国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第12卷第3期　1990年9月　Vol.12 No.3

两种选址问题的算法及有关结论

张干宗　粟塔山
（系统工程与应用数学系）

摘　要　本文提出两种选址问题，对其局部最优性建立了充要条件，并在此基础上提出了该类问题的有效算法。

关键词　运筹分析，规划，算法，选址问题，局部最优性，充要条件
分类号　O224

1　问题的提出

选址问题（或称定位问题）是经济建设和军事运筹中经常出现的问题。在现有文献[1][2][3]中，对多种类型的选址问题进行了研究。本文提出和讨论两种选址问题。

(LPⅠ)：设平面上有 n 个点 p_1，p_2，…，p_n，以它们为顶点构成一个平面凸多边形区域 D．设正值函数 $g(r)$ ($r>0$) 严格递减且连续可微。问题是求出点 $X^*\in D$，使达到

$$\min_{X\in D}\ \max_{1<i<n}\{w_i g(r_i)\} \tag{1}$$

其中，$r_i=\|\overrightarrow{p_i X}\|$（即点 p_i 与点 X 间的距离），w_i 是对应于点 p_i 的权系数，$w_i>0$ $(i=1,\ \cdots,\ n)$.

(LPⅡ)：前提与问题（LPⅠ）相同，只是将式(1)改为

$$\max_{X\in D}\ \min_{1<i<n}\{w_i g(r_i)\} \tag{2}$$

(LPⅠ)的背景可解释为：p_1，p_2，…，p_n 是 n 个居民点，对应人口数量分别为 w_1，w_2，…，w_n．要在区域 D 上建一工厂，该工厂对环境有某种污染（如放射性、毒气、噪声等污染），污染源对居民的危害程度是距离 r 的递减函数。要求在 D 上为污染源定位，使对各居民点的危害在总体意义上达到最小。

(LPⅡ)的背景可解释为：p_i ($i=1$，…，n) 是 n 个平面点目标，w_i 是 p_i 的价值系数。拟在区域 D 投一弹，该弹的当量较大，有可能对各点目标都造成一定程度的破坏，它对点目标的破坏效应是距离 r 的递减函数。要求在 D 上确定一弹着点（或瞄准点），使对各点目标的最小破坏效应达到最大。

1989年4月10日收稿

下面着重讨论问题（LPⅠ），对问题（LPⅡ）可平行地进行讨论。在平面上建立直角坐标系。设点p_i的坐标为（a_i，b_i），$i=1$，…，n. 点X的坐标记为（x，y），并记

$$f(X)=\max_{1\leq i\leq n}\{w_i g(r_i)\} \tag{3}$$

其中

$$g(r_i)=g(\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2}, \quad i=1,\cdots,n \tag{4}$$

函数$f(X)$是非光滑的，并且在一般情形下也是非凸的。因此，对于非线性规划问题$\min\limits_{X\in D}f(X)$采用通常的约束最优化方法难于求解。本文在分析问题特性的基础上提出解算方法。

2 主要结论

下面涉及的向量均指平面向量。为节省篇幅，下述系1、系2、系3的证明从略。

定义 若对任意非零向量e，存在$e_i\in\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$，使内积$(e, e_i)<0$，则称向量组$\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$构成星状系。

系 1 设向量e_i的两个分量为x_i，y_i（$i=1, 2, 3$）。则$\{e_1, e_2, e_3\}$构成星状系当且仅当下面三个行列式均不为零且同号：

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}.$$

系 2 向量组$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$构成星状系当且仅当出现下列情形之一：

(1) 该向量组由两对共线反向的向量组成；

(2) 存在其中三个向量构成星状系。

系 3 设$m\geqslant 5$，则向量组$\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$构成星状系当且仅当存在其中三个向量构成星状系。

定理 1 设$X^0\in \mathrm{int}D$，且有

$$w_{j_1}g(r^0_{j_1})=\cdots=w_{j_m}g(r^0_{j_m})>w_k g(r^0_k) \tag{5}$$

$$(\{j_1,\cdots,j_m\}\subset\{1,\cdots,n\},\ k\in\{1,\cdots,n\}\setminus\{j_1,\cdots,j_m\})$$

其中$r^0_i=\|\overrightarrow{p_iX^0}\|$（$i=1, \cdots, n$），则$X^0$是问题（LPⅠ）的局部最优解的充要条件是向量组$\{\overrightarrow{p_{j_1}X^0}, \cdots, \overrightarrow{p_{j_m}X^0}\}$构成星状系。

证明 必要性：记

$$e_k=\overrightarrow{p_kX^0}/\|\overrightarrow{p_kX^0}\| \qquad (k=1,\cdots,n)$$

假若$\{e_{j_1},\cdots,e_{j_m}\}$非星状系，则存在单位向量$e$，使得

$$(e_{j_i}, e)\geqslant 0 \quad (i=1,\cdots,m) \tag{6}$$

对任意$X\in D$，记

$$r_k=\|\overrightarrow{p_kX}\| \quad (k=1,\cdots,n)$$

$$G_k(X)=g(\sqrt{(x-a_k)^2+(y-b_k)^2}) \qquad k=1,\cdots,n$$

则

$$\nabla G_k(X)=\left(g'(r_k)\frac{x-a_k}{r_k},\ g'(r_k)\frac{y-b_k}{r_k}\right)=g'(r_k)\frac{\overrightarrow{p_kX}}{\|\overrightarrow{p_kX}\|}$$

现令$X=X^0+\varepsilon e$，其中$\varepsilon>0$，则对于任意$k\in\{1,\cdots,n\}$，有

$$\begin{aligned}w_kg(r_k)&=w_kG_k(X^0+\varepsilon e)\\&=w_k[G_k(X^0)+\varepsilon(\nabla G_k(X^0),e)+0(\varepsilon)]\\&=w_k[g(r_k^0)+\varepsilon g'(r_k^0)(e_k,e)+0(\varepsilon)]\end{aligned}$$

从而对于任意$i\in\{1,\cdots,m\}$和$k\in\{1,\cdots,n\}\setminus\{j_1,\cdots,j_m\}$，有

$$\begin{aligned}w_{j_i}g(r_{j_i})-w_kg(r_k)=&[w_{j_i}g(r_{j_i}^0)-w_kg(r_k^0)]\\&+\varepsilon[w_{j_i}g'(r_{j_i}^0)(e_{j_i},e)-w_kg'(r_k^0)(e_k,e)]+0(\varepsilon)\end{aligned}$$

由式(5)，对于给定的$i\in\{1,\ \cdots,\ m\}$和$k\in\{1,\cdots,n\}\setminus\{j_1,\ \cdots,\ j_m\}$，当正数$\varepsilon$充分小时必有

$$\begin{aligned}&[w_{j_i}g(r_{j_i}^0)-w_kg(r_k^0)]+\varepsilon[w_{j_i}g'(r_{j_i}^0)(e_{j_i},e)\\&-w_kg'(r_k^0)(e_k,e)]+0(\varepsilon)>0\end{aligned}$$

由于$\{1,\cdots,n\}$为有限集，必存在正数ε^*，使当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon^*$时，$X=X^0+\varepsilon e\in\mathrm{int}D$，且有下式成立：

$$w_{j_i}g(r_{j_i})>w_kg(r_k)\tag{7}$$
$$(i\in\{1,\cdots,m\},\ k\in\{1,\cdots,n\}\setminus\{j_1,\ \cdots j_m\})$$

又由

$$r_{j_i}=\|\overrightarrow{p_{j_i}X}\|=\|\overrightarrow{p_{j_i}X^0}+\varepsilon e\|=\sqrt{(r_{j_i}^0)^2+\varepsilon^2+2\varepsilon r_{j_i}^0(e_{j_i},\ e)}$$

和式(6)可知

$$r_{j_i}>r_{j_i}^0\quad(i=1,\cdots,m)$$

从而有

$$w_{j_i}g(r_{j_i})<w_{j_i}g(r_{j_i}^0)\quad(i=1,\cdots,m)\tag{8}$$

于是，由式(7)、(8)和(5)可知，对于一切满足$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon^*$的$\varepsilon$有

$$\begin{aligned}f(X^0+\varepsilon e)&=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{w_kg(r_k)\}=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{w_{j_i}g(r_{j_i})\}\\&<\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{w_{j_i}g(r_{j_i}^0)\}=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{w_kg(r_k^0)\}=f(X^0)\end{aligned}$$

此与X^0是（LPⅠ）的局部最优解相矛盾。

充分性：用$0(p_{j_i},\ r_{j_i}^0)$表示以p_{j_i}为圆心，以$r_{j_i}^0$为半径的闭圆域，则$\bigcup\limits_{i=1}^{m}0(p_{j_i},\ r_{j_i}^0)$是一个单连通的有界闭域，记其边界线为$C$，$C$是由有限个圆弧组成的一条连续的单闭曲线。对任一单位向量$e(\theta)$，这里θ表示该向量与水平轴的夹角，对应射线$L(\theta)=\{X^0+\lambda e(\theta):\lambda>0\}$与$C$有唯一的交点，记为$M(\theta)$，并记$\rho(\theta)=\|\overrightarrow{X^0M(\theta)}\|$，则$\rho(\theta)$是$0\leqslant\theta\leqslant\pi$上的连续函数。记$\rho_0=\min\limits_{0\leqslant\theta\leqslant2\pi}\rho(\theta)$，则必有$\rho_0>0$. 因为，如果$\rho_0=0$，由$\rho(\theta)$在闭区间$[0,\ 2\pi]$上的连续性，必存在$\theta_0\in[0,\ 2\pi]$，使$\rho(\theta_0)=0$. 这时射

线$L(\theta_0)$不可能穿过任何一个$O(p_{j_i}, r_{j_i}^0)$的内部 $(i=1,\cdots,m)$，从而有$(e(\theta_0), e_{j_i})\geqslant 0$ $(i=1, \cdots, m)$，此与$\{e_{j_1}, \cdots, e_{j_m}\}$为星状系相矛盾。

记$N(X^0, \rho_0)$ 是点X^0的半径为ρ_0的开邻域。显然

$$N(X^0, \rho_0)\subset \mathrm{int}\left(\bigcup_{i=1}^{m} O(p_{j_i}, r_{j_i}^0)\right)$$

对于任意的$X\in N(X^0, \rho_0)$，必存在$t\in\{1, \cdots, m\}$，使

$$X\in \mathrm{int}(O(p_{j_t}, r_{j_t}^0))$$

则有

$$r_{j_t}=\|\overrightarrow{p_{j_t}X}\|<r_{j_t}^0=\|\overrightarrow{p_{j_t}X^0}\|$$

从而有

$$\begin{aligned} f(X) &= \max_{1\leqslant k\leqslant n}\{w_k g(r_k)\}\geqslant w_{j_t}g(r_{j_t}) \\ &> w_{j_t}g(r_{j_t}^0)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{w_k g(r_k^0)\}=f(X^0) \end{aligned}$$

这表明X^0是（LPⅠ）的局部最优解（且知X^0是$f(X)$的严格局部极小点）。

定理 2 设X^0是D的边界点（但非顶点），且有

$$w_{j_1}g(r_{j_1}^0)=\cdots=w_{j_m}g(r_{j_m}^0)>w_k g(r_k^0) \quad (k\in\{1,\cdots,n\}\setminus\{j_1,\cdots,j_m\}) \tag{9}$$

则X^0是问题（LPⅠ）的局部最优解的充要条件是向量组$\{\overrightarrow{p_{j_1}X^0}, \cdots, \overrightarrow{p_{j_m}X^0}, \vec{n}\}$构成星状系。这里$\vec{n}$表示$X^0$所在边界的法线向量且指向$D$的内部（其他符号的意义与定理1相同）。

证明 必要性与定理1证法相同，不赘述。下证充分性。不妨设X^0在边界线$\overline{p_1p_2}$上。在$\overline{p_1p_2}$过X^0的垂线上取一点，且该点在域D之外，记之为p_{n+1}，使得D上併入三角形区域$\Delta p_1p_2p_{n+1}$后仍为一个凸多边形域（这总是可以办到的），记该区域为$\tilde{D}$，于是$X^0\in\mathrm{int}\tilde{D}$. 记$r_{n+1}^0=\|\overrightarrow{p_{n+1}X^0}\|$，并令

$$w_{n+1}=w_{j_1}g(r_{j_1}^0)/g(r_{n+1}^0)$$

对任意$X\in\tilde{D}$，记$r_{n+1}=\|\overrightarrow{p_{n+1}X}\|$，并令

$$\tilde{f}(X)=\max\{w_1g(r_1),\cdots,w_ng(r_n), w_{n+1}g(r_{n+1})\}$$

由于$\{\overrightarrow{p_{j_1}X^0},\cdots,\overrightarrow{p_{j_m}X^0}, \overrightarrow{p_{n+1}X^0}\}$构成星状系，根据定理1，$X^0$必为$\tilde{f}(X)$的局部极小点。即存在$\delta>0$，使

$$\tilde{f}(X)\geqslant\tilde{f}(X^0) \qquad (X\in N(X^0,\delta)\cap\tilde{D})$$

并注意到

$$\tilde{f}(X)=\max\{f(X), w_{n+1}g(r_{n+1})\}$$
$$\tilde{f}(X^0)=\max\{f(X^0), w_{n+1}g(r_{n+1}^0)\}\geqslant w_{n+1}g(r_{n+1}^0)$$

故有

$$\max\{f(X), w_{n+1}g(r_{n+1})\}\geqslant w_{n+1}g(r_{n+1}^0) \qquad (X\in N(X^0,\delta)\cap\tilde{D})$$

又由于，对任意的异于X^0的$X\in N(X^0,\delta)\cap D$. 有

$$r_{n+1}=\|\overrightarrow{p_{n+1}X}\|>\|\overrightarrow{p_{n+1}X^0}\|=r^0_{n+1}$$

从而有

$$w_{n+1}g(r_{n+1})<w_{n+1}g(r^0_{n+1})$$

于是必有

$$f(X)\geqslant w_{n+1}g(r^0_{n+1})\qquad(X\in N(X^0,\delta)\cap D)$$

再注意到

$$f(X^0)=w_{j_1}g(r^0_{j_1})=w_{n+1}g(r^0_{n+1})$$

即得

$$f(X)\geqslant f(X^0)\qquad(X\in N(X^0,\delta)\cap D)$$

即知X^0是（LPⅠ）的局部最优解。

对于问题（LPⅡ），可得出类似结论，不赘述。

3　解算方法

在前节各结论的基础上，可得出问题（LPⅠ）的解算方法。此方法是从可能成为（LPⅠ）的局部最优解的有限个点中经逐次判别和比较而得出问题的整体最优解。具体做法分两个阶段进行。

第Ⅰ阶段　在D的内部寻求最佳局部最优解。其步骤如下：

step 0　考查n个顶点p_1，p_2，…，p_n中每次取三个的组合。将C^3_n个组合按下标的辞典序规则排列。置$j:=1$，置现有最优值$f^*:=+\infty$，现有最优解$X^*:=\phi$.

step 1　取第j个组合，记为$\{p_{j_1},\ p_{j_2},\ p_{j_3}\}$. p_{j_i}的坐标为$(a_{j_i},\ b_{j_i})$，并记$r_{j_i}=\sqrt{(x-a_{j_i})^2+(y-b_{j_i})^2}$　$(i=1,\ 2,\ 3)$，求解方程组：

$$w_{j_1}g(r_{j_1})=w_{j_2}g(r_{j_2})=w_{j_3}g(r_{j_3})\tag{10}$$

（对于应用中常见的情形，如$g(r)=1/r^a$，常数$a>0$，上述联立方程可化为二元二次代数方程组。）若方程组(10)无解，转step 6；若(10)有解（这时解是唯一的），得出解点$X^s=(x_s,\ y_s)$，转step 2.

step 2　检查是否$w_{j_1}g(\|\overrightarrow{p_{j_1}X^s}\|)\leqslant f^*$？如是，转step 3；如否，转step 6.

step 3　计算下列二阶行列式：

$$\begin{vmatrix}x_s-a_{j_1} & x_s-a_{j_2}\\ y_s-b_{j_1} & y_s-b_{j_2}\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}x_s-a_{j_2} & x_s-a_{j_3}\\ y_s-b_{j_2} & y_s-b_{j_3}\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}x_s-a_{j_3} & x_s-a_{j_1}\\ y_s-b_{j_3} & y_s-b_{j_1}\end{vmatrix}$$

若三者同号，转step 5；若有一个为零，转step 4；否则，转step 6.

step 4　此时$\overrightarrow{p_{j_1}X^s}$，$\overrightarrow{p_{j_2}X^s}$，$\overrightarrow{p_{j_3}X^s}$中有两个共线反向。检查是否存在$j_4\in\{1,\cdots,n\}$，使余下的一个向量与$\overrightarrow{p_{j_4}X^s}$共线反向，并且$w_{j_4}(\|\overrightarrow{p_{j_4}X^s}\|)=w_{j_1}g(\|\overrightarrow{p_{j_1}X^s}\|)$. 若满足，转step 5；否则，转step 6.

step 5　检验是否满足

$$w_{j_1}g(\|\overrightarrow{p_{j_1}X^s}\|)\geqslant w_kg(\|\overrightarrow{p_kX^s}\|),\ k=1,\cdots,n$$

若不满足，转step 6；若满足，置

$$f^*:=w_{j_1}g(\|\overrightarrow{p_{j_1}X^s}\|),\quad X^*:=X^s$$

然后，转step 6.

step 6 检查 j 是否等于 C_n^3？若 $j<C_n^3$，置 $j:=j+1$，并返回step 1；若 $j=C_n^3$，则转入第Ⅱ阶段。

第Ⅱ阶段 考查边界上的局部最优解。步骤如下：

step 0 考查从全部顶点中每次取两个的组合。将 C_n^2 个组合按下标的辞典序排列。确定出边界线 $\overline{p_ip_{i+1}}$ 的指向 D 内的法向量 $\vec{n}_i=(c_i,\ d_i)$，$i=1,\ \cdots,\ n$（这里 $p_{n+2}=p_1$）. 置 $i:=1$.

step 1 取第 i 个边界线 $\overline{p_ip_{i+1}}$，置 $j:=1$.

step 2 取第 j 个顶点组合，记为 $\{p_{j_1},\ p_{j_2}\}$，求解方程组：

$$\left.\begin{aligned} & w_{j_1}g(r_{j_1})=w_{j_2}g(r_{j_2}) \\ & \frac{x-a_i}{a_{i+1}-a_i}=\frac{y-b_i}{b_{i+1}-b_i} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

若式(11)无解，转 step 7；若式(11)有解(这时解是唯一的)，得出解点 $X^s=(x_s,\ y_s)$，转 step 3.

step 3 检查是否 $w_{j_1}g(\|\overrightarrow{p_{j_1}X^s}\|)\leqslant f^*$？如是，转step 4；如否，转step 7.

step 4 计算下列行列式：

$$\begin{vmatrix} x_s-a_{j_1} & x_s-a_{j_2} \\ y_s-b_{j_1} & y_s-b_{j_2} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_s-a_{j_2} & c_i \\ y_s-b_{j_2} & d_i \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} c_i & x_s-a_{j_1} \\ d_i & y_s-b_{j_1} \end{vmatrix}$$

若三者同号，转step 6；若有一个为零，转step 5；否则，转step 7.

step 5 此时 $\overrightarrow{p_{j_1}X^s}$，$\overrightarrow{p_{j_2}X^s}$，$\vec{n}_i$ 中有两个共线反向，检查是否存在 $j_3\in\{1,\cdots,n\}$，使余下的一个向量与 $\overrightarrow{p_{j_3}X^s}$ 共线反向且 $w_{j_3}g(\|\overrightarrow{p_{j_3}X^s}\|)=w_{j_1}g(\|\overrightarrow{p_{j_1}X^s}\|)$. 若满足，转step 6；否则，转step 7.

step 6 检验是否满足

$$w_{j_1}g(\|\overrightarrow{p_{j_1}X^s}\|)\geqslant w_kg(\|\overrightarrow{p_kX^s}\|),\quad k=1,\cdots,n$$

若不满足，转step 7；若满足，置

$$f^*:=w_{j_1}g(\|\overrightarrow{p_{j_1}X^s}\|),\quad X^*:=X^s$$

然后转 step 7.

step 7 检查 j 是否等于 C_n^2？若 $j<C_n^2$，置 $j:=j+1$，返回step 2；若 $j=C_n^2$，转step 8.

step 8 检查 i 是否等于 n？若 $i<n$，置 $i:=i+1$，返回step 1；若 $i=n$，计算结束，输出 X^* 即为（LPⅠ）的最优解。

对于问题（LPⅡ），可建立类似算法，不赘述。

上述算法的正确性根据定理1、2和系1、2、3不难得知。现在对方程组(10)和(11)的解（指实数解）的唯一性说明如下：

引进参变量 t，方程组(10)等价于下列方程组：

$$(x-a_{j_i})^2+(y-b_{j_i})^2=\left[g^{-1}\left(\frac{t}{w_{j_i}}\right)\right]^2,\quad i=1,2,3$$

可见，此方程组的解点是平面上以 $(a_{j_i},\ b_{j_i})$ 为圆心，以 $g^{-1}\left(\frac{t}{w_{j_i}}\right)$ 为半径的三个圆($i=1,2,3$) 的公共点。由函数 $g^{-1}(\cdot)$ 严格单调可分析出，若有两个解点，则点 $(a_{j_1},\ b_{j_1})$、$(a_{j_2},\ b_{j_2})$、$(a_{j_3},\ b_{j_3})$ 必在同一直线上，但这与它们是凸多边形的顶点相矛盾。

若方程组(11)有两个解点，不难分析出边界线 $\overline{p_ip_{i+1}}$ 必与顶点 (a_{j_1},b_{j_1})、(a_{j_2},b_{j_2}) 的连线相垂直，但这是不可能的。

对上述算法，若在step 5和 step 6中添加适当的记录手续，可以得出(LPⅠ)的全部整体最优解。如果需要，对上述算法稍加修改，可以得出（LPⅠ）的所有局部最优解。

问题（LPⅠ）的规模取决于顶点的个数 n．上述算法的主要计算量在于求解 C_n^3 个如（10）式所示的方程组和 nC_n^2 个如（11）式所示的方程组。每个方程组的计算量是确定的，不随 n 变化。随 n 的增长，此算法总计算量的增长阶为 $O(n^3)$．

参考文献

[1] 张天赐．平面选址问题概述．运筹学杂志，1985，4(1)

[2] 林治勋．离散型选址问题．运筹学杂志，1984，3(1)

[3] Francis R L, White J A. Facility Layout and Location: An Analytical Approach. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971

The Algorithm for Two Location Problems and Some Related Conclusions

Zhang Ganzong　Su Tashan

(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

Abstract

In this paper, two location problems have been put forward. A necessary and sufficient condition of local optimality is established. On the basis of this analysis, an efficient algorithm to solve these location problems is proprosed.

Key Words: operations analysis, programming, algorithm, location problem, local optimality, necessary and sufficient condition