡献,  $[\mathbf{M}_1]$ 为液体随壳体振动时对系统的影响,  $[\mathbf{M}_2]$ 为液体晃动和圆柱壳振动相互作用对系统的影响, 具体表达式见文献<sup>[2]</sup>。

## 6 数值计算及结果分析

对液-壳耦合振动系统进行理论分析后, 我们在计算机上实现了计算固有频率和模态形状的程序。

圆柱壳的尺寸: 半径为18.3m, 高度为12.2m, 壁厚为 $2.54 \times 10^{-2}$ m, 密度为 $7.84 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , 泊松比为0.3, 弹性模量为 $2.067 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ 。

### 6.1 圆柱壳在贮满液体(水)的情况下的动力特性

水的密度为 $1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , 重力加速度为 $9.8 \text{ m/s}^2$ 。表1列出了空壳与贮液壳的固有频率, 液-壳系统的频率比空壳的频率低得多。

表1 空壳和贮液壳固有频率比较(Hz)

n	1		2		3		4	
	空壳	贮液壳	空壳	贮液壳	空壳	贮液壳	空壳	贮液壳
1	34.02	6.20	23.47	5.20	16.65	4.14	12.22	3.31
2	43.84	11.32	41.31	10.59	37.14	10.00	32.24	9.23
3	44.55	15.20	43.57	14.74	42.06	14.15	40.09	13.55
4	45.06	17.99	44.61	17.68	43.89	17.34	42.89	16.95

图3为空壳和贮液壳径向振型曲线, 其中 $m$ 为纵向波数,  $n$ 为环向波数。

## 6.2 圆柱壳在各种液面高度下的动力特性

表 2 部分贮液圆柱壳的固有频率(Hz)

液体所占的比例(%)	$n=1$			$n=4$		
	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=1$	$m=2$	$m=3$
100	6.20	11.32	15.30	3.31	9.23	13.55
80	7.25	13.00	17.24	4.35	10.95	15.63
60	8.81	15.52	20.34	5.91	13.12	17.94
50	9.94	17.41	22.41	7.01	14.31	18.53
40	11.54	19.98	25.43	8.47	15.02	19.82
20	18.39	31.51	34.59	11.77	18.39	30.49
0	34.02	43.84	44.55	12.22	32.24	40.09

表 2 所列的计算结果表明,在液-壳耦合振动系统中液体有重要作用。随着比值  $H/L$  的减小,系统的固有频率增加很快,也就是说,液体的多少直接影响到系统固有频率的

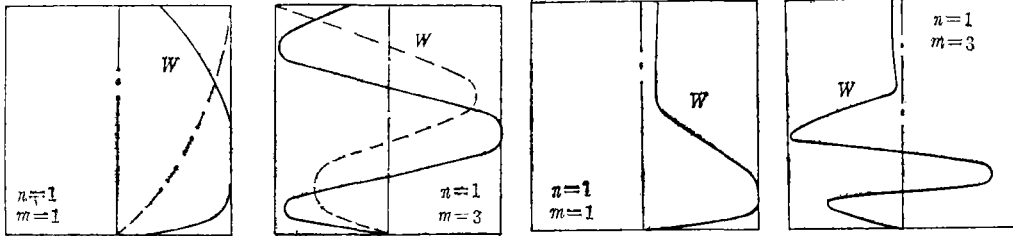


图 3

图 4

---空壳      -贮液

大小。因此在运载器秒状态不同时,必须注意液体燃料变化对系统动力特性的影响。

图 4 为  $H/L=0.5$  时液-壳耦合振动系统的振型,液体区域的径向位移比壳体其他区域的径向位移大得多。将图 4 与图 3 贮液壳情况比较,可看出:前者振型几乎是后者在液体区域内的压缩。

表 3 晃动频率 (Hz)

$n$	$\frac{H/L}{m}$	$H/L$				
		1.0	0.8	0.5	0.4	0.2
1	1	0.145	0.137	0.117	0.107	0.078
	2	0.269	0.268	0.261	0.254	0.210
2	1	0.200	0.196	0.178	0.167	0.126
	2	0.302	0.301	0.298	0.293	0.255
3	1	0.238	0.236	0.225	0.214	0.170
	2	0.330	0.329	0.328	0.325	0.293

## 6.3 液体晃动

表 3 为各种液面高度下液体的晃动频率,液体越少,晃动频率越低。

## 7 结 论

本文用有效的方法分析了底部刚性约束支持的薄壁圆柱型贮箱的自由振动问题,通过分析和计算,可以得到以下结论:

(1) 液体对圆柱壳固有频率具有降低作用, 这种降低作用是壳体和液体各种参数的函数, 它随着环向波数和轴向波数的增大而减小, 同时随 $H/L$ 和 $L/R$ 的增大而增大。

(2) 当液面高度增加时, 晃动频率增大; 当液面高度减小时, 晃动频率减小。

(3) 液体对模态形状影响较大, 模态形状随液面高度的变化而变化。

总之, 壳体内液体对薄壁圆柱壳的动力特性有很大影响。当液面高度变化时液体对圆柱壳的动力特性的影响尤其大。在工程分析和设计中我们必须加以重视。

### 致 谢

本文的工作得到了周科健教授的支持, 深表感谢。

### 参 考 文 献

- [1] Abramson H N. The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers with Applications to Space Vehicle Technology. NASA SP-106, 1966
- [2] 梁波. 弹性贮液容器的动力特性分析. 国防科技大学八八届硕士论文

## The Dynamic Characteristics Analysis of Flexible Liquid Storage Cylinder

Liang Bo

(Department of Aerospace Technology)

### Abstract

In this paper, a reliable and effective method for calculating the dynamic characteristics of fluid-filled cylindrical tanks is developed. And the effect of the coupling between liquid sloshing and shell vibration is considered. The liquid is assumed to follow the velocity potential theory, and the shell is modeled by the finite element method. In this approach, the number of unknowns is substantially less than those in analyses where both tank wall and liquid are subdivided into finite elements.

**Key Words:** liquid sloshing, fluid-filled cylindrical shell, coupling vibration