国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第12卷第2期 1990年6月 Vol.12 No.2

干扰解耦的鲁棒性

陈 涌
(自动控制系)

摘 要 本文基于系统的状态空间模型，对于利用动态输出反馈，完成干扰解耦的情形，给出了鲁棒干扰解耦的条件。

关键词 线性系统，干扰解耦，鲁棒性
分类号 TP13,TN911

在系统理论中，干扰解耦(Disturbance Decoupling) 问题一直是人们关心的问题。在Wonham[1]的线性系统的几何方法中就引入了“模型问题”以说明不变子空间的应用。后来又有很多研究，在几何方法和传递函数矩阵间建立起了桥梁。在文[2]中，用传递函数的方法讨论了利用动态输出反馈进行干扰解耦的问题。在文[3]中，用传递函数方法讨论了由于参数变化的鲁棒干扰解耦问题。本文用状态空间模型讨论了鲁棒干扰解耦问题。这里，状态空间模型中参数的变化用输入输出分解[4]方法来描述，由此得到鲁棒干扰解耦的简单条件。

1 鲁棒干扰解耦的条件

1.1 干扰解耦的描述及参数变化的影响

对于用输出反馈进行干扰解耦的问题，可以用下述状态空间模型进行描述。设线性、定常多变量系统为

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu + D\xi \\ Y = CX \\ Z = PX \end{cases} \tag{1}$$

其中u为系统输入，Y为系统输出，ξ为干扰，Z为希望与ξ解耦的输出。

设动态输出反馈为

$$u(s) = -K(s)Y(s) + V(s) \tag{2}$$

其中 $K(s)$为动态输出反馈补偿器。

定义[2] 干扰解耦指的是，在(2)式中，确定$K(s)$，使得闭环系统的输出z与干扰ξ

1989年4月28日收稿

独立。即从ξ到z的传递函数为零。

下面我们用状态空间表示来研究干扰解耦的问题。

令：$\{E,F,G\}$为$K(s)$的最小实现，$\underline{X}$为$K(s)$的状态向量。

$$\bar{X}=\begin{bmatrix} X \\ \underline{X} \end{bmatrix}\text{为增广状态向量}$$

这样，可以得到闭环系统的增广状态空间模型：

$$\begin{cases} \dot{\bar{X}}=\begin{bmatrix} A & -BG \\ FC & E \end{bmatrix}\bar{X}+\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}V+\begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}\xi \\ Y=(C \quad 0)\bar{X} \\ z=(P \quad 0)\bar{X} \end{cases} \tag{3}$$

令：

$$D_a=\begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix},\ P_a=(P \quad 0)$$

则如果

$$G_d(s)\triangleq P_a\Phi D_a\equiv 0 \tag{4}$$

其中
$$\Phi\triangleq\begin{bmatrix} SI-A & BG \\ -FC & SI-E \end{bmatrix}^{-1}$$

这时，闭环系统就是干扰解耦的。

下面考虑由于系统参数的变化ΔA，引起的系统的摄动对干扰解耦的影响的问题。

令：
$$\hat{A}=A+\Delta A \tag{5}$$

其中，参数的变化ΔA是r个独立变量$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$的函数，具有下面的形式[4]：

$$\Delta A=\sum_{i=1}^{r}S_i\varepsilon_i \tag{6}$$

其中，$S_i(i=1,\cdots,r)$是常数矩阵。

把S_i分解成

$$S_i=-M_iN_i \tag{7}$$

这里，M_i、N_i是由S_i的秩确定出的满秩分解。这样，我们最终可以把ΔA分解成三个矩阵的乘积：

$$\Delta A=-ML_\varepsilon N \tag{8}$$

其中，M、N为由M_i、N_i确定的常数矩阵，L_ε为$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$的矩阵函数。我们把(8)式的分解形式称为$\Delta A$的输入/输出($I/O$)分解，且$M$、$N$为满秩的。这一点总是能做到的，因为

$$\Delta A=-ML_\varepsilon N=-(ME_c)(E_c^{-1}L_\varepsilon E_r^{-1})(E_rN)=-M^*L_\varepsilon^*N^* \tag{9}$$

其中，E_c、E_r为初等矩阵，使得M^*的非零列和N^*的非零行分别为独立的。略去M^*的全零列和N^*的全零行就得到(8)式。

对于摄动后的系统$\{\hat{A},B,C\}$，干扰ξ到输出z的传递函数为：

$$\hat{G}_d(s)=P_a\hat{\Phi}D_a \tag{10}$$

其中

$$\hat{\Phi}=\left\{\begin{bmatrix}SI-A & BG\\ -FC & SI-E\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}M\\ 0\end{bmatrix}L_\varepsilon[N\quad 0]\right\}^{-1}$$

利用矩阵求逆定理可知：

$$\begin{aligned}\hat{G}_d(s)&=P_a\Phi D_a-P_a\Phi M_aL_\varepsilon(I+N_a\Phi M_aL_\varepsilon)^{-1}N_a\Phi D_a\\ &=G_d(s)-G_1(s)L_\varepsilon(I+G_0(s)L_\varepsilon)^{-1}G_2(s)\\ &=G_d(s)-G_1(s)(I+L_\varepsilon G_0(s))^{-1}L_\varepsilon G_2(s)\end{aligned}\tag{11}$$

其中

$$M_a=\begin{bmatrix}M\\ 0\end{bmatrix},\ N_a=[N\quad 0]$$

$$G_0(s)=N_a\Phi M_a,\ G_1(s)=P_a\Phi M_a,\ G_2(s)=N_a\Phi D_a$$

1.2 干扰解耦的鲁棒性条件

我们知道，对给定的ε，闭环系统稳定的充分条件是[4]：

$$\det[I+\alpha L_\varepsilon G_0(jw)]\neq 0,\ w\in R,\ \alpha\in[0,1]\tag{12}$$

这样，当考虑系统参数摄动时，(12)式的性能指标不仅给出了输入输出稳定性，而且给出了内部稳定性[4]。事实上，如果$-ML_\varepsilon N$是ΔA的一个I/O分解，可以看到：

$$\begin{aligned}&\det[I+\alpha L_\varepsilon G_0(jw)]\\ =&\det[I+\alpha L_\varepsilon N_a\Phi M_a]\\ =&\det[I+\alpha M_aL_\varepsilon N_a\Phi]\\ =&\det[I-\alpha\Delta A\Phi]\end{aligned}$$

所以，ΔA的I/O分解的不唯一性，并不影响系统的稳定性。

令：

$$L=\{L_\varepsilon|\det[I+\alpha L_\varepsilon G_0(jw)]\neq 0,\ w\in R,\alpha\in[0,1]\}\tag{13}$$

则L描述了在系统的可容忍的参数变化时闭环系统的稳定性。

若上述的动态补偿器$K(s)$使得干扰ξ和输出z解耦，即$G_d(s)\equiv 0$，这样，在此条件下，我们得到下面的干扰解耦的鲁棒性条件：

条件1：对$L_\varepsilon\in L$，系统是鲁棒干扰解耦（即$\hat{G}_d(s)\equiv 0$）的充要条件是$G_1(s)\equiv 0$和/或$G_2(s)\equiv 0$.

这一点从(11)式可以直接看出，因为$M_aL_\varepsilon\neq 0$，$L_\varepsilon N_a\neq 0$.

条件2：对$L_\varepsilon\in L$，系统是鲁棒干扰解耦的条件是下面的条件之一满足：

(1)　$I_m\{M\}\subset I_m\{D\}$

(2)　$K_{er}\{N\}\supset K_{er}\{P\}$

因为，如果(1)成立，则可以找到一个矩阵Q，使得$M=DQ$，及

$$G_1(s)=P_a\Phi D_aQ=G_d(s)Q=0$$

对于(2)，我们可以找到矩阵W，使得$N=WP$，亦可得到类似结果，即$G_2(s)=0$.

1.3 B、C中参数变化的情况

对于B、C中参数变化的情况，用下述方法把其归结为A中参数变化的情况。

在系统为$\{A,B,C\}$时，我们构造一个增广的状态空间模型$\{A_a,B_a,C_a\}$，摄动后为$\{\hat{A}_a,\hat{B}_a,\hat{C}_a\}$，其中，$\hat{B}_a=B_a$，$\hat{C}_a=C_a$，但$\Delta A_a=\hat{A}_a-A_a$，用$\Delta A_a$的变化来近似$\Delta B$和$\Delta C$. 这样，就可用上述给出的条件去判断其干扰解耦的鲁棒性。

具体做法是：

(1) B中参数变化的情况

设B的第i列b_i受到摄动，u_i为输入u的第i个分量。

令：增广系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{X}\\ \dot{X}_b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & b_i\\ 0 & -\sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ X_b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_0\\ b_0\end{bmatrix}u \tag{14}$$

其中σ是一个充分大的正数；$B_0=B-[0\ \cdots\ 0\ b_i\ 0\ \cdots\ 0]$；$b_0=[0\ \cdots\ 0\ \sigma\ 0\ \cdots\ 0]$
则从u_i到X_b的传递函数为

$$X_b(s)=\frac{\sigma}{s+\sigma}u_i(s),\ \sigma\gg 1 \tag{15}$$

当σ足够大时，略去X_b的动态过程，X_b就近似于u_i.

(2) C中参数变化的情况

设C的第j行c_j受到摄动，我们可构造如下的增广状态空间模型：

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{X}\\ \dot{X}_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & 0\\ c_j & -\tau\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ X_c\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}u\\ Y=[C_0\quad c_0]\begin{bmatrix}X\\ X_c\end{bmatrix}\end{cases} \tag{16}$$

其中：τ是充分大的正数

$$C_0=C-[\,0\cdots 0\quad c_j\quad 0\cdots 0\,]^T$$
$$c_0=[\,0\cdots 0\quad \tau\quad 0\cdots 0\,]^T$$

这样，从X_c到输出Y_j的传递函数为

$$Y_j(s)=\frac{\tau}{s+\tau}X_c(s),\ \tau\gg 1 \tag{17}$$

容易证明，系统的可控性和可观性不受上面的增广状态的影响。

1.4 例子

设某系统的状态方程为：

$$\begin{cases}\dot{X}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}X+Bu+D\xi\\ Y=CX\\ z=(\beta\quad 0\quad 0)X,\ \beta\neq 0\end{cases}$$

摄动后

$$\Delta A(\varepsilon)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \varepsilon & 0 & 0\end{bmatrix}$$

则我们可找到

$$M=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\ N=(-1\quad 0\quad 0)$$

使得

$$\Delta A(\varepsilon)=-ML(\varepsilon)N$$

若已找到$K(s)$使得原系统是干扰解耦的，对于$L_e\in L$，注意到当取$W=-\frac{1}{\beta}$时，有

$$(-1\quad 0\quad 0)=-\frac{1}{\beta}(\beta\quad 0\quad 0)$$

因此，这时系统的干扰解耦具有鲁棒性。

2 结束语

本文利用参数变化的I/O分解，讨论了由于系统参数变化的鲁棒干扰 解耦问题。给出了当ΔA变化时的两个鲁棒干扰解耦的条件。对于B和C的变化情况可归 结 为ΔA的变化。最后给出了一个例子，说明其应用。

参 考 文 献

[1] Wonham W M. Linear Multivariable Control: A Geometric Approach. New York: Springer-Verlag, 1979

[2] Özguler A B and Eldem V. Disturbance Decoupling Problems via Dynamic Output Feedback. IEEE Trans. Automat. Contr, 1985, AC-30 (8): 756~764

[3] Bhattacharyya S P, etc. The Structure of Robust Disturbance Rejection Control. IEEE Trans. Automat. Contr, 1983, AC—28 (9): 874~881

[4] Tahk M and Speyer J L. Modeling of Parameter Variations and Asymptotic LQG Synthesis. IEEE Trans. Automat. Contr, 1987, AC—32 (9): 793~801

The Robustness of Disturbance Decoupling

Chen Yong

(Department of Automatic Control)

Abstract

This paper is based on state space model of the system. For the situation of the system completing disturbance decoupling by using dynamic output feedback, the condition of robust disturbance decoupling is given.

Key words Linear system, disturbance decoupling, robust