国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第12卷第3期 1990年9月 Vol.12 No.3

Lanchester 方程与火力指数的内在联系

沙 基 昌
（系统工程与应用数学系）

摘 要 本文从Lanchester方程出发，利用正矩阵的特性，将矩阵特征向量与火力指数有机地联系起来。通过例子进一步说明火力指数是Lanchester方程中威力系数概念的推广；它不仅与武器本身有关，而且依赖于整个战斗的武器配系。当某些种类的武器被摧毁，战斗格局发生一定变化时，火力指数也会发生变化。火力指数还决定于火力分配原则。

关键词 运筹分析，作战，模型，作战模拟，C^3I理论，火力指数
分类号 E911

本世纪初，Lanchester 提出了关于空战战术的尝试性数学模型，后来人们称之为Lanchester方程。由于 Lanchester 方程形式上的优美，不能不引起人们的关注。但真正得到人们的普遍承认则是在二次大战以后。用Lanchester 方程研究了硫磺岛等一系列战役[1]后人们发现，其结果与实际情况惊人地一致。从此，Lanchester 方程就成为用定量化方法研究作战的基本工具。

然而多兵种战斗的Lanchester 方程是一个多元微分方程组，其系数的确定与方程求解都是十分困难的事。以美国退役陆军上校Dupuy为代表建立了另一种半经验性的研究定量作战模型的方法。其基本思想是：战争是力量的较量，各种武器与人力都可以某种方式统一地“折算”为一种力量。这就是火力指数的概念。

火力指数的概念提出来后很快就为军事专家所接受，其原因当然与火力指数同直观概念的一致性以及运用的方便性有关；然而Dupuy将其用于分析二次大战中的60多次战役，其结果令人相当满意也是一个重要的因素。但是，火力指数的概念也不是十全十美的。火力指数的确定方法比较粗糙，缺乏一种严格的定义。例如“200支步枪的合成指数大大高于一辆坦克的指数，但它们不能毁伤一辆坦克”，这类矛盾没有得到圆满的解释。

近来，在火力指数的确定方法以及将火力指数与Lanchester 方程的结合方面，国内外都有所探索，这些研究都有一定的实用意义。本文的目的是研究Lanchester 方程与火力指数的内在联系，从理论上解决火力指数的确定问题。这样的研究将为从理论上研究武器装备配系与战术运用开辟新的途径，对实际问题的研究也可能会有一定的指导意义。

1989年5月15日收稿

1 Lanchester方程

当红蓝双方各有单一种类的战斗单位时，正规战（本文仅讨论正规战，以下不再一一说明）的Lanchester方程具有如下形式

$$\begin{cases}\dot{x}=-ay\\ \dot{y}=-bx\end{cases} \tag{1}$$

其中 x， y 分别表示红、蓝双方所拥有的战斗单位数，a 为蓝方每个战斗单位在单位时间内消灭红方战斗单位的数目，b 为红方每个战斗单位在单位时间内消灭蓝方战斗单位的数目。

方程(1) 的形式比较优美，犹如力学中牛顿第二定律那样，其各项的实际意义也很明瞭。但在实际战争，尤其是现代化合成战争中，红蓝双方的战斗单位种类均很多。当红方具有 m 种战斗单位，蓝方具有 n 种战斗单位时，Lanchester 方程具有如下形式

$$\begin{cases}\dot{X}=-(A*\Lambda)Y\\ \dot{Y}=-(B*\Theta)X\end{cases} \tag{2}$$

其中 $X=(x_1,\cdots,x_m)^T$，$Y=(y_1,\cdots,y_n)^T$ 分别为红、蓝双方实力向量，即 x_i，y_j 分别为红方第 i 种战斗单位与蓝方第j种战斗单位的数目；$A=(a_{ij})$，$\Lambda=(\lambda_{ij})$是$m\times n$矩阵，$B=(b_{ji})$，$\Theta=(\theta_{ji})$是$n\times m$矩阵；A，B为威力矩阵，即 a_{ij} 为蓝方第 j 种战斗单位攻击红方第 i 种战斗单位时，单位时间内消灭红方第 i 种战斗单位的数目，而 b_{ji} 为红方第 i 种战斗单位攻击蓝方第 j 种战斗单位时，单位时间内消灭蓝方第 j 种战斗单位的数目，显然$a_{ij}\geqslant 0$，$b_{ji}\geqslant 0$；Λ、Θ 为分配矩阵，即 λ_{ij} 表示蓝方第 j 种战斗单位分配于攻击红方第 i 种战斗单位的比例，而 θ_{ji} 为红方第 i 种战斗单位分配于攻击蓝方第 j 种战斗单位的比例，所以 Λ与 Θ 的每个元素均非负，且每列元素之和均等于小于 1，本文中假设其等于1（当发生<1的情况时可引进虚拟战斗单位来处理，列和小于 1 的部分用于攻击对方的虚拟战斗单位，而对虚拟战斗单位的威力以及虚拟战斗单位向对方攻击的威力均取为零）；“*”表示矩阵的对应元素相乘。

方程(2) 是一个 $m+n$ 元微分方程组，在实际应用中要确定威力矩阵 A 与 B 十分困难，且它们可能随着时间、地点和条件而变化。(2) 式的求解也很困难。因此难以直接从 (2)式来推断战争发展的基本趋势。这也是军事人员不太愿意使用Lanchester 方程的原因之一。

2 多维Lanchester方程的转化

战争是力量的较量。从 Lanchester 方程 (2) 直接导出反映双方实力变化的主要趋势是本文的基本目标。

记

$$\begin{cases}G=(g_{ij})=A*\Lambda\\ H=(h_{ji})=B*\Theta\end{cases} \tag{3}$$

则G、H分别为$m\times n$阶矩阵与$n\times m$阶矩阵。此时(2)式成为

$$\begin{cases}\dot{X}=-GY\\ \dot{Y}=-HX\end{cases} \tag{4}$$

设 λ 为GH的非零特征值，相应的特征矢量为U，则

$$G(HU)=(GH)U=\lambda U$$

故HU是非零矢量。记 $V=HU$，则

$$(HG)V=H(GHU)=H(\lambda U)=\lambda(HU)=\lambda V$$

因此，λ 也是HG 的非零特征值，而V是相应的特征矢量。

同理可证HG的非零特征值也是GH的非零特征值。于是我们得到

定理 1 矩阵GH与HG有相同的非零特征值。

显然GH与HG都是非负矩阵。在许多实际情况中，GH与HG还都是正矩阵，即其中每个元素都是正值。此时可应用正矩阵的理论[2]，对于更一般的非负矩阵情况本文不作讨论。

对于正矩阵 $Z>0$，有下述的定理。

定理 2 （Frobenius—Perro定理）存在常数$\mu>0$，向量$W>0$，使得

(a) $ZW=\mu W$；

(b) 设$\lambda\neq\mu$，且 λ 是 Z 的任一其它特征值，则 $|\lambda|<\mu$；

(c) μ 是一个几何重数与代数重数均为 1 的特征值。

对正矩阵GH的转置$(GH)^T$应用Frobenius—Perron 定理，可知存在正数 $\mu=\lambda^2>0$ 与左特征向量$U=(u_1,\cdots,u_m)^T>0$，使得

$$U^T\cdot GH=\lambda^2U^T \tag{5}$$

记

$$(v_1,\cdots,v_n)=V^T=\lambda^{-1}U^TG \tag{6}$$

易知$V>0$，且V是矩阵HG关于特征值λ^2的左特征向量。

$$V^THG=\lambda^{-1}(U^TGH)G=\lambda U^TG=\lambda^2V^T$$

作线性组合

$$\begin{cases}u=U^TX\\ v=V^TY\end{cases} \tag{7}$$

则

$$\begin{cases}\dot{u}=U^T\dot{X}=-U^TGY=-\lambda V^TY=-\lambda v\\ \dot{v}=V^T\dot{Y}=-V^THX=-\lambda^{-1}U^TGHX=-\lambda U^TX=-\lambda u\end{cases} \tag{8}$$

于是我们看到，从多维Lanchester 方程 (2) 出发，利用正矩阵的特点以及左特征向量构造的线性组合 u 与 v 满足类似于(1)式的方程(8)。

3 正特征向量的战术意义

由(7)式，

$$\begin{cases}u=u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_mx_m\\ v=v_1y_1+v_2y_2+\cdots+v_ny_n\end{cases} \tag{9}$$

因$U>0$，$V>0$，故$u_1,u_2,\cdots,u_m>0$，$v_1,v_2,\cdots,v_n>0$. 我们把 u 、v 分别看作为红、蓝双方的总火力指数。u_i 为红方每个第 i 类战斗单位的相对火力指数，u_ix_i 为红方第 i 类战斗单位对总火力指数的贡献。对蓝方也作类似定义。于是方程(8)就是红蓝双方总火力指数的Lanchester 方程。而战争的基本趋势就依赖于双方总火力指数的对抗。

例 1 设红方所有战斗单位集中攻击蓝方第一类战斗单位，且红方各类战斗单位对蓝方第一类战斗单位的攻击都是有效的，则

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} \cdots b_{1m} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ b_{n1} \cdots b_{nm} \end{pmatrix},\quad \Theta=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

其中$B_1=(b_{11},\cdots,b_{1m})^T>0$.

同样假定

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

其中$A_1=(a_{11},\cdots,a_{1n})^T>0$.

此时

$$G=A*\Lambda=\begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ 0 \cdots 0 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ 0 \cdots 0 \end{pmatrix},\quad H=B*\Theta=\begin{pmatrix} b_{11} \cdots b_{1m} \\ 0 \cdots 0 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$$

$$GH=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵$(GH)^T$是非负矩阵。它虽不是正矩阵，不满足 Frobenius—Perron 定理的条件，但不难证明仍有同样的结论。GH的非零特征值为$\lambda^2=a_{11}b_{11}$，相应的左特征向量为$U=B_1/\sqrt{b_{11}}$，相应地，$V=A_1/\sqrt{a_{11}}$，红方各类战斗单位的相对火力指数分别为

$$\frac{b_{11}}{\sqrt{b_{11}}},\ \frac{b_{12}}{\sqrt{b_{11}}},\ \cdots,\ \frac{b_{1m}}{\sqrt{b_{11}}}$$

蓝方各类战斗单位的相对火力指数分别为

$$\frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}}},\ \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}},\ \cdots,\ \frac{a_{1n}}{\sqrt{a_{11}}}$$

在这个特定例子中，我们看到相对火力指数恰好与Lanchester 方程中的系数成比例。因此，相对火力指数可以看作为Lanchester 方程中威力系数概念的推广。

例 2 设

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ G=H=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

这时不难算得$\lambda=3$，$U=V=(1,\ 1)^T$. 于是(7)和(8)式成为

$$\begin{cases} u=x_1+x_2 \\ v=y_1+y_2 \end{cases}\quad 和 \quad \begin{cases} \dot{u}=-3v \\ \dot{v}=-3u \end{cases}$$

解此方程组，得

$$\begin{cases}u=x_1+x_2=ce^{3t}+de^{-3t}\\ v=y_1+y_2=-ce^{3t}+de^{-3t}\end{cases}$$

其中$d=(u(0)+v(0))/2$，$c=(u(0)-v(0))/2$

若双方初始值为

$$X(0)=\begin{pmatrix}7&0\\3&0\end{pmatrix}, \quad Y(0)=\begin{pmatrix}6&0\\4&0\end{pmatrix}$$

则$d=100$，$c=0$. 于是双方交战初期，其总火力指数的解为

$$u=v=100e^{-3t}$$

从表面上看来，这似乎是一场平局，但实则不然。方程(8)成立的基本条件是分配矩阵Λ与Θ不变。在红、蓝双方有一类战斗单位被消灭时，这个条件将被破坏。因此，方程(8)最多只能成立到有一类战斗单位被消灭时为止。在这个例子中可以算出，当$t_1=0.2554$时，$x_2(t_1)$首先等于零。此时，红方第二类战斗单位被消灭，而红、蓝双方其它剩余战斗单位数分别为

$$\begin{cases}x_1(t_1)=46.48\\ y_1(t_1)=38.73\\ y_2(t_1)=\ \ 7.75\end{cases}$$

由于战斗格局发生改变，双方实力变化的趋势也将有所不同。谁胜谁负还不能简单地下结论。

例 3 续例2．若进一步假定

$$A=B=\begin{pmatrix}2&4\\4&2\end{pmatrix}, \quad \Lambda=\Theta=\begin{pmatrix}1/2&1/2\\1/2&1/2\end{pmatrix}$$

当$t=t_1=0.2554$时，$x_2(t_1)=0$，红方第二类战斗单位被消灭。此时双方威力矩阵变为

$$\tilde{A}=(2,\ 4), \quad \tilde{B}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$

一般地，蓝方应集中所有战斗单位攻击红方剩余的第一类战斗单位。因此$\Lambda=(1,\ 1)$，如果此时红方仍将其火力平均分配于蓝方剩余的二类战斗单位，则

$$\Theta=\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

此时，相应的Lanchester方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-2y_1-4y_2\\ \dot{y}_1=-x_1\\ \dot{y}_2=-2x_1\end{cases}$$

于是

$$G=(2,\ 4), \quad H=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad GH=(10)$$

$$\lambda=\sqrt{10}, \quad U=(1), \quad V^T=\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot 1\cdot(2,\ 4)=\left(\frac{2}{\sqrt{10}},\ \frac{4}{\sqrt{10}}\right)$$

不难求得方程组的解

$$\begin{cases}x_1=(6.09e^{\sqrt{10}(t-t_1)}+40.39e^{-\sqrt{10}(t-t_1)}\\ y_1=(-6.09e^{\sqrt{10}(t-t_1)}+40.39e^{-\sqrt{10}(t-t_1)}+88.18)/\sqrt{10}\\ y_2=(-12.18e^{\sqrt{10}(t-t_1)}+80.78e^{-\sqrt{10}(t-t_1)}-44.09)/\sqrt{10}\end{cases}$$

这时我们看到蓝方武器的相对火力指数发生了变化，并导致蓝方的总火力指数初始值

$$\frac{2}{\sqrt{10}}\times 38.73+\frac{4}{\sqrt{10}}\times 7.75=34.30$$

小于红方的总火力指数初始值46.48．而在$t=t_1$之前的瞬间两者还是相等的。

按这种方式战斗下去，我们容易算得，再经过$t-t_1=t_2=0.092$时间单位，$y_2=0$，蓝方第二类战斗单位将被消灭。此时，红、蓝双方的第一类战斗单位分别剩余

$$\begin{cases}x_1(t_1+t_2)=38.33\\ y_1(t_1+t_2)=34.85\end{cases}$$

显然，这样战斗下去，红方可以获胜。

4　结论及问题

本文从形如(2)式的Lanchester方程出发，利用矩阵特征值与特征向量的概念导出了形如(8)式的方程，从而将武器火力指数与Lanchester方程有机地结合起来。

通过理论分析与一些实例，我们看到火力指数不仅取决于武器本身，而且依赖于战斗中双方武器配系，并与火力分配原则（矩阵）有密切的联系。随着战斗的进展，由于某些种类武器系统被消灭，战斗格局发生变化时，各类武器的火力指数是会发生变化的。这与人们的常识相一致。

通过本文的研究，实际上又提出了一系列值得深入探讨的新问题。

1）　Lanchester方程（2）运用的条件是什么？显然只有在这种条件下，本文的一切讨论才有意义。

2）　矩阵GH的特征值$\mu>0$与左特征向量$U>0$的条件是什么？这些条件有什么战术意义？

3）　如果出现$\mu>0$而$U\ngtr 0$的情况，火力指数的概念应如何理解和定义？在战术上应作何解释？

4）　火力分配矩阵与战斗的结局有重要影响，它反映了战术运用。那么，在一定的战斗条件下，火力分配矩阵应如何选取才能充分发挥自己的最大威力？

以上这些问题的探讨需要精细的数学上的分析与实用作战原则的紧密结合。这方面的研究将为用定量化方法研究作战的理论作出重要贡献。

参考文献

[1]　Coleman S；朱煜民，周宇虹译；沙基昌校．F．Lucas微分方程模型．长沙：国防科技大学出版社，1988．122～149

[2]　鲁恩伯杰著；袁天鑫，黄午阳译．社会动态系统引论．上海：科学技术出版社，1985．187～193

The Inner Relations Between Lanchester Equations and the Fire Indexes

Sha Jichang
(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

Abstract

This paper reveals the inner relationship between the characteristic vectors of Lanchester equations and fire indexes with the help of the property of positive matrixes.

By way of examples the paper further shows that the fire indexes are the extension of the notion of power coefficients in Lanchester equations. It is pointed out that the fire indexes are not only related to the weapons, but also depend on the disposition of troops in a whole battle. When some kinds of weapons are destroyed the fire indexes will change with situation. The fire indexes also depend on the principles of weapon assignment. Thus the relationship between fire indexes and tactical principles is set up.

Key words: operations analysis, military operation, model, military simulation, C^3I theory, fire indexes