国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第12卷第2期 1990年6月 Vol.12 No.2

状态空间形式下的H^∞优化控制问题

刘 频 王正志 张良起
(自动控制系)

摘 要 本文给出了控制系统的 H^∞优化控制解的完全状态空间设计的方法。从普通控制系统出发，给出了一般非方4-块模型匹配问题的解。整个求解过程完全是在矩阵空间进行的。该方法便于计算机辅助设计，也便于系统的更进一步综合与分析。

关键词 线性系统，最优控制，H^∞控制理论
分类号 TP 13

1 引言及问题描述

自从Zames[1]的工作以来，关于线性系统设计反馈控制器使得特定的闭环传递函数的H^∞范数达到最小的问题已有许多的讨论（见Francis[2]及其它参考文献），特别是在频率域问题上已有许多结果（见[4]等）。本文旨在通过完全状态空间的设计来获得所需传递函数的H^∞范数指标达到次优的控制器。该设计方法较频率域法简单直观，尤其便于计算机辅助设计，从而亦便于系统的更进一步综合与分析。

考虑由下面的方程描述的系统：

$$\dot{X}(t)=AX(t)+B_1\omega(t)+B_2U(t) \tag{1a}$$

$$Z(t)=C_1X(t)+D_{11}\omega(t)+D_{12}U(t) \tag{1b}$$

$$Y(t)=C_2X(t)+D_{21}\omega(t)+D_{22}U(t) \tag{1c}$$

其中$\omega(t)\in R^{m_1}$为干扰矢量，$U(t)\in R^{m_2}$为内部控制矢量，$Z(t)\in R^{p_1}$为误差矢量，$Y(t)\in R^{p_2}$为观测矢量，$X(t)\in R^n$为状态矢量。整体系统的传递函数为：

$$P(s)\begin{bmatrix}P_{11}(s) & P_{12}(s)\\ P_{21}(s) & P_{22}(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_{11} & D_{12}\\ D_{21} & D_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}(sI-A)^{-1}[B_1\ \ B_2] \tag{2}$$

我们要求设计一个具有传递函数$K(s)$的线性反馈控制器：$U=K(s)Y$，使得整个闭环系统为内部稳定的，同时使得由ω到Z的闭环系统的传递函数$\Gamma_1(P,K)$的H^∞范数为μ次优的（见图1），即

$$\|\Gamma_1(P,K)\|_\infty<\mu' \tag{3}$$

这里$\mu'\geqslant\min\|\Gamma_1(P,K)\|_\infty$。

1989年9月27日收稿

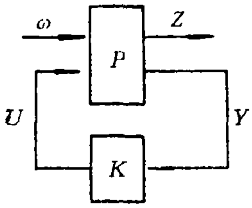

图 1　标准问题

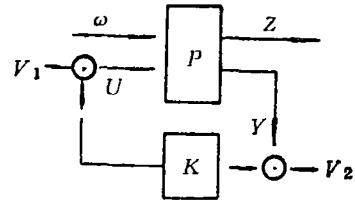

图 2　稳定性定义

这里的所谓内部稳定是这样定义的：在图1中引入两个外部输入v_1,v_2，如图2所示。显然从三个输入ω,v_1,v_2到三个输出Z,U,Y的九个传递函数是存在且适宜的。若这些传递函数均属于H^∞，则称图1中的控制器K使整个闭环系统内部稳定。

由系统(1)及(2)与$K(s)$的定义易得：

$$\Gamma_1(P,K)=P_{11}+P_{12}K(I-P_{22}K)^{-1}P_{21} \tag{4}$$

其中$(I-P_{22}K)$的逆的存在性是显然的，只需假设$D_{22}=0$，即P_{22}为严格适宜的即可。本文以下部分均假设条件$D_{22}=0$成立，即可观测输出中不显含内部输入矢量的线性组合。对$D_{22}\neq0$的情况我们将在文末进行讨论。在系统(1)中，当D_{12}与D_{21}为方阵时，我们已获得H^∞次优控制器的完全状态空间设计方法[6]。本文将讨论D_{12}与D_{21}均非方阵的情况。

2　定义、假设及问题转换

定义 1　矩阵对(A,B)称为可稳的，若存在矩阵F使得$A+BF$为稳定的。对应地，若存在矩阵H使得$A+HC$为稳定的，则称矩阵对(C,A)为可检测的。

假设(a)　在系统(1)中，(A,B_2)为可稳的，(C_2,A)为可检测的。

定理 1　设假设(a)成立，即存在矩阵F，H使得$A+B_2F$，$A+HC_2$均为稳定的。定义下面的传递函数阵：

$$N_2(s)=C_2(sI-A-B_2F)^{-1}B_2 \qquad M_2(s)=I+F(sI-A-B_2F)^{-1}B_2 \tag{5a}$$

$$N_2'(s)=C_2(sI-A-HC_2)^{-1}B_2 \qquad M_2'(s)=I+C_2(sI-A-HC_2)^{-1}H \tag{5b}$$

$$X_2(s)=I-C_2(sI-A-B_2F)^{-1}H \qquad Y_2(s)=-F(sI-A-B_2F)^{-1}H \tag{5c}$$

$$X_2'(s)=I-F(sI-A-HC_2)^{-1}B_2 \qquad Y_2'(s)=-F(sI-A-HC_2)^{-1}H \tag{5d}$$

则：(1)(5)中所有传递函数矩阵为稳定的；(2)$M_2(s)$与$M_2'(s)$均为非奇异的；

(3)$P_{22}(s)=N_2(s)M_2^{-1}(s)=M_2'^{-1}(s)N_2'(s)$；

$$(4)\begin{bmatrix} X_2' & -Y_2' \\ -N_2' & M_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_2 & Y_2 \\ N_2 & X_2 \end{bmatrix}=I \tag{6}$$

命题 1　定义函数阵

$$T_1=P_{11}+P_{12}Y_2M_2'P_{21} \tag{7a}$$

$$T_2=-P_{12}M_2 \tag{7b}$$

$$T_3=M_2'P_{21} \tag{7c}$$

则T_i $(i=1,2,3)$均为稳定的。其中Y_2,M_2,M_2'为定理1公式(5)所定义。

由前一部分工作知[6]，T_i $(i=1,2,3)$的实现分别可以表达为：

$$T_2(s)=-P_{12}M_2\sim\left[\begin{array}{c|c}A+B_2F & -B_2\\\hline C_1+D_{12}F & -D_{12}\end{array}\right] \tag{8a}$$

$$T_3(s)=M_2'P_{21}\sim\left[\begin{array}{c|c}A+HC_2 & HD_{21}+B_1\\\hline C_2 & D_{21}\end{array}\right] \tag{8b}$$

$$T_1(s)\sim\left[\begin{array}{cc|c}A+B_2F & -HC_2 & -HD_{21}\\ 0 & A+HC_2 & HD_{21}+B_1\\\hline C_1+D_{12}F & C_1 & D_{11}\end{array}\right] \tag{8c}$$

定理 2 所有使得图2所示整体闭环系统内部稳定的适宜传递函数阵$K(S)$均可表达为：

$$K(s)=(Y_2-M_2Q)(X_2-N_2Q)^{-1} \tag{9}$$

$$=(X_2'-QN_2')^{-1}(Y_2'-QM_2')\quad Q\in RH^\infty \tag{10}$$

命题 2 第1节所描述的问题(3)等价为：对应于传递函数$T_i\in RH^\infty,i=1,2,3$,寻找$Q\in RH^\infty$，使得

$$\|T_1+T_2QT_3\|_\infty<\mu' \tag{11}$$

以上定理及命题的证明见[6]。其中$T_i,i=1,2,3$与(3)式中的$P(s)$由(7)式相联系。(11)式即为一标准的插值问题。

3 4-Block实现

在上一篇文章中，我们已经解决了D_{12}与D_{21}均为方阵的问题，即1—Block问题。本文讨论另一种情况，即D_{12}与D_{21}均非方阵的情况。设$m_2<p_1,m_1>p_2$，且D_{12}为列满秩，D_{21}为行满秩。此时，存在可逆方阵D_{12}^+,D_{21}^+分别使得

$$D_{12}^+D_{12}=[I\ 0]^*,\qquad D_{21}D_{21}^+=[I\ \ 0]$$

令$B_1^!=B_1D_{21}^+=[B_{11}\ \ B_{12}],C_1^!=D_{12}^+C_1=\begin{bmatrix}C_{11}\\C_{21}\end{bmatrix}$，$D_{11}^!=D_{21}^+D_{11}D_{12}^+=\begin{bmatrix}d_{11}&d_{12}\\d_{21}&d_{22}\end{bmatrix}$，则问题(11)等价于：

$$\|T_1'+T_2'QT_3'\|_\infty<\mu\qquad Q\in RH_\infty \tag{12}$$

其中

$$T_1'\sim\left[\begin{array}{cc|cc}A+B_2F & -HC_2 & -H & 0\\ 0 & A+HC_2 & H+B_{11} & B_{12}\\\hline C_{11}+F & C_{11} & d_{11} & d_{12}\\ C_{21} & C_{21} & d_{21} & d_{22}\end{array}\right]$$

$$T_2'\sim\left[\begin{array}{c|c}A+B_2F & -B_2\\\hline C_{11}+F & -I\\ C_{21} & 0\end{array}\right]$$

$$T_3'\sim\left[\begin{array}{c|cc}A+HC_2 & H+B_{11} & B_{12}\\\hline C_2 & I & 0\end{array}\right]$$

假设(b) 矩阵$(A-B_2C_{11})$与$(A-B_{11}C_2)$在虚轴上均无谱分布。

引理 1 若假设(a)、(b)均成立，则下面具有稳定边界条件的代数Riccati方程分别有对称解X，Y：

$$\begin{cases}(A-B_2C_{11})^*X+X(A-B_2C_{11})-XB_2B_2^*X+C_{21}^*C_{21}=0\\ \sigma(A-B_2C_{11}-B_2B_2^*X)\propto LHP\end{cases}\tag{13}$$

$$\begin{cases}A-B_{11}C_2)Y+Y(A-B_{11}C_2)^*-YC_2^*C_2Y+B_{12}B_{22}^*=0\\ \sigma(A-B_{11}C_2-YC_2^*C_2)\propto LHP\end{cases}\tag{14}$$

构造实现$U(S)$,$V(S)$分别为：

$$U(S)\sim\left[\begin{array}{c|cc}A+B_2F & -B_2 & X^+C_{21}^*\\ \hline C_{11}+F & -I & 0\\ C_{21} & 0 & -I\end{array}\right],\quad V(S)\sim\left[\begin{array}{c|cc}A+HC_2 & H+B_{11} & B_{12}\\ \hline C_2 & I & 0\\ B_{12}^*Y^* & 0 & I\end{array}\right]\tag{15}$$

其中$F=-B_2^*X-C_{11}$，$H=-YC_2^*-B_{11}$，而X^+，Y^+分别为X与Y的广义逆：$X^+X=I,YY^+=I$. 则$U(S)$、$V(S)$分别满足$U(S)^*U(S)=I,V(S)V(S)^*=I$，且$T_2'(S)=U(S)[I\quad 0]^T,T_3'(S)=[I\quad 0]V(S)$.

证明 由假设(a)易知，$(A-B_2C_{11},\ -B_2B_2^*)$为可稳的，$(A-B_{11}C_2,\ -C_2^*C_2)$为可检测的，而$-B_2B_2^*$与$-C_2^*C_2$显然为半负定的。再由假设(b)知(13)、(14)分别有对称解X、Y，且分别满足各自的稳定边界条件[5]。定义F、H如上，则$A+B_2F$与$A+HC_2$均为稳定的。我们给定此处的F、H即为§2中的F、H. 本引理的第二部分可验证得之。

由于$U(S)$与$V(S)$均为内在的方阵，故有

$$\begin{aligned}\|T_1'+T_2'QT_3'\|_\infty&=\|T_1'+U(S)[I\quad 0]^*Q[I\quad 0]V(S)\|_\infty\\ &=\|T+[I\quad 0]^*Q[I\quad 0]\|_\infty\end{aligned}\tag{17}$$

其中$T=U^*(s)T_1'V^*(s)=\{T_{ij}\}$. 至此我们将问题(12)等价变换为一4-Block问题：

$$\left\|\begin{matrix}T_{11}+Q & T_{12}\\ T_{21} & T_{22}\end{matrix}\right\|_\infty<\mu\qquad Q\in RH_\infty\tag{18}$$

且

$$T\sim\left(\begin{array}{cc|cc}(A+B_2F)^* & \begin{matrix}XB_2(d_{12}B_{12}^*+C_{11}Y-d_{11}C_2Y)\\ +C_{21}^*(d_{21}C_2Y-C_{21}Y-d_{22}B_{12}^*)\end{matrix} & \begin{matrix}C_{21}^*d_{21}-X(H\\ +B_2d_{11})\end{matrix} & \begin{matrix}C_{21}^*d_{22}\\ -XB_2d_{12}\end{matrix}\\ 0 & -(A+HC_2)^* & C_2^* & -Y^+B_{12}\\ \hline B_2^* & d_{12}B_{12}^*-d_{11}C_2Y+C_{11}Y & -d_{11} & -d_{12}\\ -C_{21}X^+ & d_{22}B_{12}^*-d_{21}C_2Y+C_{21}Y & -d_{21} & -d_{22}\end{array}\right)$$

$$=\left[\begin{array}{c|cc}A_t & B_{t1} & B_{t2}\\ \hline C_{t1} & -d_{11} & -d_{12}\\ C_{t2} & -d_{21} & -d_{22}\end{array}\right]\tag{19}$$

引理 2 文[7]满足(18)式的所有解 $E=T+\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 具有形式：

$$E=[\theta_{11}G+\theta_{12},\theta_{13}][\theta_{21}G+\theta_{22},\theta_{23}]^{-1} \qquad (\|G\|_\infty\leqslant 1) \tag{20}$$

其中$G(S)$为稳定收敛的有理函数阵，$\theta(s)=\{\theta_{11}\}$满足下面的性质：

$$\theta(s)=\begin{bmatrix}\theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13}\\ \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23}\end{bmatrix}=L\begin{bmatrix}I & 0\\ -W_{22}^{-1}W_{21} & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z_1^{-1} & 0\\ 0 & Z_4^{-1}\end{bmatrix} \tag{21}$$

(1) $L=\begin{bmatrix}I & T\\ 0 & I\end{bmatrix}$； (2) $W=L^*J_\mu L=\begin{bmatrix}W_{11} & W_{12}\\ W_{21} & W_{22}\end{bmatrix}$；

(3) $V=W_{11}-W_{12}W_{22}^{-1}W_{21}$； (4) $W_{22}=-Z_4^*Z_4$， $Z_4^{\pm1}\in L_\infty$；

(5) $V=Z_1^*J_1Z_1$； $Z_1^{\pm1}\in H_\infty$ (22)

引理 3 文[7]令

$$\Pi=\begin{bmatrix}T_{12}\\ T_{22}\end{bmatrix}[T_{12}^*\ T_{22}^*]-\mu^2I, \qquad \theta'=\begin{bmatrix}\theta_{11} & \theta_{12}\\ \theta_{21} & \theta_{22}\end{bmatrix}$$

则$\Pi^{\pm1}\in L_\infty$，Π在虚轴上小于零，且$\theta'Z_1$与V可以表示为：

$$\theta'Z_1=-\begin{bmatrix}\mu^2I & 0\\ 0 & \mu^2I\\ 0 & 0\\ T_{12}^* & T_{22}^*\end{bmatrix}\Pi^{-1}\begin{bmatrix}I & T_{11}\\ 0 & T_{21}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & I\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{23}$$

$$V=-\mu^2\left\{\begin{bmatrix}I & 0\\ T_{11}^* & T_{21}^*\end{bmatrix}\Pi^{-1}\begin{bmatrix}I & T_{11}\\ 0 & T_{21}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\right\} \tag{24}$$

记

$$D_{t1}=\begin{bmatrix}-d_{11}\\ -d_{21}\end{bmatrix},\ D_{t2}=\begin{bmatrix}-d_{12}\\ -d_{22}\end{bmatrix},\ C_t=\begin{bmatrix}C_{t1}\\ C_{t2}\end{bmatrix},\ D_t=\mu^2I-D_{t2}D_{t2}^*,\ D_1=\begin{bmatrix}I_{n2}\\ 0\end{bmatrix}$$

易知D_t为可逆的对称阵，且$D_t>0$. 给出其分解$D_t=d_t^*d_t$，其中方阵$d_t>0$.

假设(c) 在系统(1)中，设矩阵$A_t'=A_t+B_{t2}D_{t2}^*D_t^{-1}C_t$在虚轴上无谱分布，这里的恒等式各项由前面所定义。

假设(d) (C_t,A_t)为可检测的。

引理 4 若假设(c)与(d)均成立，则满足稳定边界条件的Riccati方程：

$$\begin{cases}PC_t^*D_t^{-1}C_tP-A_t'P-PA_t'^*+B_{t2}(D_{t2}^*D_t^{-1}D_{t2}+I)B_{t2}^*=0\\ \sigma(A_t'-PC_t^*D_t^{-1}C_t)\propto LHP\end{cases} \tag{25}$$

有唯一自共轭解P. 更进一步地，设$A'=A_t'-PC_t^*D_t^{-1}C_t$，$H_1=C_tP-D_{t2}B_{t2}^*$，则V$(S)$具有实现：

$$V\sim\left[\begin{array}{cc|cc}-A'^* & \mu^2C_t^*D_t^{-1}C_t & \mu^2C_t^*D_t^{-1}D_I & \mu^2C_t^*D_t^{-1}D_{t1}\\ 0 & A' & -H_1^*D_t^{-1}D_I & B_{t1}-H_1^*D_t^{-1}D_{t1}\\ \hline D_1^*D_t^{-1}H_1 & \mu^2D_1^*D_t^{-1}C_t & \mu^2D_I^*D_t^{-1}D_I & \mu^2D_I^*D_t^{-1}D_{t1}\\ D_{t1}^*D_t^{-1}H_1-B_{t1}^* & \mu^2D_{t1}^*D_t^{-1}C_t & \mu^2D_{t1}^*D_t^{-1}D_1 & \mu^2D_{t1}^*D_t^{-1}D_{t1}-\mu^2I\end{array}\right] \tag{26}$$

证明 Riccati方程(25)的解的存在与唯一性的证明类似于文献[6]中的引理2. 而Π具有实现：

$$\Pi \sim \left[\begin{array}{cc|c} A_t & -B_{t2}B_{t2}^* & B_{t2}D_{t2}^* \\ 0 & -A_t^* & C_{t}^{*} \\ \hline C_t & -D_{t2}B_{t2}^* & -D_t \end{array}\right] \tag{27}$$

构造实现

$$M(S) \sim \left[\begin{array}{c|c} -A_t^* & -C_t^* \\ \hline d_t^{*-1}H_1 & d_t \end{array}\right]$$

则有

$$M^*(S)M(S) \sim \left[\begin{array}{cc|c} A_t & H_1^*D_t^{-1}H_1 & H_1^* \\ 0 & -A_t^* & -C_t^* \\ \hline C_t & H_1 & D_t \end{array}\right]$$

利用 Riccati 方程(25)进行相似变换即可得知 $-M^*(S)M(S)=\Pi$. 令

$$Y=\mu M^{*-1}\begin{bmatrix} I & T_{11} \\ 0 & T_{21} \end{bmatrix}$$

则由(24)式易得

$$V=Y^*Y-\mu^2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{28}$$

而

$$\mu M^{*-1}(S) \sim \left[\begin{array}{c|c} A_t-H_1^*D_t^{-1}C_t & -H_1^*D_t^{-1} \\ \hline \mu d_t^{*-1}C_t & \mu d_t^{*-1} \end{array}\right]$$

故

$$Y \sim \left[\begin{array}{c|cc} A' & -H_1^*D_t^{-1}D_I & B_{t1}-H_1^*D_t^{-1}D_{t1} \\ \hline \mu d_t^{*-1}C_t & \mu d_t^{*-1}D_I & \mu d_t^{*-1}D_{t1} \end{array}\right]$$

将上式代入(28)式即得(26)式。

在进行下一步之前，我们要作一个假设。首先，由于 D_t^{-1} 为一对称正定阵，故可将其表达为：$D_t^{-1}=\Lambda\Lambda^*$，其中$\Lambda$为对角线元素均为正实数的下三角矩阵：

$$\Lambda=\begin{bmatrix} q_1^* & 0 \\ q_3^* & q_2^* \end{bmatrix}$$

其中$q_1>0\in R^{n2\times n2}$, $q_2>0\in R^{(p1-n2)\times(p1-n2)}$, $q_3\in R^{n2\times(p1-n2)}$，同时，令

$$b=[q_1 \quad q_3], \qquad g=b^*b-D_t^{-1}$$

假设(e) 矩阵$(I+D_{t1}^*gD_{t1})$正定。

引理 5 若假设(e)成立且麦克米兰度$\delta(V)=4n$，则满足稳定边界条件的 Riccati 方程有唯一自共轭解R：

$$\begin{cases} RUR+RA_1+A_1^*R-N=0 \\ \sigma(A_1+UR)\propto LHP \end{cases} \tag{29}$$

其中$A_1=A_t+H_1^*gC_t-H_2^*(a^*a)^{-1}\beta C_t$, $\qquad N=\mu^2C_t^*[\beta^*(a^*a)^{-1}\beta-g]C_t$

$U=\mu^{-2}[H_1^*b^*bH_1-H_2^*(a^*a)^{-1}H_2]$, $\qquad H_2=B_{t1}^*+\beta H_1$

$$\beta=D_{t1}^{*}g,\qquad a^{*}a=I+D_{t1}^{*}gD_{t1},\qquad (det(a)\neq 0)$$

更进一步地，由下面定义的矩阵传递函数$Z_1(S)$：

$$Z_1(S)\sim\left[\begin{array}{c|cc} A' & -H_1^{*}b^{*}q_1 & B_{t1}-H_1^{*}D_t^{-1}D_{t1} \\ \hline \mu^{-1}bH_1R+\mu bC_t & \mu q_1 & \mu bD_{t1} \\ \mu^{-1}a^{*-1}H_2R+\mu a^{*-1}\beta C_t & 0 & \mu a \end{array}\right] \tag{30}$$

及其逆均为稳定适宜的，且$V(S)=Z_1^{*}J_1Z_1$.

该引理的证明完全类似于文献[6]中引理3之证明。

综合上面的讨论，我们得到$\theta'(s)$的状态空间表达式：

定理 3 对于系统(1)，若假设(a)～(e)均成立，则(21)式中的矩阵函数$\theta'(s)$具有实现：

$$\theta'\sim\left(\begin{array}{cc|cc} -A'^{*} & C_t^{*}H_4-C_t^{*}\beta^{*}(a^{*}a)^{-1}H_3-C_t^{*}D_t^{-1}C_t & \mu^{-1}C_t^{*}b^{*} & -\mu^{-1}C_t^{*}\beta^{*}a^{-1} \\ 0 & A_1+UR & \mu^{-1}H_1^{*}b^{*} & -\mu^{-1}H_2^{*}a^{-1} \\ \hline \mu^2D_t^{-1}H_1 & \mu^2H_4-\mu^2\beta^{*}(a^{*}a)^{-1}H_3-\mu^2D_t^{-1}C_t & \mu b^{*} & -\mu\beta^{*}a^{-1} \\ 0 & (a^{*}a)^{-1}H_3 & 0 & \mu^{-1}a^{-1} \\ D_{t2}^{*}D_t^{-1}H_1-B_{t2}^{*} & D_{t2}^{*}H-D_{t2}^{*}\beta^{*}(a^{*}a)^{-1}H_3-D_{t2}^{*}D_t^{-1}C_t & \mu^{-1}D_{t2}^{*}b^{*} & -\mu^{-1}D_{t2}^{*}\beta^{*}a^{-1} \end{array}\right) \tag{31}$$

其中$H_3=\mu^{-2}H_2R+\beta C_t$，$H_4=b^{*}b(\mu^{-2}H_1R+C_t)$。

证明 由(19)式与(27)式得

$$\begin{bmatrix} \mu^2I & 0 \\ 0 & \mu^2I \\ 0 & 0 \\ T_{12}^{*} & T_{22}^{*} \end{bmatrix}\sim\left(\begin{array}{c|cc} -A_t^{*} & C_{t1}^{*} & C_{t2}^{*} \\ \hline 0 & \mu^2I & 0 \\ 0 & 0 & \mu^2I \\ 0 & 0 & 0 \\ -B_{t2}^{*} & -d_{12}^{*} & -d_{22}^{*} \end{array}\right)$$

$$-\Pi^{-1}\begin{bmatrix} I & T_{11} \\ 0 & T_{21} \end{bmatrix}\sim\left[\begin{array}{cc|cc} -A'^{*} & C_t^{*}D_t^{-1}C_t & C_t^{*}b^{*}q_1 & C_t^{*}D_t^{-1}D_{t1} \\ 0 & A' & -H_1^{*}b^{*}q_1 & B_{t1}-H_1^{*}D_t^{-1}D_{t1} \\ \hline D_t^{-1}H_1 & D_t^{-1}C_t & b^{*}q_1 & D_t^{-1}D_{t1} \end{array}\right]$$

故由(23)式有

$$\theta'Z_1\sim\left(\begin{array}{cc|cc} -A'^{*} & C_t^{*}D_t^{-1}C_t & C_t^{*}b^{*}q_1 & C_t^{*}D_t^{-1}D_{t1} \\ 0 & A' & -H_1^{*}b^{*}q_1 & B_{t1}-H_1^{*}D_t^{-1}D_{t1} \\ \hline \mu^2D_t^{-1}H_1 & \mu^2D_t^{-1}C_t & \mu^2b^{*}q_1 & B_{t1}-\mu^2D_t^{-1}D_{t1} \\ 0 & 0 & 0 & BI \\ D_{t2}^{*}D_t^{-1}H_1-B_{t2}^{*} & D_{t2}^{*}D_t^{-1}C_t & D_{t2}^{*}b^{*}q_1 & D_{t2}^{*}D_t^{-1}D_{t1} \end{array}\right.$$

而

$$Z_1^{-1}\sim\left[\begin{array}{c|cc} A_1+UR & \mu^{-1}H_1^*b^* & -\mu^{-1}H_2^*a^{-1} \\ \hline q_1^{-1}b[\mu^{-2}H_1R+C_t-D_{t1}(a^*a)^{-1}H_3] & \mu^{-1}q_1^{-1} & -\mu^{-1}q_1^{-1}bD_{t1}a^{-1} \\ (a^*a)^{-1}H_3 & 0 & \mu^{-1}a^{-1} \end{array}\right]$$

由$\theta'=(\theta'Z_1)Z_1^{-1}$得$\theta'$的状态空间实现如(31)。

假设(f)　$(A_t,\ B_{t2})$为可稳的。

定理 4　若假设(f)成立，则 Riccati 方程

$$S(A_t+B_{t2}(a^*a)^{-1}D_{t2}^*C_t)+(A_t+B_{t2}(a^*a)^{-1}D_{t2}^*C_t)^*S+C_t^*D_sC_t+SB_{t2}(a^*a)^{-1}B_{t2}^*S=0 \tag{32}$$

有解S存在。且$W_{22}=-Z_4^*Z_4$中的Z_4具有实现

$$Z_4\sim\{A_t,\ B_{t2},\ -a^{*-1}C_4,\ a\} \tag{33}$$

其满足$Z_4^{\pm1}\in L_\infty$. 同时有

$$\begin{bmatrix}\theta_{13}\\ \theta_{23}\end{bmatrix}\sim\left(\begin{array}{c|c} A_t+B_{t2}(a^*a)^{-1}C_4 & B_{t2}a^{-1} \\ \hline D_{t2}(a^*a)^{-1}C_4+C_t & D_{t2}a^{-1} \\ 0 & 0 \\ (a^*a)^{-1}C_4 & a^{-1} \end{array}\right) \tag{34}$$

这里a为可逆方阵，其满足$a^*a=\mu^2I-D_{t2}^*D_{t2}$，而$C_4=D_{t2}^*C_t+B_{t2}^*S$，$D_s=D_{t2}(a^*a)^{-1}D_{t2}^*+I$，

证明　易知

$$W_{22}\sim\left[\begin{array}{cc|c} -A_t^* & C_t^*C_t & C_t^*D_{t2} \\ 0 & A_t & B_{t2} \\ \hline -B_{t2}^* & D_{t2}^*C_t & D_{t2}^*D_{t2}-\mu^2I \end{array}\right]$$

则

$$Z_4^*Z_4\sim\left[\begin{array}{cc|c} -A_t^* & -C_t^*C_t & -C_t^*D_{t2} \\ 0 & A_t & B_{t2} \\ \hline -B_{t2}^* & -D_{t2}^*C_t & \mu^2I-D_{t2}^*D_{t2} \end{array}\right]$$

对上述实现利用变换阵$\left[\begin{smallmatrix}I&S\\0&I\end{smallmatrix}\right]$进行相似变换，然后进行谱分解得$Z_4$的实现如(33)式。且

$$Z_4^{-1}\sim\left[\begin{array}{c|c} A_t+B_{t2}(a^*a)^{-1}C_4 & B_{t2}a^{-1} \\ \hline (a^*a)^{-1}C_4 & a^{-1} \end{array}\right]$$

由(21)式有

$$\theta''=\begin{bmatrix}\theta_{13}\\ \theta_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T_{12}\\ T_{22}\\ 0\\ I\end{bmatrix}Z_{1}^{-1}$$

而

$$\begin{matrix}T_{12}\\ T_{22}\\ 0\\ I\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{c|c}A_t & B_{t2}\\ \hline C_t & D_{t2}\\ 0 & 0\\ 0 & I\end{array}\right)$$

故运算得θ''具有实现如(34)式。

至此，我们得到了$\theta(s)$的状态空间表达式。完全类似于文献[6]的方法直接可得所求线性反馈控制器$K(S)$的状态空间实现。

附注：当$D_{22}\neq0$时，有

$$P'=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & D_{22}\end{bmatrix}$$

这里$P=[P_{ij}]_{i,j=2}$如(2)所示，则有

$$\Gamma_1(P',\ K)=\Gamma_1(P,K(I-D_{22}K)^{-1})\tag{35}$$

令$K'=K(I-D_{22}K)^{-1}$，则求K使$\|\Gamma_1(P',\ K)\|_\infty<\mu$的问题等价于求$K'$使$\|\Gamma_1(P,K)\|_\infty<\mu$，而$K=(I+K'D_{22})^{-1}K'$，故有结论：

定理 5 当$D_{22}\neq0$且$\det(I+K'(\infty)D_{22})\neq0$时，(3)式有解

$$K=(I+K'D_{22})^{-1}K'\tag{36}$$

其中$K'(s)$为前面所得。

参 考 文 献

[1] Zames G. IEEE Trans. Automat. Contral, 1981,26: 585～601

[2] Francis B A. A Course in H$^\infty$ Contral Theory. Springer-Verlay, Berlin-New York, 1987

[3] Nett C N, Jacobson C A and Balas M J. IEEE Trans. Automt. Control,1984,29: 831～832

[4] Wang Z Z and Pearson J B. Proc. IFAC World Congress, Budapest, 1984

[5] Boyd S, Balakrishnan V and Kabamba P. to Appear Math. Control, Signals and Systems. 1988

[6] 刘频，王正志．状态空间形式下的H$^\infty$优化控制问题（一）

[7] Ball J A and Cohen N. Int. J.Contrrol, 1987, 46: 785

H^{∞} Optimal Contiol: Completely State-space Design

Liu Pin Wang Zhengzhi Zhang Liangqi
(Department of Automatical Control)

Abstract

A completely state-space formula for the H^{∞} suboptimal solutions of linear systems is given. A general non-square 4- block model matching problem is produced from a normal control system. And the solution for this 4-block problem is received. This method is conveniently applied in computer-aided design, and is also convenient in further synthsis and analysis of the systems.

Key words: linear system, optimal control, H^{∞} control theory