国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第12卷第2期　1990年6月　Vol.12 No.2

椭圆弹道射程角和飞行时间公式的一种推导方法

牛　云
(89740部队)

摘　要　本文利用椭圆弹道长轴方向有一常量的性质，计算了被动段弹道的射程和飞行时间。

关键词　能量守恒，角动量守恒，被动段，射程角，飞行时间
分类号　V413.2

椭圆弹道是一个比较古老的问题，各种公式的表达形式比较多，如文[1]、[2]中就给出了射程及飞行时间的详细的公式。本文的目的在于：利用能量守恒、角动量守恒和椭圆弹道长轴方向有一常矢量来计算被动段的射程角和飞行时间。

1　基本假定

被动段指弹头分离到落地这一段弹道，它又可分为自由段与再入段。在自由段，弹头实际上只在地球引力作用下运动。在再入段，除引力外，还有空气动力作用于弹头。从确定发射的瞄准诸元出发，被动段弹道计算应具有相当高的精度，诸如地球自转、扁率、重力异常、再入大气扰动等因素都应当考虑。但是，在制导分析中，被动段弹道的计算目的是为评定制导方案而确定弹道的射程和横向偏差。因此可以不考虑与制导方案关系不大的因素，而假定地球是一个质量均匀分布的球体。整个被动段只存在指向地心的地球引力作用。在这种假定下，被动段弹道是相对于地心惯性参考系具有不变位置的平面椭圆弹道。

2　椭圆弹道的守恒量

在以地心为参考的惯性坐标系内研究弹头的质心运动，据力学定律，用极坐标表示的质心运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{fM}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{1}$$

式中$\boldsymbol{r}$是径矢，f是万有引力常数，M为地球质量。

1989年8月5日收稿

由于引力是保守力，故能量守恒。同时由于引力是中心力，故角动量守恒，且还存在一个矢量守恒，这个矢量叫偏心率矢量。

$$\frac{V^2}{2}-\frac{fM}{r}=E \tag{2}$$

$$Vr\cos\theta=h \tag{3}$$

$$fM\boldsymbol{r}/r-\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{h}=\boldsymbol{e} \tag{4}$$

其中$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V}$为单位质量的角动量，$\boldsymbol{e}$叫做偏心率矢量。

3 被动段弹道的射程角β

为了计算方便，我们这样来规定质点的坐标。径矢$\boldsymbol{r}$由地心指向质点，速度$\boldsymbol{V}$，以及$\boldsymbol{V}$与当地水平线之间的夹角θ，且规定速度在当地水平线上方时为正，反之为负。如图1所示：已知初始点的矢径$\boldsymbol{r}_o$、速度$\boldsymbol{V}_o$以及$\boldsymbol{V}_o$和当地水平线的夹角θ_o，OB为守恒矢量方向，R为地球半径，θ_F、V_F分别为终点的夹角和速度。

由守恒定律(4)，对初始点

$$fM\sin\beta_1=V_o^2r_o\cos\theta_o\sin(\theta_o+\beta_1)$$

即
$$\mathrm{tg}\beta_1=\frac{V_o^2r_o\sin\theta_o\cos\theta_o}{fM-V_o^2r_o\cos^2\theta_o} \tag{5}$$

导弹落点速度V_F和方向角θ_F由能量守恒和角动量守恒而得

$$V_F^2=V_o^2+2fM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_o}\right)$$

$$V_or_o\cos\theta_o=V_FR\cos\theta_F$$

和β_1一样有

$$\mathrm{tg}\beta_2=\frac{V_F^2R\sin|\theta_F|\cos\theta_F}{fM-V_F^2R\cos^2\theta_F} \tag{6}$$

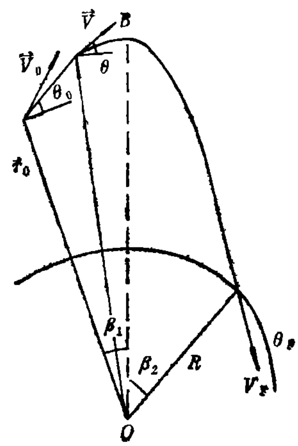

图 1

θ_F在终点为负值，故取绝对值。射程角$\beta=\beta_1+\beta_2$就得出了。

4 飞行时间t的求解

为了求飞行时间t，考虑

$$\mathrm{tg}\theta=r\dot{r}/h \tag{7}$$

对上面等式两边微分得

$$h\frac{d\mathrm{tg}\theta}{dt}=\dot{r}^2+r\ddot{r}=2E+\frac{fM}{r} \tag{8}$$

而从能量、角动量守恒定律有

$$r=-\frac{fM}{2E}\left(1+\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{f^2M^2\cos^2\theta}}\right) \tag{9}$$

我们选取r的一个大根，这是因为我们已考虑了实际的弹道。首先射程角小于或等于

π，射程角大于π是不符合现实的。真近点角f在$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$内。这样的选择避免了解的不唯一性。经过简单的数学运算

$$\mathrm{d}t=\frac{h}{2E}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{f^2M^2}+\frac{2Eh^2}{f^2M^2}\mathrm{tg}^2\theta}}\right)\mathrm{dtg}\theta \tag{10}$$

对上式积分，得

$$t=\frac{h}{2E}\left[\mathrm{tg}\theta+\frac{fM}{h\sqrt{-2E}}\mathrm{arc\ sin}\left(\frac{\mathrm{tg}\theta}{\sqrt{-1-\frac{f^2M^2}{2Eh^2}}}\right)\right]_{\theta_0}^{\theta} \tag{11}$$

由此可以看出，只要给某点的角度参数θ，则飞行时间t可由(11)式求出，问题得到解决。

本文在修改中得到有关同志的帮助，如角变量的选取，公式的适用范围等方面给予作者大力帮助，特此致谢。

参考文献

[1] 贾沛然，沈为异．弹道导弹弹道学．国防科学技术大学，1980年．5～42

[2] 张最良，谢可兴，张谦，林金．弹道导弹的制导与控制．国防科学技术大学，1981年．11～15

A Method for Deducing the Formulas of the Range Angle and the Flying Time with the Elliptical Orbit

Niu Yun

(89740 Unit)

Abstract

The range angle and the flying time for the passive section are calculated by using the quality with a constant vector in the direction of the major axis of the elliptical orbit in this paper.

Key words: energy conservation, angular momentum conservation, passive section, flying time, range angle