

# 梁、板非线性动力响应分析 的样条有限点法

王新立 张仁述

(航天技术系)

**摘要** 本文用样条有限点法分析梁和基于Berger假设的板的几何非线性动力响应, 推导了以样条结点参数表示的基本方程, 用wilson- $\theta$ 法求解动力增量方程, 求得挠度响应曲线。本文的方法与有限元法比较, 其计算时间省, 程序简单, 可在微机上计算。

**关键词** 振动, 几何非线性, 试函数, 响应

**分类号** O322

梁、板的非线性动力响应问题在细长结构和薄壁结构设计中经常遇到。目前国内外在解决这类问题时, 最常见的方法是有限元法。求解结构的非线性动力响应比较复杂, 主要表现在计算中要反复不断地计算非线性刚度矩阵和求解方程组, 工作量较大。为了解决这一问题, 本文提出用样条有限点法分析结构的非线性动力响应问题。该方法在静力和线性动力问题中已得到很好应用<sup>[3]</sup>, 但尚未应用于非线性动力问题。本文将样条有限点法推广应用到梁、板的非线性动力响应问题。样条有限点法采用  $B$  样条函数或  $B$  样条函数与某种满足几何边界条件的解析级数的乘积作为位移试函数, 经过变分建立起以样条结点参数表示的微分方程组, 且系数矩阵对称、正定、稀疏。与有限元法相比, 其精度更高, 计算量少, 程序简单。

## 1 梁非线性动力响应计算的样条有限点法

### 1.1 基本方程

设梁长为  $L$ , 横截面积为  $A$ , 梁中性轴上任一点的纵向位移为  $u(x, t)$ , 横向位移为  $W(x, t)$ , 大挠度时, 梁的应变能可写为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E I W_{xx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L E A \left( u_{,x} + \frac{1}{2} W_{,x}^2 \right)^2 dx \quad (1)$$

动能为:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A (u_{,t}^2 + W_{,t}^2) dx \quad (2)$$

式中  $E$  为弹性模量,  $I$  为横截面积的惯性矩,  $\rho$  为质量密度,  $A$  为横截面积。应用哈密

顿变分原理, 且略去中面内惯性可得:

$$N_x = EA \left( u_{,x} + \frac{1}{2} W_{,x}^2 \right) = N_x(t) \quad (3)$$

将(3)式沿全梁积分, 并设梁是均匀的, 且  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ , 得:

$$N_x = \frac{EA}{2L} \int_0^L W_{,x}^2 dx \quad (4)$$

这时梁的应变能可写为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI W_{,xx}^2 dx + \frac{N_x^2 L}{2EA} \quad (5)$$

设作用在梁上的横向载荷为  $q$ , 则虚位移原理的动力方程可写为

$$\begin{aligned} \int_0^L EI W_{,xx} \delta W_{,xx} dx + N_x \int_0^L W_{,x} \delta W_{,x} dx \\ + \int_0^L \rho A W_{,t,t} \delta W dx = \int_0^L q \delta W dx \end{aligned} \quad (6)$$

对图1的梁沿轴向  $N$  等分, 梁的横向挠度可用三次  $B$  样条函数逼近, 即取

$$W = \sum_{i=-1}^{N+1} \alpha_i \phi_i = [\phi] \{ \alpha \} \quad (7)$$

其中  $[\phi] = [\phi_{-1} \phi_0 \phi_1 \dots \phi_{N+1}]$ ,  $\{ \alpha \} = [\alpha_{-1} \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{N+1}]^T$ , 对应以下划分:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_N = L$$

$$x_i = x_0 + ih, \quad h = x_{i+1} - x_i = \frac{L}{N}$$

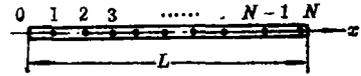


图 1

式中  $\alpha_i$  为待定参数,  $\phi_i$  是一组与三次  $B$  样条有关的基函数<sup>[3]</sup>。将(7)式代入(6)式消去  $\delta\{ \alpha \}^T$  得到:

$$\begin{aligned} \rho A \int_0^L [\phi]^T [\phi] dx \{ \alpha \} + EI \int_0^L [\phi'']^T [\phi''] dx \{ \alpha \} + N_x \int_0^L [\phi']^T [\phi'] dx \{ \alpha \} \\ = \int_0^L [\phi]^T q dx \end{aligned} \quad (8)$$

令:  $[m] = \rho A \int_0^L [\phi]^T [\phi] dx$ ,  $[K_0] = EI \int_0^L [\phi'']^T [\phi''] dx$

$$[K_\sigma] = \int_0^L [\phi']^T [\phi'] dx, \quad \{R\} = \int_0^L [\phi]^T q dx$$

注意到(4)式, 有:  $N_x = \frac{EA}{2L} \{ \alpha \}^T [k_\sigma] \{ \alpha \}$ , 所以非线性刚度矩阵为:

$$[K_{NL}] = N_x [K_\sigma] = \frac{EA}{2L} \{ \alpha \}^T [K_\sigma] \{ \alpha \} [K_\sigma] \quad (9)$$

这时(8)式可写为:

$$[m] \{ \alpha \} + ([K_0] + [K_{NL}]) \{ \alpha \} = \{R\} \quad (10)$$

以上各矩阵的积分根据文[3]中的方法立即可求得, 它们都是常数矩阵。具体形式见文[3]。从(9)式可见非线性刚度矩阵具有显式, 所以可直接对(10)式微分, 求动力增量方程和切线刚度矩阵。对(10)式微分有

$$[m]d\{\ddot{\alpha}\} + ([K_0] + [K_{NL}])d\{\alpha\} + d[K_{NL}]\{\alpha\} = d\{R\} \quad (11)$$

而由(9)式有

$$\begin{aligned} d[K_{NL}]\{\alpha\} &= dN_x[K_g]\{\alpha\} = \frac{EA}{L}[K_g]\{\alpha\}\{\alpha\}^T[K_g]d\{\alpha\} \\ &= [K_L]d\{\alpha\} \end{aligned}$$

因而  $[K_L] = \frac{EA}{L}[K_g]\{\alpha\}\{\alpha\}^T[K_g]$

令  $[K_t] = [K_0] + [K_{NL}] + [K_L]$ , (11)式可写成:

$$[m]d\{\ddot{\alpha}\} + [K_t]d\{\alpha\} = d\{R\} \quad (12)$$

式(12)为动力增量方程,  $[K_t]$ 为切线刚度矩阵。本文用wilson- $\theta$ 法求解(12)式, 具体解法见文[4]。

### 1.2 计算结果

本文就两端简支和两端固支梁受集中谐波激励的非线性响应进行了计算, 同时用有限元法以三次多项式插值进行了计算。所选参数如下:  $L=60\text{cm}$ ,  $A=1.0\text{cm}$ , 梁厚  $H=0.2\text{cm}$ ,  $\nu=0.3$ ,  $E=2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ ,  $\rho=7.8 \times 10^{-3} \text{kgs}^2/\text{cm}^4$ 。载荷情况: i) 两端简支,  $q=10\sin 5t$ ,  $q=10\sin 30t$ 。ii) 两端固支:  $q=10\sin 20t$ , 单位均为kg。本文给出了其中两个结果, 见图2、3。从图中可见, 两种方法结果一致, 所以在精度上样条有限点法完全可与有限元法媲美。但在计算时间上却远远少于有限元法, 现将两种方法所求解的方程组阶数和计算时间列表如表1、表2。

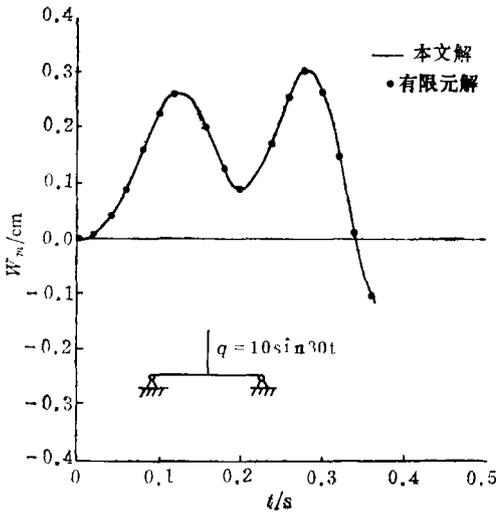


图 2

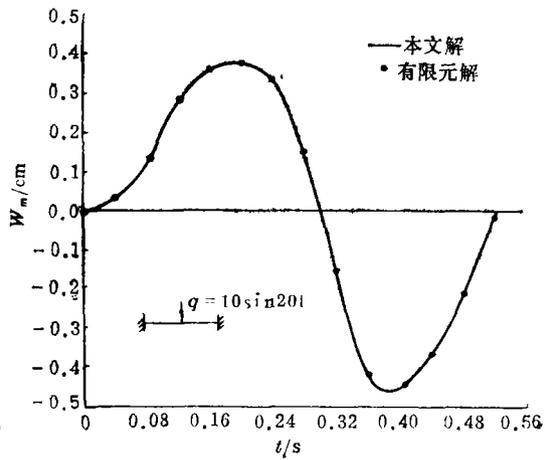


图 3

表 1

边条方法	自由-自由	简支-简支	固支-固支
样条有限点法	13	11	9
有限元法	22	20	18

表 2 (表中CPU时间均为DPS-6机上所得)

方法 边条与载荷	样条有限点法	有限元法
两端简支 $q=10\sin 30t$	137(s)	380(s)
两端简支 $q=10\sin 5t$	251(s)	750(s)
两端固支 $q=10\sin 20t$	102(s)	304(s)

从以上表可见, 样条有限点法求解的方程组阶数几乎是有限元法的1/2, 计算时间比有限元法省2/3. 可见在求解结构非线性动力响应方面, 样条有限点法经济、有效, 很有工程实用价值, 值得推广.

## 2 基于Berger假设的板非线性动力响应计算的样条有限点法

### 2.1 Berger 假设简述

设所研究平板满足Kirchoff假设. 板的应变能为:

$$U = \frac{1}{2} D \iint_A \left\{ (\nabla^2 W)^2 + \frac{12}{h^2} e_1^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{12}{h^2} e_2 + W_{,xx} W_{,yy} - W_{,xy}^2 \right] \right\} dx dy \quad (13)$$

$$T = \frac{1}{2} \rho h \iint_A (u_{,t}^2 + v_{,t}^2 + W_{,t}^2) dx dy \quad (14)$$

式中 $e_1, e_2$ 为板中面的第一和第二应变不变量. Berger于1955年提出在(13)式中略去 $e_2$ , 这样经哈密顿原理变分, 且略去中面内惯性, 得到

$$e = u_{,x} + v_{,y} + \frac{1}{2} W_{,x}^2 + \frac{1}{2} W_{,y}^2 = e(t) \quad (15)$$

将(15)式沿整个板积分, 且设在边界上 $u=v=0$ , 有:

$$e = \frac{1}{2A} \iint_A (W_{,x}^2 + W_{,y}^2) dx dy \quad (16)$$

式中 $A$ 为板面积. 经过Berger假设后, 板动力方程中只包含横向挠度 $W$ , 变量少了, 问题变得简单.

### 2.2 基本方程推导

经Berger假设后, 板的应变能可写为:

$$U = \frac{1}{2} D \iint_A \{ (\nabla^2 W)^2 - 2(1-\nu) [W_{,xx} W_{,yy} - W_{,xy}^2] \} dx dy + \frac{C}{2} e^2 A \quad (17)$$

$$\text{式中 } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad C = \frac{Eh}{1-\nu^2}$$

现设作用在板上的横向载荷为 $q$ , 则虚位移的动力方程为:

$$\begin{aligned} D \iint_A \{ (\nabla^2 W)(\delta W_{,xx} + \delta W_{,yy}) - (1-\nu)(W_{,xx} \delta W_{,x} + W_{,yy} \delta W_{,y} - 2W_{,xy} \delta W_{,xy}) \} dx dy + C e \iint_A (W_{,x} \delta W_{,x} + W_{,y} \delta W_{,y}) dx dy \\ + \iint_A \rho h W_{,tt} \delta W dx dy = \iint_A q \delta W dx dy \end{aligned} \quad (18)$$

选取位移试函数为以下形式:

$$W = [N] \{ \alpha \} \quad (19)$$

其中:  $[N] = [[\phi] Z_1 \quad [\phi] Z_2 \quad \dots \quad [\phi] Z_r]$

$$\{ \alpha \} = [\{\alpha\}_1^T \quad \{\alpha\}_2^T \quad \dots \quad \{\alpha\}_r^T]^T$$

$$\{\alpha\}_m = [\alpha_{-1} \quad \alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_{N+1}]^T \quad m=1, 2, \dots, r$$

$[\phi]$ 是以三次B样条基函数组成的行阵,  $Z_m$ 是梁的振型函数,

对于四边简支板, 取  $Z_m = \sin \frac{m\pi y}{b}$ ,  $m=1, 2, \dots, r$ . 对图示板,

沿板  $x$  方向用样条配点, 沿  $y$  方向用梁函数为形函数集。将

(19)式代入 (18)式得到:

$$[m]\{\ddot{\alpha}\} + ([K_0] + [K_{NL}])\{\alpha\} = \{P\} \quad (21)$$

$$[m] = \rho h \iint_A [N]^T [N] dx dy \quad (23)$$

$$[K_0] = D \iint_A \{ [N]^T_{,xx} [N]_{,xx} + [N]^T_{,yy} [N]_{,yy} + \nu ([N]^T_{,yy} [N]_{,xx} + [N]^T_{,xx} [N]_{,yy} + 2(1-\nu) [N]^T_{,xy} [N]_{,xy}) \} dx dy \quad (24)$$

$$[K_g] = \iint_A ([N]^T_{,x} [N]_{,x} + [N]^T_{,y} [N]_{,y}) dx dy \quad (25)$$

$$[K_{NL}] = \frac{C}{2A} \{\alpha\}^T [K_g] \{\alpha\} [K_g], \quad \{P\} = \iint_A [N]^T q dx dy \quad (26)$$

从上面式子可见, 板的非线性刚度矩阵具有和梁的非线性刚度矩阵相似的显式形式, 仍采用微分的方法求增量方程和切线刚度矩阵, 对(21)式微分得:

$$[m]d\{\ddot{\alpha}\} + [K]_t d\{\alpha\} = d\{P\} \quad (27)$$

$$[K]_t = [K_0] + [K_{NL}] + [K_L], \quad [K_L] = \frac{C}{A} [K_g] \{\alpha\} \{\alpha\}^T [K_g]$$

具体求法与梁的方法相同。

## 2 计算结果

本文对四边简支板在突加均布载荷下的动力响应进行了计算, 并与已有成果进行比较。所选参数如下:  $a=b=244\text{cm}$ ,  $h=0.635\text{cm}$ ,  $\rho=2.474 \times 10^{-5}\text{kg/cm}^3$ ,  $E=6.895 \times$

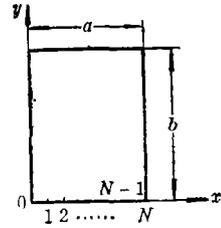


图 4

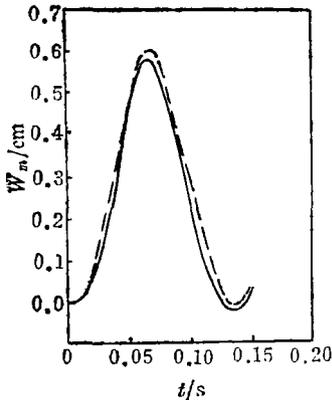


图 5

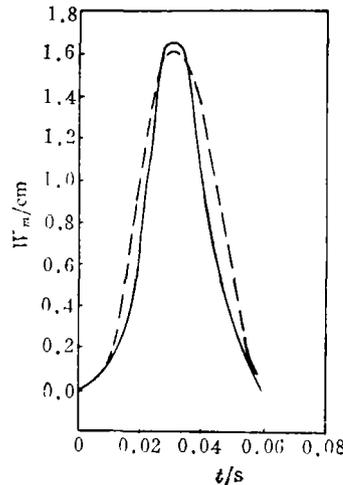


图 6

$10^6 \text{N/cm}^2$ ,  $\nu=0.23$ ,  $q_0=4.79 \times 10^{-3} \text{N/cm}^2$ . 求得板在  $q=q_0$ ,  $q=10q_0$  作用下, 板中点挠度曲线见图 5、6. 最大值分别为 0.587cm 和 1.677cm, 与文献[5]的结果比较, 误差仅为 1.7% 和 2.7%, 可见精度满足要求。

### 3 结束语

本文结果表明, 经过 Berger 假设后, 板的非线性动力响应问题变得象梁的响应问题一样简单, 加之采用了样条有限点法, 计算更简单, 可在微机上实现, 且精度满足要求。所以对工程问题, 采用本文的方法计算是有效可行的。

### 参 考 文 献

- [1] Burton T B and Zeller L D. Finite Element Analysis of Nonlinear Oscillation. Int. J. numer. Methods eng. 1985, 21(3)
- [2] Mei C. Finite Element Displacement Method for Large Amplitude Free Flexural Vibration of beams and plates. Comput. & Struct. 1973, 3
- [3] 秦荣. 结构力学的样条函数方法. 广西人民出版社, 1985
- [4] 张仁述. 非线性结构振动(讲义). 国防科技大学, 1986
- [5] Akay H U. Dynamic Large Deflection Analysis of Plate Using Mixed Finite Elements. Comput. & Struct. 1980, 11

## Spline Finite Point Method for the Analysis of Nonlinear Dynamic Response of Beams and Plates

Wang Xinli Zhang Renshu  
(Department of Aerospace Technology)

### Abstract

In this paper, the spline finite point method is presented for the geometrically nonlinear dynamic response of beams and plates based on Berger hypothesis. The essential equations in the spline finite point method are deduced and the incremental equations are solved by means of wilson- $\theta$  method. The results show that the method in this paper can save computation time and make program simpler. As compared with the finite element method, It can be easily carried out on personal computers.

**Key words:** vibration, geometric nonlinearity, test functions, response